

ویرایش جدید

آمادگی برای آزمون‌های کارشناسی ارشد
اقتصاد، مدیریت و حسابداری

ریاضیات

تشریح مفاهیم درسی با مثال

آموزش نکات تستی و حل تست‌های استاندارد

پاسخ تشریحی آزمون‌های کارشناسی ارشد ۷۰ تا ۸۴



هادی رنجبران

رنجبران، هادی، ۱۳۴۷ -

ریاضیات: آمادگی برای آزمون‌های کارشناسی ارشد اقتصاد، مدیریت و حسابداری / تألیف
هادی رنجبران، -- (ویراست ۵). - تهران: نشر کتاب دانشگاهی، ۱۳۸۴.
۷۲۰ ص: مصور، جدول، نمودار.

ISBN 964-6904-51-3

فهرست‌نویسی بر اساس اطلاعات فیبا.

۱. دانشگاه‌ها و مدارس عالی -- ایران -- آزمون‌ها. ۲. ریاضیات -- آزمون‌ها و
تمرین‌ها (عالی). ۳. ریاضیات -- کتاب‌های درسی -- راهنمای آموزشی (عالی). الف. عنوان. ب.
عنوان: آمادگی برای آزمون‌های کارشناسی ارشد رشته‌های اقتصاد، مدیریت و حسابداری
"ریاضیات". ج. عنوان: آمادگی برای آزمون‌های کارشناسی ارشد اقتصاد، مدیریت و حسابداری.

۳۷۸/۱۶۶۴

LB ۲۳۵۳ / ۷۷ آ ۸۵۲ ر

۱۳۸۴

کتابخانه ملی ایران

۲۱۲۸۳ - ۸۴ پ



نشر کتاب دانشگاهی



ریاضیات

آمادگی برای آزمون‌های کارشناسی ارشد
اقتصاد، مدیریت و حسابداری
ویرایش پنجم

هادی رنجبران

چاپ اول ۱۳۸۴

لیتوگرافی مهران‌نگار

چاپ ششم

صحافی مینو

تیراز ۱۱۰۰ نسخه

تعداد و قطع صفحات ۷۲۰، وزیری

بها ۷۲۰۰ تومان

شابک ۹۶۴-۶۹۰۴-۵۱-۳ ISBN 964-6904-51-3



تهران، خیابان بزرگمهر غربی، شماره ۱۰۳. تلفکس ۶۶۴۶۷۲۲۶

حقوق چاپ و نشر برای ناشر محفوظ است.

این اثر را تقدیم می‌کنم به
مادر عزیز و مهربانم

مقدمه

کتابی که در اختیار دارید مجموعه کاملی است از درس، نکته و تست ریاضیات که با استفاده از معتبرترین منابع و مراجع و بر اساس سرفصل‌های مصوب شورای عالی برنامه‌ریزی و عناوین درسی متداول دانشگاه‌ها برای داوطلبان آزمون‌های کارشناسی ارشد رشته‌های اقتصاد، مدیریت و حسابداری تدوین و تألیف شده است.

این مجموعه شامل پانزده فصل است. در فصل‌های ۱ تا ۱۳ مطالب درسی به شرح زیر ارائه شده است:

۱- مفاهیم هر فصل به گونه‌ای بیان شده است که در عین سادگی چیزی از جنبه‌های اصولی و دقت ریاضی آن کم نمی‌کند.

۲- مسائل متعدد و متنوعی تحت عنوان «مسائل نمونه فصل» برای هر موضوع درسی طرح شده است.

۳- ضمن بیان نکات کلیدی برای حل سؤالات تستی، این امکان فراهم شده است که دانشجویان بتوانند در حداقل زمان ممکن به این‌گونه سؤالات پاسخ دهند.

۴- تست جامع و استاندارد مربوط به مطالب مندرج در هر فصل تحت عنوان «سؤالات تستی فصل» آورده شده تا علاقه‌مندان آزمون‌های کارشناسی ارشد در پاسخ‌گویی به این‌گونه سؤالات، ورزیدگی و تسلط کافی نیابند. در طراحی و تنظیم این تست‌ها بر جنبه‌های آموزشی و فراگیر بودن آن‌ها تأکید شده است.

۵- در پایان هر فصل تست‌های ریاضیات آزمون‌های کارشناسی ارشد رشته‌های اقتصاد، مدیریت و حسابداری از سال ۱۳۷۰ تا کنون به صورت موضوعی آورده شده است.

فصل‌های ۱۴ و ۱۵ نیز به ترتیب شامل پاسخ کلیدی و راه‌حل‌های تشریحی ۱۲۵۰ تست طرح شده و تست‌های ریاضیات آزمون‌های کارشناسی ارشد می‌باشد.

از اساتید، دانشجویان و خوانندگانی که اشکالات و نواقص احتمالی این کتاب را گوشزد خواهند کرد، و همچنین از نشر کتاب دانشگاهی برای چاپ و نشر این مجموعه سپاسگزارم.

هادی رنجبران

پیش از مطالعه، اصلاحات زیر را انجام دهید:

شماره صفحه	شماره تست / مسأله / سطر	درست
۱۰۷	سطر دوم و سوم، داخل پرانتز	$\left(ax + \frac{n\pi}{r}\right)$
۱۱۳	بخش ۱۶-۵، قسمت ۱)	این تابع همواره دارای یک max یا یک min است.
۱۱۳	بخش ۱۶-۵، قسمت ۵)	نقطه $s(-b/2a, (4ac - b^2)/4a)$ رأس سهمی است.
۱۱۶	بخش ۱-۲۳-۵، سطر سوم	۳) $y = u + v \Rightarrow dy = du + dv$
۱۴۰	تست ۲	$vwdu + \dots$
۱۴۲	۲۷	$x = -2$
۱۶۱	۲۹	حاصل $d/dt \int_{\sqrt{x}}^{\sqrt[3]{x}} \sin t^x dt$ را بیابید
۱۹۸	بخش ۷-۴۷	در ماتریس (۲) بین ماتریس دوم و سوم علامت = قرار دهید.
۲۱۲	تست ۱۷ جواب ۲)	$\begin{bmatrix} 8 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix}$
۲۶۲	مسأله ۴	$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} e^{\ln x \cdot \ln(-y)}$
۲۷۸	سوال ۱۳۱	$Z = \ln xy - x$
۲۸۳	قسمت ۶۱	$y = 2$
۳۰۷	خط مقابل آخر	$\ln(y)(1+x^2)^{\frac{1}{2}} = 2 \Rightarrow \dots$
۳۳۳	تست ۵۳	در رابطه $ z-1 = z+1 $ مکان هندسی نقاط ... صدق می‌کند.
۴۱۶	پاسخ ۴-۳)	$A_{r \times r} B_{m \times n} C_{s \times r} \Rightarrow B_{r \times s}$ $m=r \quad n=s$
۴۸۲	پاسخ تست ۴۷-۳)	می‌دانیم $(z_1/z_2) = \overline{z_1}/\overline{z_2}$ بنابراین:
۵۰۰	پاسخ تست ۱۵-۱)	$\lim_{h \rightarrow 0} \dots = \left(\sin \frac{\pi}{2}\right)' = \cos \frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt{e}}{1}$
۵۱۸	پاسخ تست ۱۳۰	پاسخ تست ۱۳۰ شماره ۴ است
۵۱۸	به سطر آخر اضافه شود	$y = f(2) = \ln 2 + 2$
۵۳۴	پاسخ تست ۲۲-۴)	$\dots \Rightarrow k = 1, k = -\frac{1}{r}$
۵۴۳	پاسخ تست ۳-۱)	$1(x-0) + 1(y-0) + 3(z-0) = 0 \Rightarrow x + y + 3z = 0$

فهرست مطالب

۳۱	۳-۳ ضابطه تابع		فصل ۱: دستور دوجمله‌ای
۳۱	۴-۳ تابع با چند ضابطه	۱۰	۱-۱ دستور دوجمله‌ای
۳۲	۵-۳ نحوه تشخیص یک تابع	۱۰	۲-۱ ویژگی‌های دستور دوجمله‌ای
۳۲	۶-۳ دامنه و برد تابع	۱۱	مسائل نمونه فصل ۱
۳۲	۷-۳ تعیین دامنه تابع	۱۱	پاسخ مسائل نمونه فصل ۱
۳۴	۸-۳ تعیین برد تابع	۱۱	سؤالات تستی فصل ۱
۳۵	۹-۳ محاسبه مقدار تابع	۱۳	تست‌های آزمون کارشناسی ارشد
۳۵	۱۰-۳ تبدیل متغیر		«دستور دوجمله‌ای»
۳۵	۱۱-۳ عملیات اصلی روی توابع		فصل ۲: مجموعه‌ها
۳۵	۱۲-۳ تابع مرکب (تابع تابع)	۱۴	۱-۲ مفهوم مجموعه
۳۵	۱۳-۳ تساوی دو تابع	۱۴	۲-۲ نمایش مجموعه
۳۶	۱۴-۳ تابع یک به یک	۱۴	۳-۲ عضویت و عدم عضویت
۳۶	۱۵-۳ نحوه تشخیص تابع یک به یک	۱۴	۴-۲ مجموعه‌های خاص
۳۶	۱۶-۳ تابع پوششی	۱۴	۵-۲ مجموعه تهی
۳۶	۱۷-۳ نحوه تشخیص تابع پوششی	۱۴	۶-۲ مجموعه تک‌عضوی
۳۶	۱۸-۳ تابع ثابت	۱۵	۷-۲ زیرمجموعه
۳۷	۱۹-۳ تابع همانی (یکسان)	۱۵	۸-۲ مجموعه مرجع (جهانی)
۳۷	۲۰-۳ معکوس (وارون) تابع	۱۵	۹-۲ مجموعه‌های مساوی
۳۷	۲۱-۳ نمودار معکوس تابع	۱۶	۱۰-۲ مجموعه‌های هم‌ارز
۳۸	۲۲-۳ توابع زوج و فرد	۱۶	۱۱-۲ مجموعه‌های جدا از هم
۳۹	۲۳-۳ تابع قدر مطلق	۱۶	۱۲-۲ مجموعه مجموعه‌ها
۳۹	۲۴-۳ تابع جزء صحیح	۱۶	۱۳-۲ مجموعه توانی
۴۰	۲۵-۳ تابع علامت	۱۷	۱۴-۲ مجموعه متمم
۴۰	۲۶-۳ تابع نمایی	۱۷	۱۵-۲ اجتماع مجموعه‌ها
۴۱	۲۷-۳ تابع لگاریتمی	۱۸	۱۶-۲ اشتراک مجموعه‌ها
۴۱	۲۸-۳ توابع مثلثاتی و معکوس آن‌ها	۱۸	۱۷-۲ تفاضل مجموعه‌ها
۴۲	۲۹-۳ توابع هیپربولیک	۱۸	۱۸-۲ جبر مجموعه‌ها
۴۴	۳۰-۳ توابع معکوس هیپربولیک	۱۹	۱۹-۲ عدد اصلی مجموعه
۴۴	مسائل نمونه فصل ۳	۱۹	۲۰-۲ اجتماع و اشتراک چند مجموعه
۴۵	پاسخ مسائل نمونه فصل	۱۹	۲۱-۲ افزاین مجموعه‌ها
۴۸	سؤالات تستی فصل ۳	۲۰	۲۲-۲ تناظر یک به یک
۶۴	تست‌های آزمون کارشناسی ارشد «تابع»	۲۰	۲۳-۲ زوج مرتب
	فصل ۴: حد و پیوستگی	۲۰	۲۴-۲ ضرب دکارتی دو مجموعه
۷۱	۱-۴ تعریف حد	۲۱	مسائل نمونه فصل ۲
۷۱	۲-۴ حد راست و حد چپ	۲۲	پاسخ مسائل نمونه فصل ۲
۷۱	۳-۴ حد تابع در یک نقطه	۲۳	سؤالات تستی فصل ۲
۷۲	۴-۴ قضایای اساسی حد	۲۸	تست‌های آزمون کارشناسی ارشد «مجموعه‌ها»
	فصل ۳: تابع		
	۱-۳ رابطه	۳۱	
	۲-۳ تابع	۳۱	

۱۱۵	۱۸-۵ قضیه رول
۱۱۵	۱۹-۵ قضیه مقدار میانگین
۱۱۶	۲۰-۵ فرمول کوشی
۱۱۶	۲۱-۵ یافتن جواب‌های معادله
۱۱۶	۲۲-۵ دیفرانسیل
۱۱۶	۲۳-۵ دیفرانسیل توابع مختلف
۱۱۷	۲۴-۵ دیفرانسیل تابع مرکب
۱۱۷	۲۵-۵ دیفرانسیل‌های متوالی
۱۱۸	۲۶-۵ محاسبه تقریبی به کمک دیفرانسیل
۱۱۸	۲۷-۵ محاسبه خطا با استفاده از دیفرانسیل
۱۱۸	مسائل نمونه فصل ۵
۱۱۹	پاسخ مسائل نمونه فصل ۵
۱۲۴	سؤالات تستی فصل ۵
۱۴۰	تست‌های آزمون کارشناسی ارشد «مشتق»

فصل ۶: انتگرال

۱۵۰	۱-۶ انتگرال
۱۵۰	۲-۶ انتگرال نامعین
۱۵۰	۳-۶ خواص انتگرال نامعین
۱۵۰	۴-۶ روش‌های انتگرال‌گیری
۱۵۵	۵-۶ انتگرال معین
۱۵۵	۶-۶ خواص انتگرال معین
۱۵۵	۷-۶ انتگرال‌گیری از توابعی که شامل تابع جزء صحیح و یا قدر مطلق می‌باشند
۱۵۶	۸-۶ قضیه مقدار میانگین برای انتگرال‌ها
۱۵۶	۹-۶ قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال

۱۵۶	۱۰-۶ مشتق‌گیری از انتگرال
۱۵۶	۱۱-۶ کاربردهای انتگرال معین
۱۵۸	۱۲-۶ انتگرال‌های نسبه
۱۵۹	۱۳-۶ انتگرال‌های چندگانه
۱۶۰	مسائل نمونه فصل ۶
۱۶۲	پاسخ مسائل نمونه فصل ۶
۱۶۸	سؤالات تستی فصل ۶
۱۷۹	تست‌های آزمون کارشناسی ارشد «انتگرال»

فصل ۷: ماتریس

۱۸۶	۱-۷ ماتریس
۱۸۶	۲-۷ ماتریس مربع
۱۸۶	۳-۷ اثر یک ماتریس
۱۸۶	۴-۷ ماتریس صفر
۱۸۶	۵-۷ ماتریس ستونی
۱۸۶	۶-۷ ماتریس سطری
۱۸۷	۷-۷ ماتریس همانی (واحد)
۱۸۷	۸-۷ قرینه یک ماتریس

۷۲	۵-۴ حد بی‌نهایت
۷۳	۶-۴ حد در بی‌نهایت
۷۴	۷-۴ حد چندجمله‌ای‌ها
۷۵	۸-۴ حد خارج قسمت چندجمله‌ای‌ها
۷۴	۹-۴ حد یک کسر وقتی صورت و مخرج هر دو به سمت بی‌نهایت میل کند
۷۵	۱۰-۴ محاسبه حد توابع نمایی و لگاریتمی وقتی $x \rightarrow \infty$
۷۵	۱۱-۴ محاسبه یک حد مهم
۷۵	۱۲-۴ بی‌نهایت کوچک‌ها و هم‌ارزی آن‌ها
۷۵	۱۳-۴ کاربرد بی‌نهایت کوچک‌های هم‌ارز در محاسبه حد توابع هم‌ارز مثلثاتی
۷۶	۱۴-۴ هم‌ارزی رادیکال‌ها
۷۶	۱۵-۴ صورت‌های مبهم
۷۷	۱۶-۴ پیوستگی تابع در یک نقطه
۷۷	۱۷-۴ پیوستگی راست و پیوستگی چپ در یک نقطه
۷۷	۱۸-۴ فضایی پیوستگی
۷۸	۱۹-۴ پیوستگی تابع در یک فاصله
۷۸	۲۰-۴ پیوستگی تابع در یک فاصله
۸۰	۲۱-۴ مسائلی نمونه فصل ۴
۸۱	پاسخ مسائل نمونه فصل ۴
۸۵	سؤالات تستی فصل ۴
۹۸	تست‌های آزمون کارشناسی ارشد «حد و پیوستگی»

فصل ۵: مشتق

۱۰۳	۱-۵ آهنگ تغییرات نسبی و آهنگ تغییرات آنی
۱۰۳	۲-۵ تعریف مشتق
۱۰۳	۳-۵ تعبیر هندسی مشتق
۱۰۴	۴-۵ مشتق‌پذیری تابع در یک نقطه
۱۰۴	۵-۵ مشتق‌پذیری تابع در یک فاصله
۱۰۴	۶-۵ قواعد مشتق‌گیری
۱۰۶	۷-۵ مشتق مراتب بالاتر
۱۰۷	۸-۵ مشتق‌گیری ضمنی
۱۰۷	۹-۵ مشتق تابع مرکب (تابع تابع)
۱۰۷	۱۰-۵ مشتق متحنی‌های پارامتری
۱۰۷	۱۱-۵ مشتق نسبت به t
۱۰۸	۱۲-۵ مشتق توابع معکوس
۱۰۸	۱۳-۵ کاربردهای مشتق
۱۱۲	۱۴-۵ نقاط مهم روی منحنی‌ها
۱۱۲	۱۵-۵ خواص نقاط روی منحنی‌ها
۱۱۳	۱۶-۵ بررسی رفتار چند تابع جبری
۱۷-۵	تعیین ماکزیمم و می‌نیمم در حالات خاص

۵۱-۷	حل دستگاه n معادله n مجهول با استفاده از معکوس ماتریس‌ها	۱۸۷	۹-۷ تساوی ماتریس‌ها
۵۲-۷	دستگاه معادلات همگن خطی	۱۸۷	۱۰-۷ جمع ماتریس‌ها
۵۳-۷	مشتق یک ماتریس (مشتق برداری)	۱۸۷	۱۱-۷ خواص جمع ماتریس‌ها
۵۴-۷	معادله مفسر، مقادیر ویژه و امتدادهای یک ماتریس مربع	۱۸۷	۱۲-۷ تفریق ماتریس‌ها
۵۵-۷	نحوه تعیین مقدار ویژه و بردار ویژه	۱۸۷	۱۳-۷ ضرب یک عدد در یک ماتریس
۵۶-۷	صورت کلی معادله مفسر یک ماتریس 2×2	۱۸۷	۱۴-۷ خواص ضرب یک عدد در یک ماتریس
۵۷-۷	صورت کلی معادله مفسر یک ماتریس 3×3	۱۸۸	۱۵-۷ ضرب ماتریس‌ها
۵۸-۷	مقادیر ویژه معکوس یک ماتریس	۱۸۸	۱۶-۷ خواص ضرب ماتریس‌ها
۵۹-۷	مقادیر ویژه چند جمله‌ای‌های ماتریس	۱۸۸	۱۷-۷ توان‌های طبیعی یک ماتریس
۶۰-۷	خواص معادله مفسر، مقادیر ویژه و بردارهای ویژه	۱۸۹	۱۸-۷ ماتریس بالامتثلی
۲۰۴	مسائل نمونه فصل ۷	۱۸۹	۱۹-۷ ماتریس پایین مثلثی
۲۰۵	پاسخ مسائل نمونه فصل ۷	۱۸۹	۲۰-۷ خواص ماتریس‌های مثلثی
۲۱۰	سوالات تستی فصل ۷	۱۹۰	۲۱-۷ ماتریس‌های قطری
۲۲۵	تست‌های آزمون کارشناسی ارشد «ماتریس»	۱۹۰	۲۲-۷ خواص ماتریس‌های قطری
		۱۹۰	۲۳-۷ ماتریس‌های اسکالر
		۱۹۰	۲۴-۷ ماتریس‌های بی اثر (هیچ نما)
		۱۹۱	۲۵-۷ ماتریس‌های خودتوان
		۱۹۱	۲۶-۷ ماتریس ترانزاده (ترانسپوز)
		۱۹۱	۲۷-۷ ویژگی‌های ماتریس ترانزاده
		۱۹۱	۲۸-۷ ماتریس متقارن
		۱۹۱	۲۹-۷ ویژگی‌های ماتریس متقارن
		۱۹۱	۳۰-۷ ماتریس پادمقارن (ضد متقارن)
		۱۹۲	۳۱-۷ ویژگی‌های ماتریس پادمقارن
		۱۹۲	۳۲-۷ دترمینان
		۱۹۳	۳۳-۷ ویژگی‌های دترمینان
		۱۹۴	۳۴-۷ نمایش معادله یک خط توسط دترمینان
		۱۹۴	۳۵-۷ نمایش مساحت یک مثلث توسط دترمینان
		۱۹۴	۳۶-۷ ماتریس منفرد و غیرمنفرد
		۱۹۴	۳۷-۷ ماتریس همساز و ماتریس الحاقی
		۱۹۴	۳۸-۷ معکوس (وارون) یک ماتریس
		۱۹۵	۳۹-۷ ویژگی‌های معکوس یک ماتریس
		۱۹۵	۴۰-۷ ماتریس برگردان
		۱۹۵	۴۱-۷ دستور محاسبه معکوس یک ماتریس
		۱۹۶	۴۲-۷ ماتریس متعامد
		۱۹۶	۴۳-۷ ویژگی‌های ماتریس متعامد
		۱۹۶	۴۴-۷ عملیات مقدماتی
		۱۹۷	۴۵-۷ ماتریس‌های مقدماتی
		۱۹۷	۴۶-۷ مرتبه (رتبه) ماتریس
		۱۹۸	۴۷-۷ دستگاه معادلات خطی
		۱۹۹	۴۸-۷ دستگاه معادلات خطی ماتریس‌ها
		۱۹۹	۴۹-۷ بحث در تعداد جواب‌های دستگاه معادلات خطی
		۱۹۹	۵۰-۷ حل دستگاه n معادله n مجهول با استفاده از دستور کرامر
فصل ۸: بردار، خط، صفحه			
۲۳۵	۱-۸ تعریف هندسی بردار		
۲۳۵	۲-۸ تعریف ماتریسی بردار		
۲۳۵	۳-۸ مختصات در فضا		
۲۳۶	۴-۸ فضای سه‌بعدی ($\mathbb{R}^3$)		
۲۳۶	۵-۸ طول (اندازه) پاره خط		
۲۳۶	۶-۸ بردارها در فضا		
۲۳۶	۷-۸ بردارهای واحد محورهای مختصات		
۲۳۷	۸-۸ طول (اندازه) بردار		
۲۳۷	۹-۸ تساوی دو بردار		
۲۳۷	۱۰-۸ جمع دو بردار		
۲۳۷	۱۱-۸ ضرب بردار در یک عدد حقیقی		
۲۳۷	۱۲-۸ ویژگی‌های جمع دو بردار و ضرب بردار در یک عدد حقیقی		
۲۳۸	۱۳-۸ حاصل ضرب داخلی یا اسکالر دو بردار		
۲۳۸	۱۴-۸ ویژگی‌های حاصل ضرب داخلی بردارها		
۲۳۹	۱۵-۸ حاصل ضرب خارجی یا ضرب برداری دو بردار		
۲۳۹	۱۶-۸ ویژگی‌های حاصل ضرب خارجی بردارها		
۲۳۹	۱۷-۸ حاصل ضرب مختلط سه بردار		
۲۴۰	۱۸-۸ زوایای یک بردار با محورها		
۲۴۰	۱۹-۸ معادله خط در فضا		
۲۴۰	۲۰-۸ معادلات پارامتری و متقارن خط در صفحه		

۲۵۵	۲-۹ دامنه و برد توابع چندمتغیره	۲۱-۸	تعیین معادله خطی که دو نقطه آن معلوم است
۲۵۵	۳-۹ حد در توابع چندمتغیره	۲۲-۸	تعیین معادله خطی که از یک نقطه بر یک خط عمود است
۲۵۶	۴-۹ پیوستگی در توابع چندمتغیره	۲۳-۸	وضعیت دو خط نسبت به یکدیگر
۲۵۶	۵-۹ قضایای پیوستگی در توابع چندمتغیره	۲۴-۸	زاویه بین دو خط متقاطع
۲۵۶	۶-۹ مشتقات جزئی (نسبی)	۲۵-۸	فاصله یک نقطه از یک خط
۲۵۷	۷-۹ مشتقات جزئی مراتب بالاتر	۲۴-۸	زاویه بین دو خط متقاطع
۲۵۷	۸-۹ دیفرانسیل کامل	۲۵-۸	فاصله یک نقطه از یک خط
۲۵۸	۹-۹ دیفرانسیل مراتب بالاتر	۲۶-۸	معادله صفحه
۲۵۸	۱۰-۹ مشتق کامل	۲۷-۸	حالات خاص معادلات صفحه
۲۵۹	۱۱-۹ مشتق تابع ضمنی	۲۸-۸	تعیین معادله صفحه‌ای که سه نقطه آن معلوم است
۲۵۹	۱۲-۹ توابع همگن و قضیه اویلر	۲۹-۸	زاویه بین دو صفحه
۲۵۹	۱۳-۹ ماکزیم و می‌نیم توابع چندمتغیره	۳۰-۸	معادله دسته صفحه
۲۶۰	۱۴-۹ نقطه بحرانی	۳۱-۸	معادله صفحه‌ای که دو نقطه آن داده شد و بر صفحه دیگر عمود است
۲۶۰	۱۵-۹ نقطه زینی	۳۲-۸	معادله صفحه‌ای که یک نقطه آن داده شده و بر دو صفحه دیگر عمود است
۲۶۰	۱۶-۹ نحوه تعیین نقاط اکسترم و زینی	۳۳-۸	معادله صفحه‌ای که از یک نقطه معین می‌گذرد و موازی دو خط غیرموازی است
۲۶۱	۱۷-۹ ماکزیم و می‌نیم توابع مقید	۳۴-۸	فاصله یک نقطه از یک صفحه
۲۶۲	مسائل نمونه فصل ۹	۳۵-۸	فاصله دو صفحه موازی
۲۶۳	پاسخ مسائل نمونه فصل ۹	۳۶-۸	تعریف بردار و فضای برداری v_n
۲۶۷	سوالات تستی فصل ۹	۳۷-۸	ترکیب خطی
۲۷۹	تست‌های آزمون کارشناسی ارشد «توابع چندمتغیره»	۳۸-۸	بردارهای هم‌صفحه
		۳۹-۸	روش‌های تعیین هم‌صفحه بودن سه بردار
	فصل ۱۰: سری‌ها	۴۰-۸	استقلال خطی و بستگی خطی
۲۸۷	۱-۱۰ دنباله	۴۱-۸	استقلال خطی و بستگی خطی یک بردار
۲۸۷	۲-۱۰ حد یک دنباله	۴۲-۸	استقلال خطی و بستگی خطی دو بردار
۲۸۷	۳-۱۰ دنباله‌های خاص	۴۳-۸	یک معیار برای بستگی خطی دو یا بیش از دو بردار
۲۸۸	۴-۱۰ چند قضیه مهم	۴۴-۸	حداکثر بردارهای مستقل خطی در $\mathbb{R}^2$ و $\mathbb{R}^3$
۲۸۸	۵-۱۰ سری	۴۵-۸	بردارهایی که یک فضای برداری را پدید می‌آورند
۲۸۸	۶-۱۰ تعریف هم‌گرایی و واگرایی		
۲۸۹	۷-۱۰ قضایای مربوط به نوع سری‌ها		
۲۸۹	۸-۱۰ سری نامحدود با جملات مثبت		
۲۹۰	۹-۱۰ سری‌های متناوب		
۲۹۱	۱۰-۱۰ سری‌های توانی		
۲۹۲	۱۱-۱۰ سری تیلور		
۲۹۴	مسائل نمونه فصل ۱۰		
۲۹۴	پاسخ مسائل نمونه فصل ۱۰		
۲۹۶	سوالات تستی فصل ۱۰		
۳۰۲	تست‌های آزمون کارشناسی ارشد «سری‌ها»		
	فصل ۱۱: معادلات دیفرانسیل		
۳۰۳	۱-۱۱ تعریف معادله دیفرانسیل	۲۴۵	مسائل نمونه فصل ۸
۳۰۳	۲-۱۱ مرتبه و درجه یک معادله دیفرانسیل	۲۴۶	پاسخ مسائل نمونه فصل ۸
۳۰۳	۳-۱۱ تشکیل معادلات دیفرانسیل	۲۴۹	سوالات تستی فصل ۸
۳۰۳	۴-۱۱ جواب‌های یک معادله	۲۵۴	تست‌های آزمون کارشناسی ارشد «بردار، خط، صفحه»
۳۰۴	۵-۱۱ حل معادلات دیفرانسیل		
۳۰۶	مسائل نمونه فصل ۱۱		
۳۰۷	پاسخ مسائل نمونه فصل ۱۱	۲۵۵	
			فصل ۹: توابع چندمتغیره
			۱-۹ توابع چندمتغیره

۳۴۰	پاسخ تشریحی سؤالات تستی فصل ۳
۳۵۸	پاسخ تشریحی سؤالات تستی فصل ۴
۳۷۵	پاسخ تشریحی سؤالات تستی فصل ۵
۳۹۷	پاسخ تشریحی سؤالات تستی فصل ۶
۴۱۵	پاسخ تشریحی سؤالات تستی فصل ۷
۴۳۱	پاسخ تشریحی سؤالات تستی فصل ۸
۴۳۶	پاسخ تشریحی سؤالات تستی فصل ۹
۴۵۶	پاسخ تشریحی سؤالات تستی فصل ۱۰
۴۶۴	پاسخ تشریحی سؤالات تستی فصل ۱۱
۴۷۱	پاسخ تشریحی سؤالات تستی فصل ۱۲
۴۷۷	پاسخ تشریحی سؤالات تستی فصل ۱۳

فصل ۱۵: پاسخ تشریحی تست‌های

آزمون کارشناسی ارشد

۴۸۴	پاسخ ... «دستور دوجمله‌ای»
۴۸۵	پاسخ ... «مجموعه‌ها»
۴۸۹	پاسخ ... «تابع»
۴۹۷	پاسخ ... «حد و پیوستگی»
۵۰۵	پاسخ ... «مشتق»
۵۱۹	پاسخ ... «انتهگرال»
۵۳۱	پاسخ ... «ماتریس»
۵۴۳	پاسخ ... «بردار، خط، صفحه»
۵۴۴	پاسخ ... «توابع چندمتغیره»
۵۶۰	پاسخ ... «سری‌ها»
۵۶۱	پاسخ ... «معادلات دیفرانسیل»
۵۶۲	پاسخ ... «معادلات تفاضلی»
۵۶۲	پاسخ ... «مختصات قطبی، اعداد مختلط»

۵۶۵	ضمیمه ۱: تست‌های سال‌های ۷۹ و ۸۰
۵۷۹	ضمیمه ۲: پاسخ تشریحی تست‌های سال‌های ۷۹ و ۸۰
۶۰۳	ضمیمه ۳: تست‌های سال‌های ۸۱ و ۸۲
۶۲۳	ضمیمه ۴: پاسخ تشریحی تست‌های سال‌های ۸۱ و ۸۲
۶۵۳	ضمیمه ۵: تست‌های سال ۸۳
۶۶۷	ضمیمه ۶: پاسخ تشریحی تست‌های سال ۸۳
۶۸۵	ضمیمه ۷: تست‌های سال ۸۴
۶۹۹	ضمیمه ۸: پاسخ تشریحی تست‌های سال ۸۴

منابع و مأخذ

۳۰۹	سؤالات تستی فصل ۱۱
۳۱۳	تست‌های آزمون کارشناسی ارشد «معادلات دیفرانسیل»

فصل ۱۲: معادلات تفاضلی

۳۱۴	۱-۱۲ تعریف معادله تفاضلی
۳۱۵	۲-۱۲ درجه و مرتبه یک معادله تفاضلی
۳۱۵	۳-۱۲ معادلات تفاضلی خطی
۳۱۵	۴-۱۲ تشکیل معادلات تفاضلی
۳۱۵	۵-۱۲ جواب‌های معادلات تفاضلی
۳۱۶	۶-۱۲ جواب‌های مستقل خطی
۳۱۶	۷-۱۲ حل معادلات تفاضلی
۳۱۷	مسائل نمونه فصل ۱۲
۳۱۷	پاسخ مسائل نمونه فصل ۱۲
۳۱۸	سؤالات تستی فصل ۱۲
۳۲۱	تست‌های آزمون کارشناسی ارشد «معادلات تفاضلی»

فصل ۱۳: مختصات قطبی، اعداد مختلط

۳۲۲	۱-۱۳ دستگاه مختصات قطبی
۳۲۳	۲-۱۳ معادله یک منحنی به صورت مختصات قطبی
۳۲۳	۳-۱۳ مجموعه اعداد موهومی
۳۲۳	۴-۱۳ مجموعه اعداد مختلط
۳۲۳	۵-۱۳ تساوی دو عدد مختلط
۳۲۳	۶-۱۳ جمع و تفریق دو عدد مختلط
۳۲۳	۷-۱۳ ضرب دو عدد مختلط
۳۲۴	۸-۱۳ مزدوج یک عدد مختلط
۳۲۴	۹-۱۳ تقسیم دو عدد مختلط
۳۲۴	۱۰-۱۳ قدر مطلق اعداد مختلط
۳۲۴	۱۱-۱۳ تعریف اعداد مختلط به صورت جفت‌های مرتب
۳۲۵	۱۲-۱۳ تغییر هندسی اعداد مختلط و صورت قطبی آن
۳۲۵	۱۳-۱۳ حاصل ضرب دو عدد مختلط که به صورت قطبی باشد
۳۲۶	۱۴-۱۳ خارج قسمت دو عدد مختلط که به صورت قطبی باشد
۳۲۶	۱۵-۱۳ ریشه n ام یک عدد مختلط
۳۲۶	مسائل نمونه فصل ۱۳
۳۲۷	پاسخ مسائل نمونه فصل ۱۳
۳۲۸	سؤالات تستی فصل ۱۳
۳۳۳	تست‌های آزمون کارشناسی ارشد «مختصات قطبی اعداد مختلط»

فصل ۱۴: پاسخ تشریحی سؤالات تستی

فصل‌های ۱ الی ۱۳

۳۳۴	پاسخ تشریحی سؤالات تستی فصل ۱
۳۳۶	پاسخ تشریحی سؤالات تستی فصل ۲

دستور دوجمله‌ای

۱-۱ دستور دوجمله‌ای

هر عبارت به صورت $(x \pm y)^n$ را «دوجمله‌ای» می‌نامند، مانند

$$(x + y)^1 = x^1 + 1xy + y^1$$

$$(x - y)^2 = x^2 - 2x^1y + 1y^2$$

$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

۲-۱ ویژگی‌های دستور دوجمله‌ای

(۱) بسط دوجمله‌ای دارای $n + 1$ جمله است (مسئله ۱)*.

(۲) هر جمله از xy تشکیل شده است که اگر برحسب توان نزولی x باشد با x^n شروع می‌شود و در جملات بعد توان به‌طور متوالی کاهش می‌یابد و توان y به‌طور متوالی افزایش می‌یابد، به‌طوری که در جمله آخر داریم y^n .

(۳) مجموع توان x و y در هر جمله برابر n است.

(۴) اگر توان x در هر جمله را در ضریب آن ضرب نموده و حاصل را بر تعداد جملات نوشته شده تقسیم کنیم، ضریب جمله بعدی به‌دست می‌آید.

(۵) ضرایب جملات متساوی الفاصله با هم برابر می‌باشند.

(۶) اگر p و q در دوجمله‌ای $(x + y)^n$ دارای ضرایب یکسان باشند، داریم $n = p + q - 2$.

(۷) جملات بسط دوجمله‌ای $(x - y)^n$ یک در میان مثبت و منفی هستند به‌قسمی که جملات زوج منفی و جملات فرد مثبت است.

(۸) برای به‌دست آوردن مجموع ضرایب جملات کافی است به‌جای حروف به‌کار رفته عدد یک قرار دهیم (مسئله ۲).

(۹) جمله $(r + 1)$ ام در بسط دوجمله‌ای برابر است با:

$$c_n^r x^{n-r} y^r$$

که در آن n توان دوجمله‌ای و r یک واحد کم‌تر از جمله موردسؤال است. در حالت کلی داریم:

$$(x + y)^n = c_n^0 x^n + c_n^1 x^{n-1} y + c_n^2 x^{n-2} y^2 + \dots + c_n^n y^n$$

(مسائل ۳ و ۵)

(۱۰) در بسط دوجمله‌ای $(x + a/x)^n$ جمله مستقل از x یا جمله فاقد x یا جمله ثابت، در صورتی که n زوج باشد جمله وسط بسط می‌باشد و اگر n فرد باشد جمله مستقل از x وجود ندارد (مسئله ۶).

(۱۱) در دوجمله‌ای $(x^p + 1/x^q)^n$ برای به‌دست آوردن جمله مستقل از x ابتدا مقدار r از رابطه $r = np/(p + q)$

تعیین می‌شود و سپس حاصل را در c_n^r قرار می‌دهیم که همان جمله مستقل از x است (مسئله ۴).

* در سراسر کتاب (مسئله ...)، یعنی آن را در «مسائل نمونه فصل» ببینید.

مسائل نمونه فصل ۱

۱. تعداد جملات در $(2x - y)^7$ کدام است؟
۲. مجموع ضرایب جملات در بسط دوجمله‌ای $(3x + y)^4$ چه قدر است؟
۳. جمله چهارم در بسط دوجمله‌ای $(x + y)^5$ را تعیین کنید.
۴. در دوجمله‌ای $(x^5 + 1/x^3)^8$ جمله مستقل از x را تعیین کنید.
۵. در بسط $(x - 1/\sqrt{x})^8$ ضریب جمله x^2 را تعیین کنید.
۶. در بسط دوجمله‌ای $(x + 1/x)^7$ جمله مستقل از x کدام است؟

پاسخ مسائل نمونه فصل ۱

۱. تعداد جملات برابر است با $8 = 7 + 1$.
۲. $256 = 4^2 = (3 \times 1 + 1)^2 =$ مجموع ضرایب
۳. $n = 5, r = 4 - 1 = 3 \Rightarrow$ جمله چهارم $= c_5^3 x^{5-3} y^3 = 10 x^2 y^3$
۴. $n = 8, p = 5, q = 3 \Rightarrow r = \frac{8 \times 5}{5 + 3} = 5$ ، جمله مستقل از $x = c_8^5 = \frac{8!}{5!3!} = 56$
۵. $c_8^r (x)^{8-r} \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^r = c_8^r (x)^{8-r} (x)^{-\frac{1}{2}r} = c_8^r (x)^{8-r-\frac{1}{2}r}$
 r را طوری تعیین می‌کنیم که توان x برابر ۲ باشد:
۶. $8 - r - \frac{r}{2} = 2 \Rightarrow r = 4$ ، ضریب جمله $x^2 = c_8^4 = \frac{8!}{4!4!} = 70$
۶. جمله مستقل از x وجود ندارد.

سؤالات تستی فصل ۱

- ۱- در دوجمله‌ای $(x + y)^n$ ضرایب جملات چهارم و پنجم با هم برابرند، n کدام است؟
 ۵ (۱) ۴ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴)
- ۲- در دوجمله‌ای $(a + b)^9$ ضریب جمله سوم با ضریب چندمین جمله برابر است؟
 (۱) جمله ششم (۲) جمله هفتم (۳) جمله هشتم (۴) جمله نهم
- ۳- مجموع ضرایب جملات بسط $(x + 2y)^7$ کدام است؟
 ۲۷ (۱) ۵۴ (۲) ۱۵ (۳) ۳۲ (۴)
- ۴- در دوجمله‌ای $(1 + 2x)^5$ جمله چهارم کدام است؟
 $10x^3$ (۱) $80x^2$ (۲) $8x^3$ (۳) $5x^2$ (۴)
- ۵- ✓ جمله سوم از بسط $(2x - \sqrt{2})^8$ کدام است؟
 $3584x^6$ (۱) $1792x^6$ (۲) $3584x^5$ (۳) $1792x^5$ (۴)

۶- اگر در دوجمله‌ای $(x+y)^n$ ضریب چهارمین جمله برابر ۱۰ باشد. توان دوجمله‌ای (n) برابر است با:

$$۳(۱) \quad ۲(۲) \quad ۵(۳) \quad ۶(۴)$$

۷- در بسط دوجمله‌ای $(x + 1/x)^8$ چندمین جمله مستقل از x است؟

$$۱) \text{ جمله چهارم} \quad ۲) \text{ جمله پنجم} \quad ۳) \text{ جمله ششم} \quad ۴) \text{ جمله سوم}$$

۸- در بسط دوجمله‌ای $(x + 1/x)^6$ ، جمله مستقل از x برابر چه مقداری است؟

$$۲۰(۱) \quad ۱۰(۲) \quad ۳(۳) \quad ۱۵(۴)$$

۹- جمله مستقل از x در بسط $(3x^2 - 1/2x^2)^8$ کدام است؟

$$- \frac{2835}{8}(۱) \quad ۷۰(۲) \quad \frac{2835}{8}(۳) \quad -۷۰(۴)$$

۱۰- در بسط $(\sqrt{x} + 1/\sqrt{x})^{10}$ ضریب $x^{1/2}$ کدام است؟

$$C_{10}^4(۱) \quad C_{10}^2(۲) \quad C_{10}^5(۳) \quad C_{10}^{12}(۴)$$

۱۱- در بسط $(2x - 1/\sqrt{x})^8$ ضریب جمله x^2 کدام است؟

$$۷۰(۱) \quad -۷۰(۲) \quad ۱۱۲۰(۳) \quad -۱۱۲۰(۴)$$

۱۲- در بسط $(\sqrt{x} + 1/\sqrt{x})^{10}$ ضریب جمله x^2 کدام است؟

$$C_{10}^2(۱) \quad C_{10}^5(۲) \quad C_{10}^4(۳) \quad C_{10}^6(۴)$$

۱۳- جمله وسط بسط $(a/x + x/a)^{10}$ کدام است؟

$$252 \frac{a}{x}(۱) \quad 210 \frac{x}{a}(۳) \quad 210(۲) \quad 252 \frac{x}{a}(۴)$$

۱۴- در بسط $x^8 + 8x^7y + 28x^6y^2 + 56x^5y^3 + \dots$ جمله پنجم کدام است؟

$$24x^4y^4(۱) \quad 70x^4y^4(۲) \quad 112x^4y^4(۳) \quad 28x^4y^4(۴)$$

۱۵- در بسط $(x/2 - \sqrt{2})^5$ جمله آخر کدام است؟

$$10x(۱) \quad -4\sqrt{2}(۲) \quad -5\sqrt{2}x^2(۳) \quad 2\sqrt{2}(۴)$$

۱۶- حاصل بسط $(\sqrt{x} + 1)^5$ کدام است؟

$$x^2\sqrt{x} + 5x^2 + 10x\sqrt{x} + 10x + 5\sqrt{x} + 1(۱)$$

$$x^2\sqrt{x} + 5x^2 + x\sqrt{x} + x + 5\sqrt{x} + 1(۲)$$

$$x^2\sqrt{x} + x^2 + x\sqrt{x} + x + \sqrt{x} + 1(۳)$$

$$x^2\sqrt{x} + x^2 + 10x\sqrt{x} + x + 5\sqrt{x} + 1(۴)$$

۱۷- در بسط $(x-2)(x+1)(x+3)(x+4)$ ضریب x^2 کدام است؟

$$1(۱) \quad 4(۲) \quad -4(۳) \quad -1(۴)$$

۱۸- در بسط $(x^5 + 1/x^2)^7$ جمله فاقد x کدام است؟

$$۱) \text{ سوم} \quad ۲) \text{ چهارم} \quad ۳) \text{ پنجم} \quad ۴) \text{ ششم}$$

۱۹- ضریب جمله x^2 در بسط دوجمله‌ای $(3x - 1/2)^8$ کدام است؟

$$\frac{2835}{8}(۱) \quad -\frac{2835}{8}(۲) \quad \frac{2835}{16}(۳) \quad -\frac{2835}{16}(۴)$$

۲۰- اگر مجموع ضرایب $(x+y)^n$ به اندازه ۵۶ واحد بیش از مجموع ضرایب $(x+y)^n$ باشد، مجموع ضرایب $(x+y)^n$ کدام است؟

۲ (۱) ۴ (۲) ۸ (۳) ۱۶ (۴)

تست‌های آزمون کارشناسی ارشد

«دستور دوجمله‌ای»

- تست شماره ۱ آزمون‌های کارشناسی ارشد مجموعه علوم اقتصادی
 - تست‌های شماره ۲ الی ۴ آزمون‌های کارشناسی ارشد مجموعه مدیریت
 - تست‌های شماره ۵ الی ۹ آزمون‌های کارشناسی ارشد حسابداری
- ۱- ضریب جمله x^4 در بسط دوجمله‌ای $(\sqrt{2}x - 1/\sqrt{x})^{10}$ کدام است؟

$\frac{1}{8} C_{10}^{10}$ (۴) $\frac{1}{4} C_{10}^4$ (۳) $\frac{1}{4} C_{10}^6$ (۲) $\frac{1}{6} C_{10}^4$ (۱)

۲- در بسط $(x + 1/x)^8$ عدد ثابت کدام است؟

۶۰ (۴) ۶۴ (۳) ۷۰ (۲) ۸۰ (۱)

۳- ضریب x^2 در بسط دوجمله‌ای $(x + 1/\sqrt{x})^8$ کدام است؟

۸۰ (۴) ۷۲ (۳) ۷۰ (۲) ۶۶ (۱)

۴- در بسط $(x - 1/2x)^8$ مجموع ضرایب کدام است؟

۳۲ (۴) ۲۴ (۳) $\frac{1}{64}$ (۲) $\frac{1}{256}$ (۱)

۵- مجموع ضرایب بسط $(2x - 4/3x)^6$ کدام است؟

$\frac{64}{729}$ (۴) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{32}{243}$ (۲) $\frac{64}{3}$ (۱)

۶- ضریب جمله مستقل از x در بسط $(x^2 - 1/x)^6$ کدام است؟

۲۰ (۴) ۱۵ (۳) -۱۵ (۲) -۲۰ (۱)

۷- ضریب جمله x^4 در بسط دوجمله‌ای $(2x - 1/4)^8$ کدام است؟

$\frac{7}{16}$ (۴) $\frac{7}{32}$ (۳) $\frac{15}{32}$ (۲) $\frac{35}{8}$ (۱)

۸- ضریب جمله x^2 در بسط دوجمله‌ای $(x - 1/2\sqrt{x})^8$ کدام است؟

$\frac{35}{8}$ (۴) $\frac{32}{16}$ (۳) $-\frac{32}{16}$ (۲) $-\frac{35}{8}$ (۱)

۹- در بسط $(x - 1/\sqrt{x})^{10}$ ، ضریب جمله شامل x^2 کدام است؟

۲۴۰ (۴) ۲۱۰ (۳) ۲۰۰ (۲) ۱۸۰ (۱)

مجموعه‌ها

۱-۲ مفهوم مجموعه

مجموعه از مفاهیم اولیه است و مانند سایر مفاهیم اولیه برای آن تعریف کامل ریاضی وجود ندارد. ولی برای نشان دادن آن می‌توان گفت: منظور از مجموعه، گروهی از اشیا یا اشخاص یا حروف یا اعداد یا ... است که کاملاً مشخص و دوه‌دو متمایزند و همه آن‌ها معمولاً در یک خاصیت مشترک‌اند.

هر جمله که دسته‌ای از اشیا یا اعداد یا اشخاص یا ... را معین کند، یک مجموعه نیست، زیرا اعضای یک مجموعه وقتی کاملاً مشخص است که اگر شیء یا فرد دلخواهی را انتخاب کنیم، بتوانیم به‌طور قطع بگوییم که این شیء عضو مجموعه هست یا نیست و جواب نباید به مکان و زمان و سلیقه فرد بستگی داشته باشد.

۲-۲ نمایش مجموعه

طبق قرارداد مجموعه را با یکی از حروف بزرگ الفبای لاتین مانند A و B و C و ... و عناصر مجموعه را با حروف کوچک مانند a و b و c و ... نشان می‌دهند. مجموعه‌ها را معمولاً به سه روش نمایش می‌دهند:

الف- نمایش تفصیلی: اگر عضوهای مجموعه محدود باشد، در میان دو آکولاد یکایک آن‌ها را نام می‌بریم (مسئله ۱).

ب- نمایش با علامت ریاضی: این روش بیان ویژگی‌هایی است که مشخص‌کننده عضوهای مجموعه است (مسئله ۲).

ج- نمایش هندسی (نمودار ون): در این روش مجموعه‌ها را با سطح داخلی یک منحنی بسته نشان می‌دهند.

۳-۲ عضویت (تعلق) و عدم عضویت

هر یک از اشیا، افراد، حروف و ... که یک مجموعه را می‌سازند، عضوی از آن مجموعه نامیده می‌شود. اگر x عضوی از مجموعه A باشد، می‌نویسیم $x \in A$ و می‌خوانیم x متعلق است به مجموعه A . و اگر y عضوی از مجموعه A نباشد، می‌نویسیم $y \notin A$ و می‌خوانیم y متعلق نیست به مجموعه A (مسئله ۸).

۴-۲ مجموعه‌های خاص

$$N = \{1, 2, 3, \dots\}$$

الف- مجموعه اعداد طبیعی

$$Z = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

ب- مجموعه اعداد صحیح نسبی

$$Q = \{x | x = a/b, a, b \in Z, b \neq 0\}$$

ج- مجموعه اعداد گویا

$$R = \{x | -\infty < x < +\infty\}$$

د- مجموعه اعداد حقیقی

۵-۲ مجموعه تهی

اگر مجموعه‌ای دارای عضو نباشد، آن را «تهی» می‌نامند. مجموعه تهی را با علامت ϕ یا $\{\}$ نمایش می‌دهند. لازم به یادآوری است که $\{0\}$ و $\{\phi\}$ تهی نیستند، زیرا هر کدام یک عضو دارند (مسئله ۳).

۶-۲ مجموعه تک‌عضوی

اگر مجموعه‌ای فقط یک عضو داشته باشد، آن را «تک‌عضوی» می‌نامند (مسئله ۴).

۷-۲ زیرمجموعه

مجموعه A را «زیرمجموعه» مجموعه B می‌نامند، هرگاه هر عضو مجموعه A ، عضو مجموعه B نیز باشد و به صورت $A \subset B$ نشان می‌دهند. به بیان ریاضی، مجموعه A را زیرمجموعه مجموعه B می‌خوانند:

$$(\forall x \in A \Rightarrow x \in B) \Leftrightarrow A \subset B$$

بیان هندسی $A \subset B$ چنین است:



اگر A زیرمجموعه مجموعه B نباشد، می‌نویسند $A \not\subset B$. و این به معنی آن است که لافل یک عضو در مجموعه A وجود دارد که در مجموعه B نیست. یا توجه به مطالب فوق نتایج زیر حاصل می‌شود:

- (۱) هر مجموعه زیرمجموعه خودش است، یعنی $A \subset A$.
 - (۲) مجموعه تهی زیرمجموعه هر مجموعه‌ای است، یعنی $\emptyset \subset A$.
 - (۳) اگر $A \subset B$ و $B \subset C$ باشد، نتیجه می‌شود که $A \subset C$ است.
- ✓ اگر $A \subset B$ و $A \neq B$ ، در آن صورت A را زیرمجموعه محض B خوانند. به بیان دیگر، تمام زیرمجموعه‌های یک مجموعه به استثنای خود آن مجموعه را زیرمجموعه محض آن مجموعه گویند.

نکات مهم:

۱- اگر مجموعه A دارای n عضو باشد:

الف- این مجموعه دارای 2^n زیرمجموعه است (مسئله ۵).

ب- این مجموعه دارای $(2^n - 1)$ زیرمجموعه محض است.

ج- این مجموعه دارای C_n^a زیرمجموعه a عضوی است (مسئله ۶).

۲- اگر k عضو به عضوهای یک مجموعه n عضوی اضافه شود، تعداد زیرمجموعه‌های آن 2^k برابر تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه n عضوی می‌گردد.

۳- همواره داریم $N \subset Z \subset Q \subset R$.

۸-۲ مجموعه مرجع (جهانی)

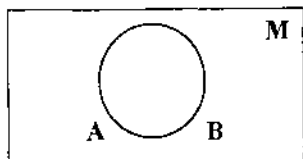
مجموعه مرجع به مجموعه‌ای گفته می‌شود که شامل تمام عضوهای مجموعه‌های مورد بررسی باشد. اگر عناصر یک مجموعه را در نظر بگیریم، می‌توان این مجموعه را زیرمجموعه یک مجموعه کلی‌تر دانست، این مجموعه کلی را مجموعه مرجع یا جهانی می‌نامند و با حرف M نشان می‌دهند. غالباً مجموعه مرجع را به صورت یک مستطیل و سایر مجموعه‌ها را که زیرمجموعه آن است داخل آن رسم می‌کنند.

۹-۲ مجموعه‌های مساوی

دو مجموعه A و B را «مساوی» نامند، هرگاه هر عضو A عضو B بوده و هر عضو B نیز عضو A باشد. به بیان ریاضی، دو مجموعه A و B برابری:

$$(\forall x \in A \Rightarrow x \in B, \forall x \in B \Rightarrow x \in A) \Leftrightarrow A = B$$

بیان هندسی $A = B$ چنین است:



به بیان دیگر، دو مجموعه A و B برابرند اگر و فقط اگر، هر یک زیرمجموعه دیگری باشد، یعنی:

$$(A \subset B, B \subset A) \Leftrightarrow A = B$$

(مسئله ۷)

بنابراین در یک مجموعه، عضو تکراری، عضو جدید به حساب نمی‌آید. هر عضو تنها یک بار نوشته می‌شود و اگر در مجموعه‌ای یک یا چند عضو، دو یا چند بار تکرار شده باشند، می‌توان از عضوهای تکراری صرف‌نظر کرد. با توجه به مطالب فوق نتایج زیر حاصل می‌شود:

(۱) هر مجموعه با خودش برابر است، یعنی $A = A$.

(۲) اگر $A = B$ باشد، نتیجه می‌شود که $B = A$.

(۳) اگر $A = B$ و $B = C$ باشد، نتیجه می‌شود که $A = C$ است.

۱۰-۲ مجموعه‌های هم‌ارز

دو مجموعه A و B را «هم‌ارز یا معادل» نامند، هرگاه تعداد عضوهای آن‌ها با هم برابر باشند. طبق قرارداد تعداد عضوهای مجموعه A را با $n(A)$ نمایش می‌دهند. پس:

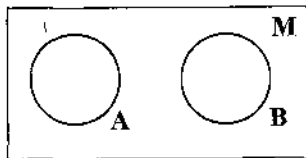
$$n(A) = n(B) \Leftrightarrow A \simeq B$$

۱۱-۲ مجموعه‌های جدا از هم

دو مجموعه A و B را «جدا از هم» نامند، هرگاه هیچ عضو مشترکی نداشته باشند، به بیان ریاضی:

$$A \text{ و } B \text{ جدا از هم} \Leftrightarrow \nexists x \in B | x \in A \text{ یا } \nexists x \in A | x \in B$$

بیان هندسی دو مجموعه جدا از هم A و B چنین است:



۱۲-۲ مجموعه مجموعه‌ها

مجموعه‌ای که اعضای آن خود، مجموعه باشند، «مجموعه مجموعه‌ها» گویند. مانند $\{\{a, b\}, \{b, c\}\}$ ، (مسائل ۹ و ۱۰).

۱۳-۲ مجموعه توانی

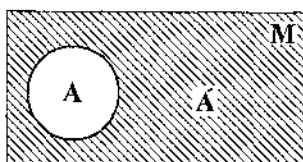
مجموعه‌ای که عناصرش تمامی زیرمجموعه‌های یک مجموعه باشند، «مجموعه توانی» نامند. مجموعه توانی را با $P(A)$ نمایش می‌دهند (مسئله ۱۱).

۱۴-۲ مجموعه متمم

اگر M مجموعه مرجع و مجموعه A یکی از زیرمجموعه‌های آن باشد، مجموعه‌ای را که شامل همه عضوهای M غیر از عضوهای مجموعه A باشد، «متمم مجموعه A » می‌نامیم و با A' نمایش می‌دهیم. بیان ریاضی متمم مجموعه A چنین است:

$$A' = \{x | x \in M, x \notin A\} \quad \text{یا} \quad A' = M - A$$

بیان هندسی متمم مجموعه A چنین است:



(مسائل ۱۲ و ۱۹)

با توجه به مطالب فوق نتایج زیر حاصل می‌شود:

(۱) متمم متمم هر مجموعه برابر با خود آن مجموعه است، یعنی $(A')' = A$.

(۲) متمم مجموعه تهی برابر با مجموعه مرجع است، یعنی $\phi' = M$.

(۳) متمم مجموعه مرجع برابر با مجموعه تهی است، یعنی $M' = \phi$.

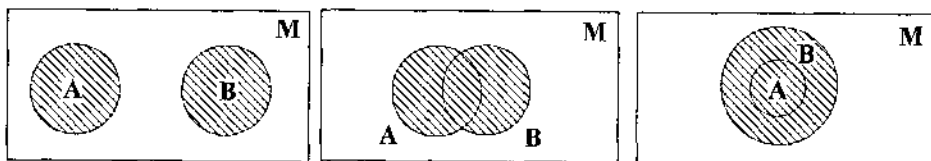
(۴) اگر $A = B$ باشد، نتیجه می‌شود که $A' = B'$.

۱۵-۲ اجتماع مجموعه‌ها

اجتماع دو مجموعه A و B مجموعه جدیدی است که هر عضو آن به مجموعه A یا مجموعه B یا هم به A و هم به B تعلق داشته باشد. به بیان دیگر هر عضو $A \cup B$ حداقل به یکی از دو مجموعه A و B تعلق دارد. بیان ریاضی $A \cup B$ چنین است:

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ یا } x \in B\}$$

بیان هندسی $A \cup B$ چنین است:



با توجه به مطالب فوق نتایج زیر حاصل می‌شود:

۱) $A \cup A = A$

۲) $A \cup \phi = A$

۳) $A \cup M = M$

۴) $A \cup A' = M$

۵) $A \subset (A \cup B)$

۶) $B \subset (A \cup B)$

۷) $A \subset B \Rightarrow A \cup B = B$

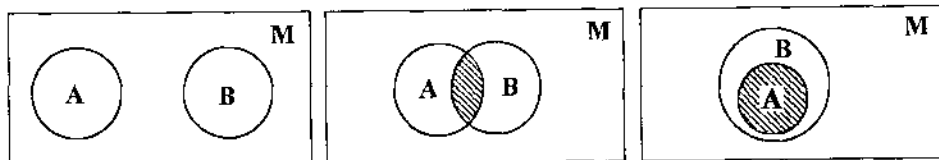
(مسائل ۱۵ و ۱۷)

۱۶-۲ اشتراک مجموعه‌ها

اشتراک دو مجموعه A و B مجموعه جدیدی است که هر عضو آن هم به A و هم به B تعلق داشته باشد. بیان ریاضی $A \cap B$ چنین است:

$$A \cap B = \{x | x \in A, x \in B\}$$

بیان هندسی $A \cap B$ چنین است:



با توجه به مطالب فوق نتایج زیر حاصل می‌شود:

- ۱) $A \cap A = A$ ۲) $A \cap \phi = \phi$ ۳) $A \cap M = A$
 ۴) $A \cap A' = \phi$ ۵) $(A \cap B) \subset A$ ۶) $(A \cap B) \subset B$
 ۷) $A \subset B \Rightarrow A \cap B = A$

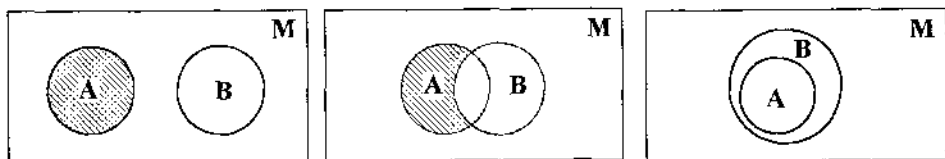
(مسألة ۱۳)

۱۷-۲ تفاضل مجموعه‌ها

تفاضل دو مجموعه A و B مجموعه جدیدی است که عناصرش به A تعلق داشته باشد، ولی به B تعلق نداشته باشد. بیان ریاضی $A - B$ چنین است:

$$A - B = \{x | x \in A, x \notin B\} \quad \text{یا} \quad A - B = A \cap B'$$

بیان هندسی $A - B$ چنین است:



(مسائل ۱۴ و ۱۶ و ۱۸)

۱۸-۲ جبر مجموعه‌ها

جبر مجموعه‌ها، مجموعه قوانینی است که بین دو یا چند مجموعه ارتباط برقرار می‌کند. قوانین جبر مجموعه‌ها را در زیر خلاصه می‌کنیم:

۱) قانون جابه‌جایی:

$$A \cap B = B \cap A \quad \text{بد}$$

$$A \cup B = B \cup A \quad \text{الف}$$

۲) قانون شرکت‌پذیری:

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \quad \text{بد}$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \quad \text{الف}$$

(۳) قانون توزیع پذیری:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad \text{ب-} \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

(۴) قانون جذب:

$$A \cap (A \cup B) = A \quad \text{ب-} \quad A \cup (A \cap B) = A$$

(۵) قانون شبه جذب:

$$A \cap (A' \cup B) = A \cap B \quad \text{ب-} \quad A \cup (A' \cap B) = A \cup B$$

(۶) قانون دمورگان:

$$(A \cap B)' = A' \cup B' \quad \text{ب-} \quad (A \cup B)' = A' \cap B'$$

(مسائل ۲۰ و ۲۱)

۲-۱۹ عدد اصلی مجموعه

تعداد عضوهای یک مجموعه را «عدد اصلی» آن مجموعه گویند. عدد اصلی اجتماع دو یا سه مجموعه چنین است:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) - n(A \cap B \cap C)$$

(مسألة ۲۳)

۲-۲۰ اجتماع و اشتراک چند مجموعه

به طور کلی اجتماع و اشتراک n مجموعه A_1 و A_2 و A_3 و ... و A_n چنین نشان داده می‌شود:

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^n A_i = \bigcup_{i \in I} A_i$$

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^n A_i = \bigcap_{i \in I} A_i$$

در روابط فوق مجموعه $I = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ را مجموعه اندیکس می‌گویند (مسألة ۲۲). قوانین دمورگان برای اجتماع و اشتراک چند مجموعه هم برقرار است، یعنی:

$$\left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right)' = \bigcap_{i=1}^n A_i' \quad , \quad \left(\bigcap_{i=1}^n A_i \right)' = \bigcup_{i=1}^n A_i'$$

۲-۲۱ افزای مجموعه‌ها

اعضای یک مجموعه را می‌توان به زیرمجموعه‌هایی که دوه‌دو از هم جدا باشند، تشکیل کرد. فرض می‌کنیم A یک مجموعه غیرتهی بوده و زیرمجموعه‌های A را به A_1 و A_2 و ... و A_n نشان دهیم. مجموعه B شامل تعداد محدودی از زیرمجموعه‌های مجموعه A را یک افزای مجموعه A نامند، هرگاه داشته باشیم:

اولاً: هر عضو مجموعه B زیرمجموعه غیرتهی از A باشد.ثانیاً: اشتراک هر دو عضو مجموعه B تهی باشد.ثالثاً: اجتماع عضوهای مجموعه B ، مجموعه A را به وجود آورد.

۲-۲۲ تناظر یک به یک

بین دو مجموعه A و B یک تناظر یک به یک وجود دارد، هرگاه بتوان به هر عضو A تنها یک و تنها یک عضو از B و به هر عضو B یک و تنها یک عضو از A را نسبت داد.

۲-۲۳ زوج مرتب

یک زوج مرتب مستعمل بر دو عنصر a و b است، که به صورت (a, b) نمایش داده می‌شود. a را مؤلفه (مختص) اول و b را مؤلفه (مختص) دوم می‌نامند. زوج مرتب یک دوتایی است که جای مؤلفه‌های اول و دوم آن را نمی‌توان عوض کرد. دو زوج مرتب (a, b) و (c, d) هنگامی و فقط هنگامی با هم برابرند که مؤلفه اول آن‌ها مثل هم و مؤلفه دوم آن‌ها نیز مثل هم باشند، یعنی:

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c, b = d$$

اگر در یک پانزده مؤلفه قرار دهیم و برای آن‌ها ترتیب در نظر بگیریم، (a_1, a_2, a_3) ، آن را سه‌تایی مرتب و ... به همین ترتیب n تایی مرتب، $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ ، می‌گوییم و بنا به تعریف دو n تایی مرتب هنگامی و فقط هنگامی با هم برابرند که مؤلفه‌های متناظر آن با هم برابر باشند. یعنی:

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) = (b_1, b_2, \dots, b_n) \Leftrightarrow a_i = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

(مسئله ۲۴)

۲-۲۴ ضرب دکارتی دو مجموعه

حاصل ضرب دکارتی دو مجموعه A و B که با $A \times B$ نمایش داده می‌شود، برابر است با مجموعه‌ای مستعمل بر تمام زوج‌های مرتب (a, b) به‌طوری که مؤلفه اول آن متعلق به A و مؤلفه دوم آن متعلق به B باشد. یعنی:

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$$

حاصل ضرب دو مجموعه را می‌توان برای n مجموعه تعمیم داد. به‌طور کلی اگر n مجموعه A_1 و A_2 و ... و A_n مفروض باشند، حاصل ضرب این n مجموعه به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) | x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \dots, x_n \in A_n\}$$

(مسئله ۲۵)

نکات مهم:

۱- هرگاه A و B دو مجموعه غیرتهی باشند، در حالت کلی $A \times B \neq B \times A$ است.

۲- $A \times \phi = \phi$ و $\phi \times A = \phi$ تعریف می‌شود.

۳- اگر $n(A) = \alpha$ و $n(B) = \beta$ باشد، $n(A \times B) = \alpha \times \beta$ خواهد بود.

۴- عمل ضرب دکارتی روی اشتراک و تفاضل از طرف چپ و از طرف راست توزیع پذیر می‌باشد داریم:

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$

$$(B \cap C) \times A = (B \times A) \cap (C \times A)$$

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$

$$(B \cup C) \times A = (B \times A) \cup (C \times A)$$

$$A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$$

$$(B - C) \times A = (B \times A) - (C \times A)$$

۵- هرگاه مجموعه‌های $A \times B$ و $B \times A$ را داشته باشیم، آن‌گاه:

$$n[(A \times B) \cap (B \times A)] = [n(A \cap B)]^2$$

$$n[(A \times B) \cup (B \times A)] = 2n(A) \cdot n(B) - [n(A \cap B)]^2$$

$$n[(A \times B) - (B \times A)] = n(A) \cdot n(B) - [n(A \cap B)]^2$$

مسائل نمونه فصل ۲

۱. مجموعه $A = \{x | x = n^2 - n, n \in N, x \leq 10\}$ را به صورت تفصیلی نمایش دهید.

۲. مجموعه $B = \{3, 10, 29, 66, \dots\}$ را با علامت ریاضی نمایش دهید.

(۳-۴). کدام یک از مجموعه‌های زیر تهی و کدام یک تک‌عضوی است.

$$A = \{x | x^2 + 1 = 0, x \in \mathbb{R}\} \quad (۳) \quad B = \{x | x^2 + x^2 + 3x = 0, x \in \mathbb{R}\} \quad (۴)$$

(۵-۶). مجموعه $C = \{1, 2, \{3, 4\}\}$ مفروض است:

(۵) مجموعه C چند زیرمجموعه دارد. (۶) مجموعه C چند زیرمجموعه ۲ عضوی دارد.

۷. آیا «مجموعه عددهای بخش پذیر بر ۱۰» و «مجموعه عددهایی که به صفر ختم شده‌اند» با هم برابرند؟

(۸-۱۰). کدام یک از رابطه‌های زیر درست و کدام نادرست است؟

$$\{3, 5\} \subset \{\{3, 5\}, 5\} \quad (۱۰) \quad \{\{\emptyset\}\} \subset \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \quad (۹) \quad \{1, 2\} \in \{\{1\}, \{2, 3\}\} \quad (۸)$$

۱۱. مجموعه توانی $A = \{2, \{1, 3\}\}$ را بنویسید.

(۱۲-۱۶). فرض می‌کنیم $M = \{1, 2, 3, \dots, 7\}$ ، مجموعه مرجع و $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ و $B = \{1, 3, 5, 7\}$

و $C = \{2, 5, 6, 7\}$ زیرمجموعه‌های آن باشد، مطلوب است یافتن:

$$(A - C)' \quad (۱۶) \quad B' \cup C \quad (۱۵) \quad A' - B \quad (۱۴) \quad A \cap B \quad (۱۳) \quad A' \quad (۱۲)$$

(۱۷-۱۹). مجموعه‌های زیر مفروضند:

$$A = \{x | 1 \leq x < 3\}, B = \{x | -\infty < x < 1\}$$

به طوری که $A, B \subset \mathbb{R}$ است، مجموعه‌های زیر را تعیین کنید:

$$(A \cap B)' \quad (۱۹) \quad A - B \quad (۱۸) \quad A \cup B \quad (۱۷)$$

(۲۰-۲۱). درستی رابطه‌های زیر را بررسی کنید:

$$A \cap (A' \cup B) = A \cap B \quad (۲۱) \quad (A \cup B) - B = A - B \quad (۲۰)$$

۲۲. اگر $A_1 = \{1, 8\}$ و $A_2 = \{2, 4, 6, 8\}$ و $A_3 = \{3, 6\}$ و $A_4 = \{5, 7\}$ باشد، آنگاه $\bigcap_{i=1}^n A_i$ و $\bigcup_{i=1}^n A_i$ را تعیین کنید.

۲۳. در یک کلاس ۲۰ نفری، ۱۴ نفر شطرنج و ۱۰ نفر تنیس بازی می‌کنند و ۲ نفر هم از ورزش معاف هستند، چند نفر هم شطرنج و هم تنیس بازی می‌کنند.

۲۴. اگر زوج‌های مرتب $(a - b, 3)$ و $(6, 2a + b)$ برابر باشند، a و b را بیابید.

۲۵. اگر $A = \{x | 2 \leq x \leq 4\}$ و $B = \{x | 3 \leq x < 6\}$ باشد و $A, B \subset \mathbb{N}$ ، $(A - B) \times A$ را بیابید.

پاسخ مسائل نمونه فصل ۲

۱.

$$n = 1 \Rightarrow x = 1 - 1 = 0, n = 2 \Rightarrow x = 4 - 2 = 2, \dots, n = 4 \Rightarrow x = 16 - 4 = 12$$

$$A = \{0, 2, 6\}$$

۲.

$$3 = 1^2 + 2, 10 = 2^2 + 2, 29 = 3^2 + 2, \dots \Rightarrow B = \{x | x = n^2 + 2, n \in \mathbb{N}\}$$

۳.

$$x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow A = \{\}$$

۴.

$$x^2 + x^1 + 3x = 0 \Rightarrow x(\underbrace{x^1 + x + 3}_{\Delta < 0}) = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow B = \{0\}$$

۵.

$$2^7 = 8 = \text{تعداد زیرمجموعه‌ها}$$

۶.

$$C_7^2 = \frac{7!}{2!5!} = 3 = \text{تعداد زیرمجموعه‌های ۲ عضوی}$$

۷. بله

۸. نادرست

۹. درست

۱۰. نادرست

۱۱.

$$P(A) = \{\phi, \{2\}, \{\{1, 3\}\}, \{2, \{1, 3\}\}\}$$

۱۲.

$$A' = \{6, 7\}$$

۱۳.

$$A \cap B = \{1, 3, 5\}$$

۱۴.

$$A' - B = \{6, 7\} - \{1, 3, 5, 7\} = \{6\}$$

۱۵.

$$B' = \{2, 4, 6\} \quad B' \cup C = \{2, 4, 5, 6, 7\}$$

۱۶

$$A - C = \{1, 3, 4\} \Rightarrow (A - C)' = \{2, 5, 6, 7\}$$

۱۷

$$A \cup B = \{x | -\infty < x < 2\}$$

۱۸

$$B' = \{x | 1 \leq x < +\infty\}, A - B = A \cap B' = \{x | 1 \leq x < 2\}$$

۱۹

$$A \cap B = \phi \Rightarrow (A \cap B)' = \phi' = M = \mathbb{R}$$

۲۰

$$(A \cup B) - B = (A \cup B) \cap B' = (A \cap B') \cup (B \cap B') = (A \cap B') \cup \phi = A \cap B' = A - B$$

۲۱

$$A \cap (A' \cup B) = (A \cap A') \cup (A \cap B) = \phi \cup (A \cap B) = A \cap B$$

۲۲. مجموعه اندیکس $I = \{1, 2, 3, 4\}$ بوده داریم:

$$\bigcup_{i=1}^4 A_i = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 = \{1, 2, 3, \dots, 8\}, \bigcap_{i=1}^4 A_i = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 = \{\}$$

۲۳

$$(14 - x) + x + (10 - x) + 2 = 20$$

$$-x = -6 \Rightarrow x = 6$$

۲۴

$$\begin{cases} a - b = 6 \\ 2a + b = 3 \end{cases} \Rightarrow 3a = 9 \Rightarrow a = 3, 2 - b = 6 \Rightarrow b = -2$$

۲۵

$$A = \{2, 3, 4\} \quad B = \{3, 4, 5\}$$

$$A - B = \{2\} \quad (A - B) \times A = \{(2, 2), (2, 3), (2, 4)\}$$

سؤالات تستی فصل ۲

۱- کدام یک از رابطه‌های زیر نادرست است؟

$$\{ \} \subset \{a, a\} \quad (4) \quad a \in \{\{a\}, b\} \quad (3) \quad \{a\} \subset \{a, b\} \quad (2) \quad \{a\} \neq \{\{a\}\} \quad (1)$$

۲- کدام یک از مجموعه‌های زیر تک‌عضوی است؟

$$B = \{x | x^2 + 2x^2 + 1 = 0, x \in \mathbb{R}\} \quad (2) \quad A = \{x | x^2 < 0, x \in \mathbb{R}\} \quad (1)$$

$$D = \{x | 5x^2 - 6x + 1 = 0, x \in \mathbb{R}\} \quad (4) \quad C = \{x | 4x^2 + 10x^2 + 19x = 0, x \in \mathbb{R}\} \quad (3)$$

۳- کدام یک از مجموعه‌های زیر تهی نیستند؟

(۱) کسرهای بین ۰ و ۱ که مخرج آن‌ها ۳ باشد. (۲) مجموعه ریشه‌های حقیقی معادله $x^4 + 26x^2 + 25 = 0$.

(۳) عددهای بخش‌پذیر بر ۶ و غیربخش‌پذیر بر ۳. (۴) مجموعه ریشه‌های طبیعی معادله $x^2 + 1 = 0$.

۴- A را زیرمجموعه محض مجموعه B خوانند، هرگاه:

(۱) $A = B$ و $A \subset B$ (۲) $A \neq B$ و $A \subset B$ (۳) $A = B$ و $B \subset A$ (۴) $A \neq B$ و $B \subset A$

۵- تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه $(2n + 1)$ عضوی ۱۶ زیرمجموعه بیش‌تر از تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه

$(2n)$ عضوی است، عدد طبیعی n کدام است؟

(۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۶- اگر $A = \{2, 3, 4, 5\}$ و $B = \{x | x = 2k, k \in N\}$ باشد، کدام رابطه صحیح است؟

(۱) $A = B$ (۲) $A \subset B$ (۳) $A \not\subset B$ (۴) $A - B = \phi$

۷- مجموعه $A = \{x | 0 < x < 24, x = 4k, k \in N\}$ چند زیرمجموعه دارد؟

(۱) ۳۲ (۲) ۶۴ (۳) ۲۱۲ (۴) بی‌شمار

۸- مجموعه $\{\{1\}, \{2\}\}$ چند زیرمجموعه دارد؟

(۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۱ (۴) ۸

۹- اگر به مجموعه E چهار عضو اضافه شود، تعداد زیرمجموعه‌های آن چند برابر می‌شود؟

(۱) ۴ (۲) ۸ (۳) ۱۶ (۴) ۳۲

۱۰- اگر مجموعه E از مجموعه F یک عضو بیش‌تر داشته باشد و اختلاف زیرمجموعه‌های آن‌ها ۳۲ باشد، مجموعه F

چند عضوی است؟

(۱) ۶ (۲) ۴ (۳) ۳ (۴) ۵

۱۱- اگر مجموعه A دارای n عضو باشد، مجموعه توانی A ، $P(A)$ ، چند زیرمجموعه دارد؟

(۱) n^2 (۲) 2^{2n} (۳) 2^{n^2} (۴) 2^n

۱۲- اگر $A \cap B = \phi$ باشد، آن‌گاه:

(۱) $A \subset B$ (۲) $B \subset A$ (۳) $A' \subset B'$ (۴) $A \subset B'$

۱۳- کدام یک از حالت‌های زیر هم‌ارز با $A \subset B$ می‌باشد؟

(۱) $A \cap B' = \phi$ (۲) $B' \subset A'$ (۳) $B \cup A' = M$ (۴) همه موارد ۱ و ۲ و ۳

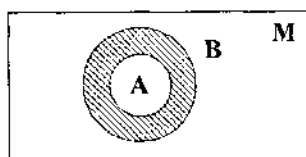
۱۴- اگر به ازای هر دو مجموعه A و B داشته باشیم $(A \cup B) \subset (A \cap B')$ ، آن‌گاه کدام یک از رابطه‌های زیر همواره

برقرار است؟

(۱) $A = \phi$ (۲) $A' = B$ (۳) $B = \phi$ (۴) $A = B'$

۱۵- بین x و y چه رابطه‌ای برقرار باشد، تا دو مجموعه $\{1, x, x^2\}$ و $\{y, y^2\}$ با یکدیگر منسوی باشند؟

(۱) $x = y$ (۲) $x = y = 2$ (۳) $x = y = 0$ (۴) $x = y = \pm 1$



۱۶- نمودار مقابل بیان هندسی کدام عبارت است؟

(۱) $A - B$ (۲) $B - A'$ (۳) $A' - B'$ (۴) $B' - A'$

۱۷- اگر A و B دو مجموعه باشند، $A' - B$ کدام است؟

$$B' - A \quad (۴) \quad B - A \quad (۳) \quad A' - B' \quad (۲) \quad A \cap B' \quad (۱)$$

۱۸- هرگاه $A \subset B \subset C$ ، آن‌گاه $A \cup B$ کدام است؟

$$B - C \quad (۴) \quad \phi \quad (۳) \quad B \cap C \quad (۲) \quad A \cap C \quad (۱)$$

۱۹- اگر A و B دو مجموعه جدا از هم باشند، حاصل $A \cap (A' \cup B)$ کدام است؟

$$\phi \quad (۴) \quad B \quad (۳) \quad A \quad (۲) \quad A' \quad (۱)$$

۲۰- اگر $A - B = B - A$ باشد، آن‌گاه:

$$A = M \quad (۴) \quad B = \phi \quad (۳) \quad A = \phi \quad (۲) \quad A = B \quad (۱)$$

۲۱- هرگاه $A - B = A$ باشد، آن‌گاه $B - A$ برابر است با:

$$M \quad (۴) \quad B' \quad (۳) \quad B \quad (۲) \quad A' \quad (۱)$$

۲۲- اگر $A \cap B = B$ و $B \cap C = C$ باشد، کدام یک از رابطه‌های زیر درست است؟

$$A \subset B \subset C \quad (۴) \quad A \subset C \subset B \quad (۳) \quad A = B = C \quad (۲) \quad C \subset B \subset A \quad (۱)$$

۲۳- اگر مجموعه مرجع اعداد طبیعی و $A' = \{n | n \geq 5\}$ و $B = \{2, 4, 7\}$ باشد، آن‌گاه $A \cup B$ برابر کدام است؟

$$\{2, 3, 4\} \quad (۴) \quad \{1, 2, 3, 4\} \quad (۳) \quad \{1, 2, 3, 4, 7\} \quad (۲) \quad \{1, 2, 3, 4, 5, 7\} \quad (۱)$$

۲۴- هرگاه $A \subset B$ و $A \subset B'$ باشد، کدام حکم زیر درست است؟

$$B = \phi \quad (۴) \quad A = M \quad (۳) \quad B = M \quad (۲) \quad A = \phi \quad (۱)$$

۲۵- کدام رابطه زیر نادرست است؟

$$(A \cup B)' - C = (A \cup B \cup C)' \quad (۲) \quad (A \cup B \cup C)' = A' \cap B' \cap C' \quad (۱)$$

$$A - B = B' - A' \quad (۴) \quad (A - B) \cap B = A \quad (۳)$$

۲۶- اگر $A = \{x | 0 \leq x < 2\}$ و $B = \{x | -1 \leq x \leq 1\}$ به‌طوری که $A, B \subset \mathbb{R}$ است، آن‌گاه $A - B$ کدام است؟

$$\{x | 1 \leq x \leq 2\} \quad (۱) \quad \{x | 1 < x < 2\} \quad (۲) \quad \{x | 1 \leq x < 2\} \quad (۳) \quad \{x | 1 < x \leq 2\} \quad (۴)$$

۲۷- اگر $A = \{x | x \geq 2\}$ و $B = \{x | x \leq -2\}$ به‌طوری که $A, B \subset \mathbb{R}$ است، آن‌گاه $A' \cap B'$ کدام است؟

$$\{x | -2 < x \leq 2\} \quad (۱) \quad \{x | -2 \leq x \leq 2\} \quad (۲) \quad \{x | -2 \leq x < 2\} \quad (۳) \quad \{x | -2 < x < 2\} \quad (۴)$$

۲۸- اگر $A = \{x | 0 < x \leq 3, x \in \mathbb{R}\}$ و $B = \{x | -1 < x \leq 1, x \in \mathbb{R}\}$ باشد، حاصل $(A \cup B)'$ کدام است؟

$$\{x | x \leq -1 \text{ یا } x > 3\} \quad (۱) \quad \{x | -1 \leq x \leq 3\} \quad (۲)$$

$$\{x | x < -1 \text{ یا } x \geq 3\} \quad (۳) \quad \{x | -1 < x < 3\} \quad (۴)$$

۲۹- اگر $A_i = \{x | -i \leq x \leq i, x \in \mathbb{Z}\}$ ، آن‌گاه $\bigcap_{i=1}^n A_i$ کدام است؟

$$\{x | -1 \leq x \leq 1\} \quad (۱) \quad \{x | -1 < x < 1\} \quad (۲) \quad \{-1, 0, 1\} \quad (۳) \quad \{-2, -1, 0, 1, 2\} \quad (۴)$$

۳۰- اگر $A_k = \{x | 1/k \leq x \leq 2/k, k \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}\}$ باشد، $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ کدام است؟

$$(0, 2) \quad (۱) \quad (0, 2] \quad (۲) \quad [0, 1) \quad (۳) \quad [0, 2] \quad (۴)$$

۳۱- اگر $A = \{x | 0 < x \leq 5\}$ و $B = \{x | 3 < x \leq 6\}$ باشد و $A, B \subset \mathbb{N}$ ، $(A \cap B) - A$ چند عضو دارد؟

$$1 \quad (۱) \quad 2 \quad (۲) \quad 3 \quad (۳) \quad 4 \quad (۴) \quad \text{هیچ‌کدام}$$

۳۲- مجموعه مقسوم علیه‌های عدد ۸، B مجموعه ریشه‌های معادله $x^3 + 2x^2 - 8x = 0$ و C مجموعه اعداد فرد که در نامساوی $1 \leq x < 9$ صدق می‌کند، کدام تسنوی نادرست است؟

$$A \cap (B \cap C) = \phi \quad (2) \quad A - B = \{1, 4, 8\} \quad (1)$$

$$A - (B - C) = \{1, 4, 8\} \quad (4) \quad A \cap (B \cup C) = \{1\} \quad (3)$$

۳۳- اگر $A = \{x | 1 \leq x \leq 2\}$ و $B = \{y | 0 \leq y \leq 1\}$ باشد و $A, B \subset \mathbb{R}$ ، آنگاه $A \times B$ دارای عضو صفر نیست. (۲) دارای دو عضو است. (۴) دارای بی‌نهایت عضو است. (۱)

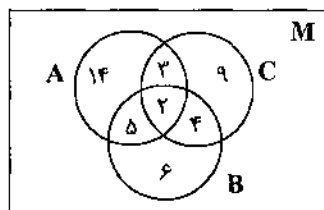
۳۴- اگر $A = \{a, b\}$ و $B = \{1, 3\}$ و $C = \{1, 4\}$ باشد، حاصل $A \times (B \cap C)$ کدام است؟
 $\{(a, 1)\}$ (۴) $\{(1, a), (1, b)\}$ (۳) $\{(a, 1), (b, 1)\}$ (۲) $\{\}$ (۱)

۳۵- هرگاه $A = \{a, b, c\}$ و $B = \{a, b, d, e\}$ باشد، تعداد عضوهای $(A \times B) \cap (B \times A)$ کدام است؟
 ۴ (۴) ۱۶ (۳) ۸ (۲) ۲ (۱)

۳۶- اگر $A = \{x | 0 \leq x < +\infty\}$ و $B = \{y | -\infty < y \leq 0\}$ باشد، $A \times B$ کلیه نقاط واقع در ... است.
 ناحیه اول (۱) ناحیه دوم (۲) ناحیه سوم (۳) ناحیه چهارم (۴)

۳۷- مجموعه $A = \{a, b, c\}$ چند افزار دارد که هر یک حداقل دو عضو داشته باشد؟

$$4 \quad (4) \quad 3 \quad (3) \quad 2 \quad (2) \quad 1 \quad (1)$$



۳۸- در شکل مقابل مجموعه مرجع (M) را با 50° عضو انتخاب کرده‌ایم، کدام $n(A \cup B \cup C)$ است؟
 ۵ (۲) ۶ (۱) ۷ (۴) ۹ (۳)

۳۹- حاصل $(A - B) \cup (A \cap B)$ کدام است؟

$$\phi \quad (4) \quad A' \quad (3) \quad B \quad (2) \quad A \quad (1)$$

۴۰- مجموعه $(C - E) \cap (A - B) \cap (A - C) \cap (B - D)$ برابر است با:

$$E \cap D \quad (4) \quad A \cap B \quad (3) \quad M \quad (2) \quad \phi \quad (1)$$

۴۱- اگر $A \cap B = \phi$ باشد، آنگاه $(A - B) \cup (B - A)$ کدام است؟

$$M \quad (4) \quad A \cup B \quad (3) \quad A' - B' \quad (2) \quad A - B \quad (1)$$

۴۲- حاصل $A \cap [(B \cap A') \cup B]$ کدام است؟

$$A' \cup B \quad (4) \quad A' \cap B \quad (3) \quad A \cup B \quad (2) \quad A \cap B \quad (1)$$

۴۳- حاصل $(A \cup B' \cup C') \cap [A \cup (B \cap C)]$ کدام است؟

$$B \quad (4) \quad A - B \quad (3) \quad A \quad (2) \quad \phi \quad (1)$$

۴۴- کدام یک از روابط زیر نادرست است؟

$$(A' \cap B') \cup (A \cup B) = M \quad (2) \quad (A' \cap B') \cap (A \cup B) = \phi \quad (1)$$

$$(A - B) \cap B = M \quad (4) \quad (A' \cap B') - M = \phi \quad (3)$$

۴۵- اگر $A \subset B$ باشد، در این صورت $A \cup (B \cap A')$ کدام است؟

(۱) ϕ (۲) B (۳) A (۴) A'

۴۶- حاصل $(A' \cap B')' \cap (A' \cap B)'$ کدام است؟

(۱) B (۲) A' (۳) B' (۴) A

۴۷- حاصل $[(A - B) \cup (B - A)] \cup (A \cap B)$ کدام است؟

(۱) $A \cap B$ (۲) $A - B'$ (۳) $A' \cap B'$ (۴) $A \cup B$

۴۸- حاصل $(A \cap B \cap C) \cup (A' \cap C) \cup (B' \cap C)$ کدام است؟

(۱) C (۲) A (۳) B (۴) $(A \cap B \cap C)'$

۴۹- $(B - A) \cup (A - B')$ کدام است؟

(۱) ϕ (۲) A (۳) $A \cup B$ (۴) B

۵۰- حاصل $[A \cup (A \cap B)] - [B \cap (B \cup A)]$ کدام است؟

(۱) $A \cap B$ (۲) $A \cap B'$ (۳) $A \cup B$ (۴) $A \cup B'$

۵۱- اگر A' متمم مجموعه A باشد، کدام یک از مجموعه‌های زیر تهی است؟

(۱) $A \cap A'$ (۲) $A - A'$ (۳) $A \cup A$ (۴) $A' - A$

۵۲- اگر A دارای ۴ عضو و B دارای ۵ عضو و $A \cup B$ دارای ۸ عضو، آنگاه $A \cap B$ چند عضو دارد؟

(۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۳ (۴) ۱

۵۳- در یک کلاس ۴۰ نفری، ۳۲ نفر در درس ریاضی و ۲۴ نفر در درس آمار تجدید آورده‌اند و فقط ۴ نفر قبول شده‌اند، چند نفر در هر دو درس تجدید شده‌اند؟

(۱) ۲۰ (۲) ۱۲ (۳) ۲۴ (۴) ۱۸

۵۴- A و B و C سه مجموعه هستند به قسمی که $A \cap B = A \cap C = B \cap C = \phi$ و $n(A) = 5$ و $n(B) = 6$ و $n(A \cup B \cup C) = 10$ کدام است؟

(۱) ۱۵ (۲) ۱۶ (۳) ۱۸ (۴) ۲۱

۵۵- مجموعه $A = \{x | x^2 - 4x = 0, x \in \mathbb{R}\}$ با کدام یک از مجموعه‌های زیر در تناظر یک به یک است؟

(۱) $\{2, -2\}$ (۲) $\{a, b, c\}$ (۳) $\{0, 1, 2, -2\}$ (۴) هیچ کدام

۵۶- هرگاه زوج مرتب $(2x - y, 6)$ و $(3, x + 4y)$ برابر باشند، x و y کدام است؟

(۱) $y = 2, x = 1$ (۲) $y = 2, x = 2$ (۳) $y = 1, x = -2$ (۴) $y = 1, x = 2$

۵۷- هرگاه سه تایی مرتب $(2b, 4, a - 2)$ و $(3 - a, a + b, c - 1)$ برابر باشند، a و b و c کدام است؟

(۱) $a = 1, b = 5, c = -4$ (۲) $a = 5, b = -1, c = 4$

(۳) $a = -1, b = 2, c = 3$ (۴) $a = -5, b = 1, c = 4$

۵۸- مجموعه $\{(a, b) | 3a + b = 6\} \cap \{(a, b) | a + b = 6\}$ برابر است با:

(۱) $\{(0, 6)\}$ (۲) $\{(6, 0)\}$ (۳) $\{\}$ (۴) $\{(3, 3)\}$

۵۹- اگر $(2, 3)$ یک زوج مرتب و $\{2, 3\}$ یک مجموعه باشد، کدام یک از تسوئیه‌های زیر درست است؟

$$\{2, 3\} = \{3, 2\} \quad (1) \quad \{2, 3\} = (2) \quad (2, 2) = (2) \quad (3, 2) = (2, 3) \quad (3) \quad \{3, 2\} = \{2, 3\} \quad (4)$$

۶۰- اگر $A = \{x\}$ باشد، مجموعه A^2 کدام است؟

$$\{x^2\} \quad (1) \quad \{x, x\} \quad (2) \quad \{(x, x)\} \quad (3) \quad \{(x)\} \quad (4)$$

۶۱- اگر $x \in (A - B)$ باشد، داریم:

$$x \in A \text{ و } x \in B \quad (1) \quad x \in A \text{ و } x \notin B' \quad (2) \quad x \in A \text{ یا } x \notin B \quad (3) \quad x \in A \text{ و } x \notin B \quad (4)$$

۶۲- اگر A و B دو مجموعه غیرتهی و $A - B = A$ ، آنگاه $B \cap A'$ با کدام مجموعه برابر است؟

$$A \quad (1) \quad B \quad (2) \quad M \quad (3) \quad \phi \quad (4)$$

۶۳- اگر مجموعه A دارای ۶۳ زیرمجموعه محض باشد، چند زیرمجموعه سه‌عضوی دارد؟

$$10 \quad (1) \quad 20 \quad (2) \quad 64 \quad (3) \quad 12 \quad (4)$$

۶۴- حاصل $[(A - B') \cup A]'$ کدام است؟

$$B' \quad (1) \quad A' \quad (2) \quad A \quad (3) \quad B \quad (4)$$

۶۵- اگر $A = \{1, 2, 3\}$ و $(A - B) \cup (B - A) = \{1, 4\}$ باشد، مجموعه B کدام است؟

$$\{2, 3, 4\} \quad (1) \quad \{1\} \quad (2) \quad \{1, 4\} \quad (3) \quad \{1, 2, 3, 4\} \quad (4)$$

تست‌های آزمون کارشناسی ارشد

«مجموعه‌ها»

• تست‌های شماره ۱ الی ۱۱ آزمون‌های کارشناسی ارشد مجموعه علوم اقتصادی

• تست‌های شماره ۱۲ الی ۲۱ آزمون‌های کارشناسی ارشد مجموعه مدیریت

• تست‌های شماره ۲۲ الی ۳۵ آزمون‌های کارشناسی ارشد حسابداری

۱- اگر $A \subset B$ باشد و A' و B' مجموعه‌های مکمل باشد، کدام یک از روابط زیر نادرست است؟

$$A \cap B' = A \quad (1) \quad A \cup B = B \quad (2) \quad A \cap B = A \quad (3) \quad A \cap B' = \phi \quad (4)$$

۲- اگر $A = \{\{a\}, \{a, b\}, b\}$ ، آنگاه کدام یک از روابط زیر نادرست است؟

$$\{a, b\} \in A \quad (1) \quad \{a\} \subseteq A \quad (2) \quad \{\{a\}, b\} \subseteq A \quad (3) \quad \{\{a, b\}\} \subseteq A \quad (4)$$

۳- اگر بین دو مجموعه A و B روابط زیر برقرار باشد، $A \cup B = \{0, 1, 2, 3\}$ و $A \cap B = \{3\}$ و $A - B = \{0\}$ در این صورت:

$$A = \{0, 3\} \quad (1) \quad A = \{1, 2, 0, 3\} \quad (2) \quad A = \{1, 3, 0\} \quad (3) \quad \text{هیچ‌کدام} \quad (4)$$

۴- اگر A' مجموعه متمم A باشد، کدام یک از روابط زیر صحیح نیست؟

$$A - B = B - A \quad (1) \quad (A \cup B)' = A' \cap B' \quad (2) \quad B \cap A = A \cap B \quad (3) \quad A - B = A \cap B' \quad (4)$$

۵- اگر $A_i = \{x | x \in Z, -i \leq x < i\}$ باشد، کدام یک از روابط زیر نادرست است؟

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = A_n \quad (1) \quad \bigcup_{i=1}^n A_i = \{-1, 0, 1\} \quad (2) \quad \bigcap_{i=1}^n A_i = \phi \quad (3) \quad \bigcap_{i=1}^n A_i' = \bigcap_{i=1}^n A_i' \quad (4)$$

۶- اگر A' مکمل A باشد، آنگاه عبارت $(A' \cap B) \cup (A \cap B)$ برابر کدام است؟

$$A \quad (1) \quad B \quad (2) \quad A' \quad (3) \quad A \cup B \quad (4)$$

۷- اگر $A_i = \{x | x \in Z, -i \leq x \leq i\}$ باشد، آنگاه $\bigcup_{i=1}^n A_i$ برابر است با:

- (۱) A_n (۲) $\{-1, 0, 1\}$ (۳) ϕ (۴) $(-\infty, +\infty)$

۸- اگر $A = \{x | |x - 1| \geq 2\}$ و $B = \{x | x^2 - 3x \geq -2\}$ باشد، $(A \cup B) - (A \cap B)$ کدام است؟
(۱) $\mathbb{R} - (-1, 2)$ (۲) $(-1, 1) \cup [2, 3]$ (۳) $(-1, 3)$ (۴) $[-1, 1) \cup [2, 3]$

۹- اگر تعداد عناصر مجموعه‌های A و $(A \cap B)$ و $(A \cup B)$ به ترتیب 10 و 4 و 18 باشد، تعداد عناصر B کدام است؟
(۱) 8 (۲) 9 (۳) 12 (۴) 15

۱۰- حاصل عبارت $(A \cup B) \cap (A' \cup B)$ کدام است؟

- (۱) A (۲) B (۳) $A \cup B$ (۴) $A' \cup B$

۱۱- اگر A و B دو مجموعه غیرتهی باشند، مجموعه $(A \cup B) - A$ کدام است؟

- (۱) A (۲) B (۳) $B - A$ (۴) $A - B$

۱۲- اگر A و B دو مجموعه باشند، متمم مجموعه $(A \cup B)$ یعنی $(A \cup B)'$ کدام است؟

- (۱) $(A' \cap B')$ (۲) $(A' \cup B')$ (۳) $(A \cap B)'$ (۴) $(A - B)'$

۱۳- اگر A و B دو مجموعه باشند، $B - (A - B)$ کدام است؟

- (۱) A (۲) B (۳) $A - B$ (۴) $B - A$

۱۴- اگر $A = \{1, 2, 3\}$ باشد، $A^0 = A \times A \times A \times A \times A$ چند عضو دارد؟

- (۱) 243 (۲) 125 (۳) 729 (۴) 45

۱۵- اگر مجموعه جهانی $U = \{1, 2, 3, \dots, 7\}$ و $A = \{2, 4, 6\}$ و $B = \{1, 3, 7\}$ مفروض است، $(A \cap B) \cup A'$ چند عضو دارد؟

- (۱) 3 (۲) 4 (۳) 5 (۴) 7

۱۶- متمم مجموعه $A \cap B \cap (A - B)$ کدام مجموعه است؟

- (۱) A' (۲) B' (۳) ϕ (۴) M

۱۷- اگر $A = \{x | 1 \leq x \leq 2\}$ و $B = \{x | 2 \leq x < 5\}$ بوده و $A, B \subset N$ باشند، $B - A$ چند عضو دارد؟

- (۱) صفر (۲) 3 (۳) 1 (۴) 2

۱۸- اگر $A_i = \{x | -i < x < i, i \in N\}$ باشد، $\bigcap_{i=1}^n A_i$ کدام است؟

- (۱) A_1 (۲) A_n (۳) $A_n - A_1$ (۴) $A_1 - A_n$

۱۹- مجموعه $(A \cap B) \cap (A - B)'$ کدام است؟

- (۱) A (۲) B (۳) $A \cap B$ (۴) $A \cup B$

۲۰- اگر به مجموعه A دو عضو اضافه شود، تعداد زیرمجموعه‌های آن چند برابر می‌شود؟

- (۱) 2 (۲) 3 (۳) 4 (۴) 1

۲۱- اگر A و B دو مجموعه ناتهی باشند، مجموعه $A - (A \cap B)$ کدام است؟

- (۱) $A \cap B$ (۲) $A \cap B'$ (۳) $B \cap A'$ (۴) $(A \cup B)'$

۲۲- اگر $A \subset B$ باشد، مجموعه $(A - B)' \cap A$ برابر کدام است؟

- ϕ (۱) $A \cap B'$ (۲) A (۳) B' (۴)

۲۳- اگر مجموعه $M = \{1, 0, 2\}$ ، کدام سه تایی عضو M^3 نیست؟

- $(1, 0, 0)$ (۱) $(1, 0, 2)$ (۲) $(1, 0, 1)$ (۳) $(0, 2, 0)$ (۴)

۲۴- مجموعه $(A - B) \cap A \cap B$ کدام است؟

- A (۱) B (۲) ϕ (۳) $A - B$ (۴)

۲۵- اگر $A = \{x | x > 2\}$ و $B = \{x | x \leq -2\}$ باشد و $A, B \subset \mathbb{R}$ ، $A' \cap B'$ کدام است؟

- $\{x | x > -2\}$ (۱) $\{x | x < -2\}$ (۲) $\{x | x < -2 \text{ یا } x > 2\}$ (۳) $\{x | -2 < x \leq 2\}$ (۴)

۲۶- اگر مجموعه جهانی $U = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ و A مجموعه اعداد فرد و B مجموعه اعداد بخش پذیر بر ۳ باشد،

مجموعه $(A - B)$ ، چند زیرمجموعه دارد؟

- ۳ (۱) ۴ (۲) ۸ (۳) ۱۶ (۴)

۲۷- مجموعه $[A \cap B \cap (A - B)] \cup A$ کدام است؟

- A (۱) B (۲) ϕ (۳) $A - B$ (۴)

۲۸- اگر داشته باشیم $A \subset B \subset C$ ، حاصل عبارت $(A \cup B) \cap [(A \cap B) \cup C]$ کدام است؟

- B (۱) $A \cap C$ (۲) $A \cup C$ (۳) A (۴)

۲۹- اگر $A = \{x | 2 \leq x \leq 4\}$ و $B = \{x | 3 \leq x < 6\}$ بوده و $A, B \subset \mathbb{N}$ باشد، $(A - B) \times A$ چند عضو دارد؟

- ۳ (۱) ۱ (۲) ۴ (۳) ۲ (۴)

۳۰- اگر M و N دو مجموعه باشند، $(M \cup N) \cap N'$ کدام است؟

- N' (۱) M (۲) $M \cap N'$ (۳) $(M \cup N)'$ (۴)

۳۱- اگر تعداد عناصر مجموعه‌های A و B به ترتیب ۵ و ۷ و ۳ باشد، تعداد عناصر $A \cup B$ کدام است؟

- ۸ (۱) ۹ (۲) ۱۰ (۳) ۱۲ (۴)

۳۲- مجموعه $(A \cup B) \cap (A \cup B')$ کدام است؟

- A (۱) B (۲) $A \cup B$ (۳) $A \cup B'$ (۴)

۳۳- اگر به مجموعه A سه عضو اضافه شود، تعداد زیرمجموعه‌های آن چند برابر می‌شود؟

- ۲ (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۸ (۴)

۳۴- اگر داشته باشیم $n(A) = 10$ (تعداد عناصر مجموعه A) و $n(B) = 15$ و $n(A \cup B) = 19$ باشد، $n(A \cap B)$

کدام است؟

- ۶ (۱) ۹ (۲) ۲۵ (۳) ۲۹ (۴)

۳۵- اگر A و B دو مجموعه باشند، $A' \cap [A \cup (B \cap A)]$ برابر کدام است؟

- A (۱) B (۲) A' (۳) ϕ (۴)

تابع

۱-۳ رابطه

هرگاه x و y به ترتیب عضو مجموعه‌های A و B باشند، زوج مرتب (x, y) عضوی است از حاصل ضرب دکارتی $A \times B$ ، یعنی:

$$x \in A, y \in B \implies (x, y) \in A \times B$$

اینک هر زیرمجموعه‌ای از $A \times B$ را «یک رابطه از A در B » خوانند و به R نمایش می‌دهیم. یعنی $R \subset A \times B$ در این صورت R یک رابطه از A در B است. به طور خلاصه، رابطه مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب است.

۲-۳ تابع

هر رابطه از A در B را یک تابع خوانند، اگر در آن دو زوج مرتب پیدا نشود که مؤلفه اول (x های) آن‌ها یکسان باشند. در این صورت می‌گویند تابعی از A در B تعریف شده است و می‌نویسند:

$$f: A \longrightarrow B \quad \text{یا} \quad A \xrightarrow{f} B$$

و می‌خوانند، f تابعی از A در B است. اگر در یک رابطه دو زوج مرتب دارای مؤلفه‌های اول (x های) مساوی باشند در صورتی بیانگر یک تابع است که مؤلفه‌های دوم (y های) آن‌ها هم مساوی باشند.
نکته: هر تابع یک رابطه است، ولی هر رابطه یک تابع نیست.

۳-۳ ضابطه تابع

با توجه به تعریف تابع، اگر $x \in A$ باشد به وسیله قانونی خاص، x به عضوی مانند $y \in B$ نظیر می‌گردد، یعنی تابع f عضو x متعلق به A را طبق قانونی خاص به عضو y متعلق به B نظیر می‌کند و می‌نویسیم $y = f(x)$. یعنی:

$$f = \{(x, y) | x \in A, y \in B, y = f(x)\}$$

$y = f(x)$ را ضابطه یا معادله تابع گویند. در این صورت y را مقدار تابع به ازای x می‌نامند. طبق قرارداد اگر تابع f از A در B با ضابطه $y = f(x)$ تعریف شده باشد، f به صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$f: A \xrightarrow{x \mapsto f(x)} B \quad \text{یا} \quad f: A \xrightarrow{y=f(x)} B$$

۴-۳ تابع با چند ضابطه

گاهی مقدار یک تابع در دامنه‌اش با بیش از یک ضابطه مشخص می‌شود. مثلاً اگر D دامنه تعریف تابع f دارای سه زیرمجموعه جدا از هم A_1 و A_2 و A_3 باشد، به طوری که $D = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ و مقادیر تابع برای هر یک از مجموعه‌های A_1 و A_2 و A_3 با ضابطه‌های مختلفی بیان شود، در این صورت f را یک تابع با چند ضابطه گویند، یعنی:

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & x \in A_1 \\ h(x) & x \in A_2 \\ \ell(x) & x \in A_3 \end{cases}$$

۳-۵ نحوه تشخیص یک تابع

۳-۵-۱ از روی ضابطه آن

ضابطه $y = f(x)$ را تابع گویند، هرگاه به ازای هر مقدار x حداکثر یک مقدار برای y حاصل شود. یعنی اگر برای y مقداری حاصل نشود ایرادی ندارد ولی اگر برای آن مقداری به دست آمد، نباید بیش از یک عدد باشد.

۳-۵-۲ از روی نمودار پیکانی

در نمودار پیکانی اگر هر عضو مجموعه مبدأ یعنی A حداکثر با یک عضو مجموعه مقصد یعنی B در رابطه باشد، آن نمودار نمایش یک تابع است.

۳-۵-۳ از روی نمودار دکارتی

در نمودار دکارتی خطی را به موازات محور y ها در نظر می گیریم و آن را به موازات خود از چپ به راست تغییر می دهیم. اگر این خط متحنی را حداکثر در یک نقطه قطع کند آن نمودار نمایش یک تابع است و اگر در بیش از یک نقطه قطع کند، آن نمودار نمایش یک تابع نیست.

۳-۶ دامنه و برد تابع

فرض می کنیم f تابعی از A در B باشد، به طوری که:

$$f = \{(x, y) | x \in A, y \in B, y = f(x)\}$$

بنا به تعریف، مجموعه ای متشکل از تمامی مؤلفه های اول زوج های مرتب $(x, y) \in f$ را «دامنه تعریف یا قلمرو f » گویند و با D_f نشان می دهند، یعنی:

$$D_f = \{x | x \in A, (x, y) \in f\}$$

و مجموعه ای متشکل از تمامی مؤلفه های دوم زوج های مرتب $(x, y) \in f$ را «برد تابع یا حوزه مقادیر f » گویند و با R_f نشان می دهند، یعنی:

$$R_f = \{y | y \in B, (x, y) \in f\}$$

۳-۷ تعیین دامنه تابع

۳-۷-۱ توابع چندجمله ای یا خطی

تابع $f(x)$ را یک تابع چندجمله ای گوئیم، هرگاه به ازای هر x حقیقی با ضابطه ای به صورت زیر تعریف شود:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

دامنه تعریف این توابع مجموعه اعداد حقیقی است، یعنی:

$$D_f = \mathbb{R}$$

۳-۷-۲ توابع کسری گویا

توابع کسری که صورت و مخرج آن ها توابع چندجمله ای باشند، تابع «کسری گویا» نامند. مانند تابع با ضابطه

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_0} = \frac{g(x)}{h(x)}$$

دامنه تعریف این توابع مجموعه اعداد حقیقی به غیر از ریشه‌های مخرج می‌باشد، یعنی (مسئله ۱):

$$D_f = \mathbb{R} - \{x | h(x) = 0\}$$

۳-۷-۳ توابع اصم (گنگ)

توابعی که در ضابطه آن‌ها متغیر x (یا عبارتی برحسب x) زیر رادیکال باشد، یا توان x (یا عبارتی برحسب x) کسری باشد، «توابع اصم» گوئیم. ضابطه این‌گونه توابع در حالت کلی به شکل زیر است:

$$f(x) = \sqrt[n]{p(x)}$$

اگر $p(x)$ چندجمله‌ای باشد، در صورتی که n فرد باشد، مجموعه اعداد حقیقی دامنه تعریف است، یعنی:

$$D_f = \mathbb{R}$$

اگر n زوج باشد دامنه تعریف عبارت است از مجموعه x هایی که به ازای آن‌ها زیر رادیکال مثبت یا صفر (عددهای نامنفی) است، یعنی (مسئله ۲):

$$D_f = \{x | p(x) \geq 0\}$$

۴-۷-۳ توابع لگاریتمی

ضابطه توابع لگاریتمی را در حالت کلی به شکل زیر در نظر می‌گیریم:

$$f(x) = \log_b^{g(x)}$$

باید توجه داشت که همواره داریم: $g(x) > 0$, $b \neq 1$, $b > 0$

بنابراین برای تعیین دامنه تعریف توابع لگاریتمی کافی است شرایط فوق را برقرار کنیم (مسئله ۳). در حالت خاص اگر $b = e$ باشد، داریم:

$$f(x) = \ln g(x)$$

که برای تعیین دامنه تعریف کافی است تنها شرط $g(x) > 0$ را برقرار کنیم.

۵-۷-۳ توابع نمایی

ضابطه توابع نمایی را در حالت کلی به شکل زیر در نظر می‌گیریم:

$$f(x) = a^{g(x)} \quad , \quad a > 0 \quad , \quad a \neq 1$$

در حالت خاص اگر $a = e$ باشد، داریم:

$$f(x) = e^{g(x)}$$

دامنه تعریف این توابع بستگی به عبارت $g(x)$ دارد (مسئله ۴).

۶-۷-۳ توابع ساده مثلثاتی

$$f(x) = \sin x \Rightarrow D_f = \mathbb{R} \quad , \quad f(x) = \tan x \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \left\{x | x = k\pi + \frac{\pi}{2}\right\}$$

$$f(x) = \cos x \Rightarrow D_f = \mathbb{R} \quad , \quad f(x) = \cot x \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{x | x = k\pi\}$$

۸-۳ تعیین برد تابع

۱-۸-۳ توابع چندجمله‌ای یا خطی

برد این نوع توابع با حل کردن x برحسب y و برقراری شرط حقیقی بودن x معین می‌شود، بدیهی است y هایی که به‌ازای آن‌ها مقدار x حقیقی است برد تابع را تشکیل می‌دهند. گفتنی است که حل x برحسب y در حالت کلی همیشه امکان‌پذیر نمی‌باشد و به همین علت تعیین برد توابع چندجمله‌ای همیشه امکان‌پذیر نیست (مسئله ۶).

۲-۸-۳ توابع کسری گویا

برد این نوع توابع نیز با حل کردن x برحسب y و برقراری شرط حقیقی بودن x معین می‌شود. باید توجه داشت که در حالت کلی تعیین برد این‌گونه توابع امکان‌پذیر نیست (مسئله ۷).

۳-۸-۳ توابع اصم (گنگ)

برای تعیین برد این نوع توابع در صورت امکان x را برحسب y حل می‌کنیم و سپس مجموعه y هایی که به‌ازای آن‌ها برای x مقدار حقیقی به‌دست می‌آید، به‌عنوان برد تابع معرفی می‌کنیم. در حالت کلی تعیین برد توابع اصم همیشه امکان‌پذیر نیست (مسئله ۸).

۴-۸-۳ توابع لگاریتمی

برای تعیین برد این نوع توابع ابتدا x را برحسب y حل می‌کنیم. سپس با توجه به دامنه تابع y های موردقبول را تعیین می‌کنیم (مسئله ۹).

۵-۸-۳ توابع نمایی

ضابطه تابع نمایی را در حالت کلی به‌صورت $y = a^{g(x)}$ یا $y = e^{g(x)}$ نمایش دادیم. برد این نوع توابع بستگی به عبارت $g(x)$ دارد (مسئله ۱۰).

۶-۸-۳ توابع ساده مثلثاتی

$$f(x) = \sin x \Rightarrow -1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow R_f = [-1, 1]$$

$$f(x) = \cos x \Rightarrow -1 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow R_f = [-1, 1]$$

$$f(x) = \tan x \Rightarrow -\infty < \tan x < +\infty \Rightarrow R_f = (-\infty, +\infty)$$

$$f(x) = \cot x \Rightarrow -\infty < \cot x < +\infty \Rightarrow R_f = (-\infty, +\infty)$$

(مسئله ۱۱)

۷-۸-۳ استفاده از مشتق

اگر تابع با ضابطه مفروض $y = f(x)$ در D_f پیوسته و معین باشد، می‌توان برد تابع را با استفاده از مشتق به‌دست آورد یعنی اگر $f'(x) > 0$ یا $f'(x) < 0$ باشد، بدیهی است که تابع یکنواست و با فرض این که تابع پیوسته و دامنه آن $D_f = [a, b]$ باشد، برد آن (مسئله ۱۲):

$$1) \text{ اگر تابع صعودی باشد، } R_f = [f(a), f(b)], f'(x) \geq 0$$

$$2) \text{ اگر تابع نزولی باشد، } R_f = [f(b), f(a)], f'(x) \leq 0$$

۹-۳ محاسبه مقدار تایع

در تایع با ضابطه $y = f(x)$ برای محاسبه مقدار تایع به ازای $x = a$ در $f(x)$ به جای x عدد a را جاگذاری می‌کنیم، یعنی $f(a)$ را حساب می‌کنیم. در تایع با ضابطه $f(x, y, z, \dots)$ مقصود از $f(\alpha, \beta, \gamma, \dots)$ مقدار آن تایع به ازای $x = \alpha$ و $y = \beta$ و $z = \gamma$ و ... است.

۱۰-۳ تبدیل متغیر

در یک تایع می‌توان متغیری را با متغیر دیگر یا عبارتی شامل متغیر جانشین کرد. در عبارت $f(x)$ هرگاه x را با t جانشین کنیم $f(t)$ را خواهیم داشت. اگر x را با $ax + b$ جانشین کنیم $f(ax + b)$ را خواهیم داشت و اگر x را با خود $f(x)$ جانشین کنیم $f[f(x)]$ را خواهیم داشت که با $ff(x)$ نشان می‌دهند و این عمل را می‌توان تا هر مرتبه ادامه داد (مسئله ۱۳).

۱۱-۳ عملیات اصلی روی توابع

دو تایع f و g مفروضند، مجموع $(f + g)$ ، تفاضل $(f - g)$ ، حاصل ضرب $(f \cdot g)$ و خارج قسمت (f/g) توابعی هستند که به صورت زیر تعریف می‌شود (مسئله ۱۴).

f, g	ضابطه	دامنه تعریف
$f + g$	$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$	$D_{f+g} = D_f \cap D_g$
$f - g$	$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$	$D_{f-g} = D_f \cap D_g$
$f \cdot g$	$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$	$D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g$
f/g	$(f/g)(x) = f(x)/g(x)$	$D_{f/g} = D_f \cap D_g - \{x g(x) = 0\}$

۱۲-۳ تایع مرکب (تایع تایع)

ترکیب دو تایع f و g را که با نماد $f \circ g$ یا $g \circ f$ نمایش می‌دهیم، «تایع مرکب» گوئیم و داریم:

ضابطه	دامنه تعریف
$f \circ g = (f \circ g)(x) = f(g(x))$	$D_{f \circ g} = \{x x \in D_g, g(x) \in D_f\}$
$g \circ f = (g \circ f)(x) = g(f(x))$	$D_{g \circ f} = \{x x \in D_f, f(x) \in D_g\}$

به طور کلی همواره می‌توان دامنه توابع مرکب را پس از ترکیب دو تایع f و g تعیین نمود به شرط آنکه قبل از تعیین دامنه هیچ‌گونه عمل ساده کردنی از قبیل حذف مخرج یا رادیکال شامل x صورت نگیرد (مسائل ۱۵ و ۱۶).

نکات مهم:

- ۱- در حالت کلی دو تایع مرکب خاصیت جابه‌جایی ندارند، یعنی: $f \circ g \neq g \circ f$
- ۲- توابع خاصیت شرکت‌پذیری دارند، یعنی: $f \circ g \circ h = (f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$
- ۳- داریم: $((h \circ g) \circ f)(a) = (h \circ g)(f(a)) = h(g(f(a)))$
 $(h \circ (g \circ f))(a) = h \circ (g \circ f)(a) = h(g(f(a)))$

۱۳-۳ تساوی دو تایع

دو تایع f و g در صورتی با هم مساویند که اولاً دامنه تعریف آن‌ها با یکدیگر برابر بوده و ثانیاً ضابطه آن‌ها با هم برابر باشند، یعنی:

$$f = g \Leftrightarrow D_f = D_g, \quad f(x) = g(x)$$

۱۴-۳ تابع یک به یک

فرض می‌کنیم f تابعی از A در B باشد، بنا به تعریف تابع f یک به یک است، هرگاه برای هر x_1 و x_2 در دامنه f (مسئله ۱۷):

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

نکته: در تابع $f(x) = \begin{cases} g(x) & x \in A \\ h(x) & x \in B \end{cases}$ که در آن A و B دو مجموعه مجزا می‌باشند، هرگاه دو شرط زیر صدق کند، تابع f یک به یک است. اولاً: g و h یک به یک باشند. ثانیاً: h و g از هم جدا باشند.

۱۵-۳ نحوه تشخیص تابع یک به یک

۱-۱۵-۳ از روی نمودار پیکانی

در نمودار پیکانی اگر به هر عضو مجموعه مقصد یعنی B حداکثر یک پیکان وارد شود آن نمودار نمایش تابع یک به یک است.

۲-۱۵-۳ از روی نمودار دکارتی

در نمودار دکارتی خطی موازی با محور x ها انتخاب می‌کنیم و آن را به موازات خود از بالا تا پایین تغییر می‌دهیم، اگر خط نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند آن تابع یک به یک است و اگر نمودار را در بیش از یک نقطه قطع کند، آن نمودار نمایش تابع یک به یک نیست.

۱۶-۳ تابع پوششی

فرض می‌کنیم f تابعی از A در B باشد، بنا به تعریف تابع f پوششی است هرگاه برای هر y از B لااقل یک x از A ، یعنی D_f وجود داشته باشد (مسئله ۱۷).

$$f: A \xrightarrow{y=f(x)} B \quad \forall y \in B, \exists x \in D_f \mid f(x) = y$$

نکته: اگر f تابعی یک به یک از A در B و در ضمن f تابع پوششی باشد، f را یک تناظر یک به یک خوانند.

۱۷-۳ نحوه تشخیص تابع پوششی

۱-۱۷-۳ از روی نمودار پیکانی

در نمودار پیکانی اگر به هر یک از عضوهای مجموعه مقصد یعنی B لااقل یک پیکان وارد شده باشد، تابع پوششی است.

۲-۱۷-۳ از روی نمودار دکارتی

در نمودار دکارتی خطی موازی محور x ها انتخاب می‌کنیم و آن را به موازات خود از بالا تا پایین تغییر می‌دهیم، اگر خط نمودار را لااقل در یک نقطه قطع کند آن تابع پوششی است. یعنی اگر در بیش از یک نقطه هم قطع نماید، تابع پوششی است.

۱۸-۳ تابع ثابت

f را تابع ثابت گویند، اگر هر عضو از دامنه، $D_f = A$ ، تنها به یک عضو از مجموعه B نظیر شود. به بیان دیگر در تابع ثابت حوزه مقادیر f تنها یک عضو دارد. ضابطه تابع ثابت به صورت $f(x) = C$ بیان می‌شود. مانند $f(x) = 4$.

نکته: اگر $f(x)$ یک تابع ثابت باشد، $(f \circ g)(x) = f(x)$ است.

۱۹-۳ تابع همانی (یکسان)

فرض می‌کنیم، به ازای هر $x \in \mathbb{R}$ ، $f(x) = x$ باشد، این تابع را «تابع همانی» گوئیم. به عبارت دیگر تابع $f: A \rightarrow B$ را همانی می‌نامند، هرگاه قانون تابع به صورت $f(x) = x$ باشد.

نکات مهم:

۱- نمودار تابع همانی نیمساز ناحیه اول و سوم است.

۲- تابع همانی یک به یک و پوششی است.

۲۰-۳ معکوس (وارون) تابع

معکوس تابع با تبدیل نقش x و y به یکدیگر در تابع به ضابطه $y = f(x)$ به دست می‌آید و با $y = f^{-1}(x)$ (بخوانید f معکوس) نشان داده می‌شود. یعنی

$$f = \{(x, y) | y = f(x), x \in A, y \in B\}$$

$$f^{-1} = \{(y, x) | x = f(y) \Rightarrow y = f^{-1}(x)\}$$

بدیهی است که $D_{f^{-1}} = R_f$ و $R_{f^{-1}} = D_f$ (مسائل ۱۸ و ۱۹).

قضیه: تابع f معکوس پذیر است، اگر و تنها اگر یک به یک باشد.

قضیه: اگر f و g دو تابع معکوس پذیر باشند، آنگاه $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

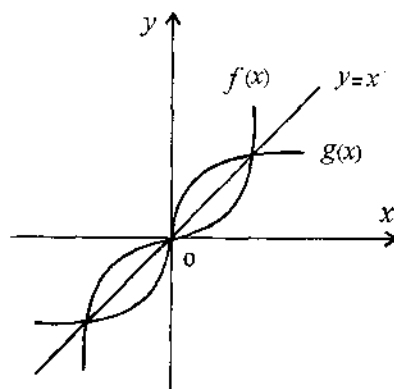
نکات مهم:

۱- ترکیب هر تابع با معکوس خودش تابعی است همانی یعنی: $f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x)) = x$.

۲- هرگاه تابع f را به صورت زوج‌های مرتب بیان کنند، برای تعیین تابع $f^{-1} \circ f$ کافی است مؤلفه‌های اول زوج‌های مرتب را با خودش تکرار کرد. برای تعیین تابع $f \circ f^{-1}$ کافی است مؤلفه‌های دوم زوج‌های مرتب را با خودش تکرار کنیم.

۲۱-۳ نمودار معکوس تابع

بین نمودارهای f و f^{-1} ارتباط خاصی وجود دارد، به عنوان مثال توابع $f(x) = x^2$ و $g(x) = \sqrt{x}$ معکوس یکدیگرند و نمودار آن‌ها در شکل زیر رسم شده است. این دو نمودار نسبت به خط $y = x$ قرینه هستند. به طور کلی، نمودار توابع معکوس نسبت به نیمساز ناحیه اول و سوم ($y = x$) قرینه یکدیگرند.



نکات مهم:

- ۱- تابع f دارای معکوس است، اگر و تنها اگر هر خط افقی، نمودار آن را حداکثر در یک نقطه قطع نماید.
- ۲- اگر تابع f^{-1} معکوس تابع f باشد، آنگاه تابع f نیز معکوس f^{-1} خواهد بود.
- ۳- نقاط تقاطع دو تابع f و f^{-1} که معکوس یکدیگرند، روی خط $y = x$ واقع است.
- ۴- اگر نقطه $A(x_0, y_0)$ روی نمودار تابع f باشد، نقطه $A'(y_0, x_0)$ نظیر نقطه A روی نمودار تابع f^{-1} است.
- ۵- اگر ضریب زاویه مماس یا قائم در نقطه $A(x_0, y_0)$ روی نمودار تابع f برابر λ باشد، ضریب زاویه مماس یا قائم در نقطه A' نظیر نقطه A روی نمودار تابع f^{-1} برابر $1/\lambda$ است.
- ۶- اگر تابع f روی بازه $[a, b]$ پیوسته و روی فاصله (a, b) مشتق پذیر باشد، به طوری که در این فاصله $f'(x)$ همواره مثبت ($f'(x) > 0$) یا همواره منفی ($f'(x) < 0$) باشد، آنگاه f در فاصله $[a, b]$ معکوس پذیر است.

۲۲-۳ توابع زوج و فرد

تابع f به معادله $y = f(x)$ یا $f(x, y) = 0$ را در نظر می گیریم:

(۱) تابع f را زوج می نامیم، هرگاه:

$$f(-x) = f(x) \quad \text{یا} \quad f(-x, y) = f(x, y)$$

(۲) تابع f را فرد می نامیم، هرگاه:

$$f(-x) = -f(x) \quad \text{یا} \quad f(-x, -y) = -f(x, y)$$

تابع می تواند نه زوج باشد و نه فرد. هر تابعی که نه زوج باشد و نه فرد، می توان به مجموع دو تابع زوج و فرد تبدیل نمود، در صورتی که $f(x)$ چنین تابعی باشد، می توان آن را به مجموع دو تابع $g(x)$ و $h(x)$ تبدیل نمود که $g(x)$ تابعی زوج و $h(x)$ تابعی فرد باشد. در این صورت $g(x)$ و $h(x)$ از روابط زیر به دست می آیند (مسائل ۲۰ و ۲۱ و ۲۲).

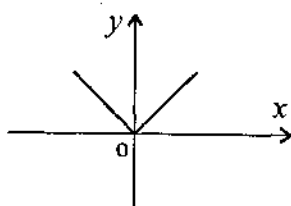
$$h(x) = \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)] \quad g(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)] \quad f(x) = g(x) + h(x)$$

نکات مهم:

- ۱- نمودار تابع زوج نسبت به محور y ها قرینه اند.
- ۲- نمودار تابع فرد دارای مرکز تقارن است که آن مرکز تقارن مبدأ مختصات است.
- ۳- مجموع و تفاضل دو تابع فرد، تابعی فرد است.
- ۴- مجموع و تفاضل دو تابع زوج، تابعی زوج است.
- ۵- حاصل ضرب یک عدد در یک تابع فرد، تابعی فرد است.
- ۶- حاصل ضرب یک عدد در یک تابع زوج، تابعی زوج است.
- ۷- حاصل ضرب یک تابع زوج در یک تابع فرد، تابعی فرد است.
- ۸- حاصل ضرب دو تابع فرد یا دو تابع زوج، تابعی زوج است.
- ۹- ترکیب دو تابع فرد، تابعی فرد است.
- ۱۰- اگر f تابعی زوج و g تابعی فرد باشد، در این صورت $f \circ g$ و $g \circ f$ زوجند.

۲۳-۳ تابع قدرمطلق

تابع قدرمطلق به صورت زیر تعریف می شود:



$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

در این تابع $D_f = \mathbb{R}$ و $R_f = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.

۱-۲۳-۳ خواص تابع قدرمطلق

اگر a و b اعداد حقیقی باشند، آنگاه:

$$\begin{aligned} ۱) & |a-b| = |b-a| \quad ۲) -|a| \leq a \leq |a| \quad ۳) \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|} \quad ۴) |ab| = |a||b| \\ ۵) & |a-b| \geq ||a|-|b|| \quad ۶) |a+b| \leq |a|+|b| \quad ۷) a^x = b^x \Leftrightarrow |a|=|b| \quad ۸) a^x < b^x \Leftrightarrow |a| < |b| \end{aligned}$$

۲-۲۳-۳ بازه و قدرمطلق

به ازای هر عدد حقیقی x و هر عدد مثبت a :

$$۱) |x| < a \Leftrightarrow -a < x < a \quad ۲) |x| > a \Leftrightarrow x > a \text{ یا } x < -a$$

نکات مهم:

$$۱- \text{بحث در جواب معادله } |x-a| + |x-b| = c, (a < b)$$

الف) اگر $c > b-a$ باشد، معادله دو ریشه دارد.ب) اگر $c < b-a$ باشد، معادله ریشه ندارد.ج) اگر $c = b-a$ باشد، معادله بی شمار ریشه دارد.

$$۲- \text{بحث در جواب معادله } |x-a| - |x-b| = c$$

الف) اگر $|c| < |b-a|$ باشد، معادله یک ریشه دارد.ب) اگر $|c| > |b-a|$ باشد، معادله ریشه ندارد.ج) اگر $|c| = |b-a|$ باشد، معادله بی شمار ریشه دارد.

$$۳- \text{اگر بخواهیم نامساوی } a < x < b \text{ را به صورت قدرمطلق بنویسیم، ابتدا نصف مجموع دو عدد یعنی } (a+b)/2$$

را به دست می آوریم، سپس آن را از تمام قسمت های نامساوی کم می کنیم.

۲۴-۳ تابع جزء صحیح

تابع جزء صحیح به صورت یک تابع از $\mathbb{R}$ در $\mathbb{Z}$ با ضابطه:

$$f(x) = [x] \quad \text{یا} \quad f(x) = E(x)$$

بیان می شود، که در آن منظور از $[x]$ بزرگترین عدد صحیحی است که برابر یا کوچکتر از عدد مورد نظر می باشد، یعنی به ازای هر $x \in \mathbb{R}$ ، $n \leq x < n+1$ که در آن $n \in \mathbb{Z}$ بوده و داریم $[x] = n$. بنابراین اگر x مثبت باشد، جزء صحیح آن همان عدد قبل از ممیز است و اگر x منفی باشد جزء صحیح آن همان عدد قبل از ممیز به علاوه یک با علامت منفی است. دامنه تعریف تابع $f(x) = [x]$ ، $\mathbb{R}$ و بُرد آن $\mathbb{Z}$ می باشد.

۳-۲۴-۱ خواص تابع جزء صحیح

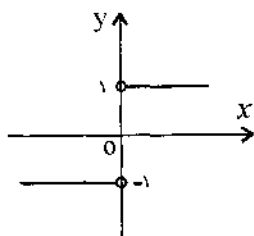
- (۱) هر عدد بین قسمت صحیح آن و یک واحد بیش تر از آن قرار دارد یعنی: $[x] \leq x < [x] + 1$
- (۲) اختلاف هر عدد و جزء صحیح آن بین صفر و یک است. یعنی: $0 \leq x - [x] < 1$
- (۳) یک عدد صحیح را می توان از علامت قسمت صحیح بیرون آورد. یعنی: $n \in \mathbb{Z} \Rightarrow [x + n] = [x] + n$
- (۴) جزء صحیح هر عدد بین آن عدد و یک واحد کم تر از آن قرار دارد یعنی: $x - 1 \leq [x] < x$
- (۵) جزء صحیح مربع یک عدد از جزء صحیح آن عدد بزرگتر یا با آن مساوی است یعنی: $[x^2] \geq [x]$
- (۶) مجموع جزء صحیح دو عدد قریه بنابر آنکه آن اعداد صحیح یا غیر صحیح باشند، برابر صفر یا -1 است.

$$\begin{cases} x \in \mathbb{Z} \Rightarrow [x] + [-x] = 0 \\ x \notin \mathbb{Z} \Rightarrow [x] + [-x] = -1 \end{cases}$$

(مسئله ۲۳)

۳-۲۵ علامت

تابع علامت که با sgn نمایش داده می شود، به صورت زیر تعریف می شود:



$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

بدیهی است که دامنه این تابع $\mathbb{R}$ و برد آن $\{-1, 0, 1\}$ است.

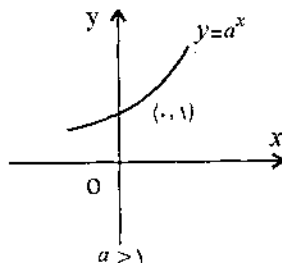
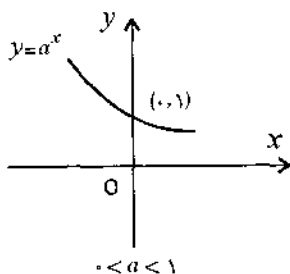
۳-۲۶ تابع نمایی

تابع

$$y = a^x$$

را که در آن a عدد مثبت و مخالف یک ($a > 0, a \neq 1$) می باشد، «تابع نمایی» خوانند. این تابع به ازای تمام مقادیر x تعریف شده است، یعنی $D_f = \mathbb{R}$.

منحنی نمایش تابع $y = a^x$ تماماً در ربع اول و دوم واقع است. تابع نمایی همواره صعودی و پیوسته است اگر $a > 1$ باشد و، همواره نزولی و پیوسته است اگر $0 < a < 1$ باشد. در هر دو حالت فوق $D_f = \mathbb{R}^+$ و محور x ها مجانب منحنی است و محل تلاقی آن با محور y ها نقطه $(0, 1)$ است. پارامتر a انحنا را تعیین می کند.



۲۷-۳ تابع لگاریتمی

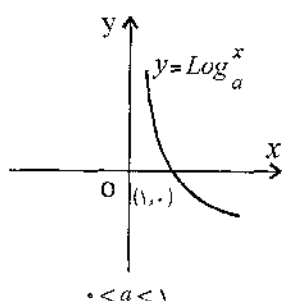
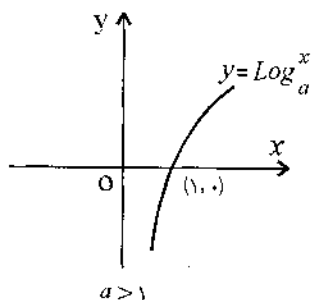
تابع نمایی یک به یک است، لذا معکوس آن نیز یک تابع است، که بنا به تعریف آن را به صورت $x = \log_a^y$ نشان می‌دهیم و لگاریتم x در پایه a می‌خوانیم ($a > 0, \neq 1$) و y عددی است مثبت، داریم:

$$D_f = \mathbb{R}_{f^{-1}} = \mathbb{R} \quad , \quad R_f = D_{f^{-1}} = \mathbb{R}^+$$

$$y = a^x \Leftrightarrow x = \log_a^y$$

پس می‌توان نوشت:

و معکوس آن $y = \log_a^x$ است. منحنی نمایش آن در ربع اول و چهارم واقع است. اگر $a > 1$ باشد تابع همواره صعودی و اگر $0 < a < 1$ باشد تابع همواره نزولی است. در هر دو حالت فوق محور y ها مجانب منحنی است و محل تلاقی آن با محور x ها نقطه $(1, 0)$ است. پارامتر a انحنا را تعیین می‌کند.



به علت اینکه توابع $y = \log_a^x$ و $y = a^x$ معکوس یکدیگرند، نمودار هر یک از آن‌ها را می‌توان از نمودار منحنی دیگر، به روش انعکاس حول خط $y = x$ به دست آورد.

۲۸-۳ توابع مثلثاتی و معکوس آن‌ها

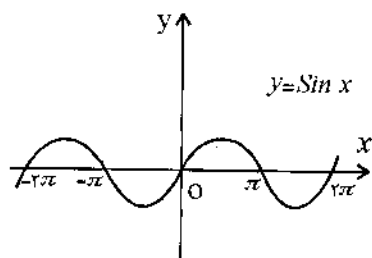
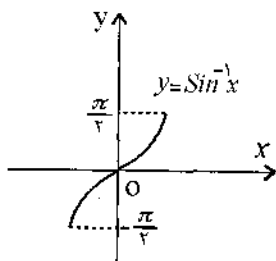
۱-۲۸-۳ تابع سینوس و معکوس آن

تابع f به معادله $y = \sin x$ را در نظر می‌گیریم، در این تابع $D_f = \mathbb{R}$ و $R_f = [-1, 1]$ ، با تابع معکوس سینوس را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$y = \sin^{-1} x = \text{Arc sin } x \Leftrightarrow x = \sin y \quad , \quad -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$$

در این تابع $D_{f^{-1}} = [-1, 1]$ و $R_{f^{-1}} = [-\pi/2, \pi/2]$ و نتیجه می‌شود:

$$\text{اگر } -1 \leq x \leq 1 \Rightarrow \sin(\sin^{-1} x) = x \quad \text{اگر } -\pi/2 \leq y \leq \pi/2 \Rightarrow \sin^{-1}(\sin y) = y$$



نکات مهم:

۱- تابع $y = \sin x$ به یک نیست ولی معکوس آن یک به یک است.

۲- شکل تابع $y = \sin^{-1} x$ قرینه شکل تابع $y = \sin x$ نسبت به نیمساز ناحیه اول و سوم است.

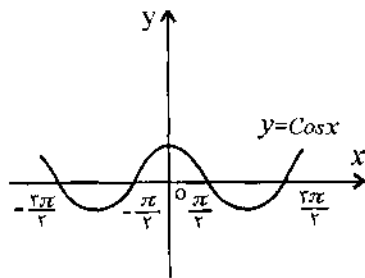
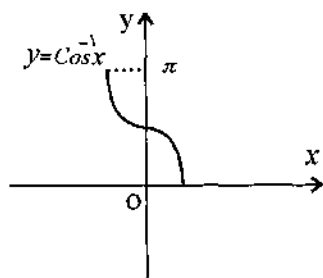
۲-۲۸-۳ تابع کسینوس و معکوس آن

تابع f به معادله $y = \cos x$ را در نظر می‌گیریم، در این تابع $D_f = \mathbb{R}$ و $R_f = [-1, 1]$ ، تابع معکوس کسینوس را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$y = \cos^{-1} x = \text{Arc cos } x \Leftrightarrow x = \cos y, \quad 0 \leq y \leq \pi$$

در این تابع $D_{f^{-1}} = [-1, 1]$ و $R_{f^{-1}} = [0, \pi]$ و نتیجه می‌شود:

$$\text{اگر } 0 \leq y \leq \pi \Rightarrow \cos^{-1}(\cos y) = y \quad \text{اگر } -1 \leq x \leq 1 \Rightarrow \cos(\cos^{-1} x) = x$$



نکات مهم:

۱- تابع $y = \cos x$ به یک نیست ولی معکوس آن یک به یک است.

۲- شکل تابع $y = \cos^{-1} x$ قرینه شکل تابع $y = \cos x$ نسبت به نیمساز ناحیه اول و سوم است.

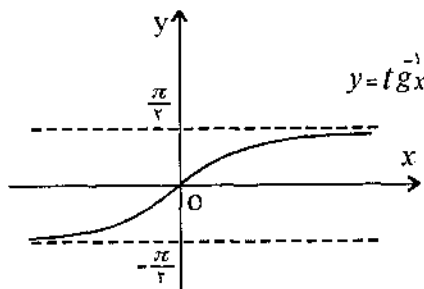
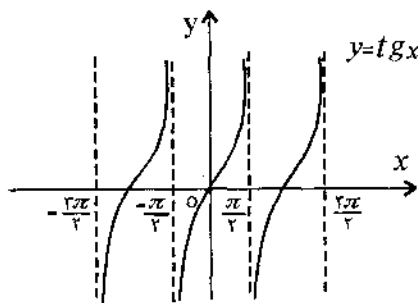
۳-۲۸-۳ تابع تانژانت و معکوس آن

تابع f به معادله $y = \tan x$ را در نظر می‌گیریم، در این تابع $D_f = \{x | x \in \mathbb{R}, \cos x \neq 0\}$ و $R_f = \mathbb{R}$ ، تابع معکوس تانژانت را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$y = \tan^{-1} x = \text{Arctan } x \Leftrightarrow x = \tan y, \quad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$$

در این تابع $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$ و $R_{f^{-1}} = (-\pi/2, \pi/2)$ و نتیجه می‌شود:

$$\tan(\tan^{-1} x) = x, \quad \tan^{-1}(\tan y) = y$$



نکات مهم:

- ۱- تابع $y = \tan x$ به یک نیست ولی معکوس آن یک به یک است.
- ۲- شکل تابع $y = \tan^{-1} x$ قرینه شکل تابع $y = \tan x$ نسبت به نیمساز ناحیه اول و سوم است.

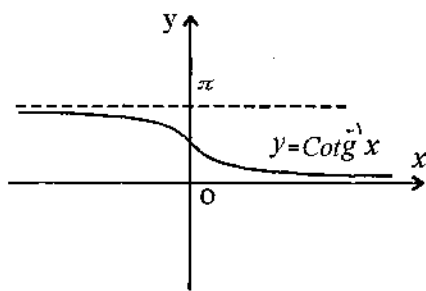
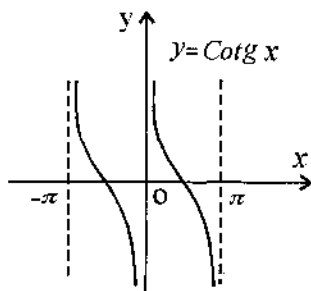
۳-۲۸-۴ تابع کتانژانت و معکوس آن

تابع f به معادله $y = \cot x$ را در نظر می‌گیریم، در این تابع $D_f = \{x | x \in \mathbb{R}, \sin x \neq 0\}$ یا $D_f = \mathbb{R} - \{x | x = k\pi\}$ و $R_f = \mathbb{R}$ ، تابع معکوس کتانژانت را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$y = \cot^{-1} x = \operatorname{Arccot} x \Leftrightarrow x = \cot y, \quad 0 < y < \pi$$

در این تابع $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$ و $R_{f^{-1}} = (0, \pi)$ و نتیجه می‌شود:

$$\cot(\cot^{-1} x) = x, \quad \cot^{-1}(\cot y) = y$$



نکات مهم:

- ۱- تابع $y = \cot x$ به یک نیست ولی معکوس آن یک به یک است.
- ۲- شکل تابع $y = \cot^{-1} x$ قرینه شکل تابع $y = \cot x$ نسبت به نیمساز ناحیه اول و سوم است.

۳-۲۹ توابع هیپربولیک

همان‌گونه که مقادیر توابع مثلثاتی با مختصات نقاط یک دایره در ارتباط اند، مقادیر توابع متناظر هیپربولیک نیز با مختصات نقاط یک هذلولی متساوی‌الساقین در ارتباط اند. دو تابع نمایی $X = e^x + e^{-x}/2$ و $Y = e^x - e^{-x}/2$ که در معادله هذلولی متساوی‌الساقین $X^2 - Y^2 = 1$ ، شاخه سمت راست صدق می‌کند، تابع هیپربولیک نامند. تعاریف توابع هیپربولیک در زیر آمده است:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad D_f = \mathbb{R}, \quad R_f = \mathbb{R}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad D_f = \mathbb{R}, \quad R_f = [1, +\infty)$$

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad D_f = \mathbb{R}, \quad R_f = (-1, 1)$$

$$\coth x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}, \quad D_f = \mathbb{R} - \{0\}, \quad R_f = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$$

اتحادهایی وجود دارند که توابع هیپربولیک در آن‌ها صدق می‌کنند و شبیه اتحادهایی هستند که توابع مثلثاتی در آن‌ها صادق‌اند. برخی از آن‌ها عبارتند از:

$$۱) \sec hx = \frac{1}{\cos hx}$$

$$۲) \csc hx = \frac{1}{\sin hx}$$

$$۳) \cos hx + \sin hx = e^x$$

$$۴) \cos hx - \sin hx = e^{-x}$$

$$۵) \cos h^2 x - \sin h^2 x = 1$$

$$۶) 1 - \tan h^2 x = \frac{1}{\cos h^2 x} = \sec h^2 x$$

$$۷) 1 - \cot h^2 x = \frac{-1}{\sin h^2 x} = -\csc h^2 x \quad ۸) \sin h^2 x = 2 \sin hx \cdot \cos hx$$

$$۹) \cos h^2 x = \cos h^2 x + \sin h^2 x = 2 \sin h^2 x + 1 = 2 \cos h^2 x - 1$$

$$۱۰) \sin h(x \pm y) = \sin hx \cdot \cosh y \pm \cos hx \cdot \sinh y$$

$$۱۱) \cos h(x \pm y) = \cos hx \cdot \cosh y \pm \sin hx \cdot \sinh y$$

۳-۳۰ توابع معکوس هیپربولیک

توابع معکوس هیپربولیک را به دو صورت نشان می‌دهیم:
(الف) مانند توابع مثلثاتی:

$$y = \sin hx \Leftrightarrow x = \sin h^{-1} y \Rightarrow y = \sin h^{-1} x \quad y = \cos hx \Leftrightarrow x = \cos h^{-1} y \Rightarrow y = \cos h^{-1} x$$

$$y = \tan hx \Leftrightarrow x = \tan h^{-1} y \Rightarrow y = \tan h^{-1} x \quad y = \cot hx \Leftrightarrow x = \cot h^{-1} y \Rightarrow y = \cot h^{-1} x$$

(ب) برحسب لگاریتم‌های طبیعی

$$y = \sin h^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \quad x \in \mathbb{R}$$

$$y = \cos h^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \quad x \geq 1$$

$$y = \tan h^{-1} x = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) \quad |x| < 1$$

$$y = \cot h^{-1} x = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right) \quad |x| > 1$$

(مسئله ۲۴)

مسائل نمونه فصل ۳

(۵-۱). دامنه تعریف توابع زیر را بیابید.

$$۱) f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6}$$

$$۲) f(x) = \sqrt{\frac{x}{x-1}}$$

$$۳) f(x) = \log(x^2 - 4)$$

$$۴) f(x) = 5^{(x^2 - x)/(x - x^2)}$$

$$۵) f(x) = \tan \sqrt{\frac{x-1}{1-x}}$$

(۶-۱۲). حوزه مقادیر توابع زیر را بیابید.

$$\begin{array}{llll} ۶) f(x) = -x^2 + 4 & ۷) f(x) = \frac{2x+2}{x-1} & ۸) f(x) = \sqrt{4-x^2} & ۹) f(x) = \log_7^{1/x} \\ ۱۰) f(x) = 3^{-x} & ۱۱) f(x) = \cos^2 x + 2^0 & ۱۲) f(x) = x^2 - 2x^2 \end{array}$$

۱۳. اگر $f(x + 1/x) = x^2 + 1/x^2$ باشد، $f(x)$ را بیابید.

۱۴. اگر $f(x) = \begin{cases} 2 & x < 2 \\ 0 & x \geq 2 \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 2 \\ 2+x & x > 2 \end{cases}$ باشد، $f+g$ را بیابید.

۱۵. اگر $f(x) = x+5$ و $(f \circ g)(x) = x-1$ باشد، $g(x)$ را بیابید.

۱۶. اگر $f(x) = 1/x$ و $g(x) = x/(x-1)$ باشد، دامنه تعریف $f \circ g$ را بیابید.

۱۷. یک به یک بودن و پوششی بودن تابع $y = x^2 - 3$ را بررسی کنید.

(۱۸-۱۹). معکوس توابع زیر را بیابید:

$$۱۸) f(x) = \frac{2x}{x-1} \quad ۱۹) f(x) = \frac{2e^x + 1}{e^x - 1}$$

(۲۰-۲۲). زوج و فرد بودن توابع زیر را تعیین کنید:

$$۲۰) f(x) = x^2 - 3 \quad ۲۱) f(x) = 2x^0 - 4x^2 + x \quad ۲۲) f(x, y) = y - x^2$$

۲۳. جواب معادله $[x] + [x+2] = 12$ را بیابید.

۲۴. عبارت $\tan^{-1}(-2/3)$ را برحسب لگاریتم طبیعی بنویسید.

پاسخ مسائل نمونه فصل ۳

۱.

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow (x-2)(x-3) = 0 \Rightarrow x=2, x=3 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{2, 3\}$$

۲.

$$\frac{x}{x-1} \geq 0, x-1 \neq 0 \Rightarrow x=0, x=1$$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
x	$-$	0	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	0	$+$
$x/(x-1)$	$+$	0	$-\infty$	$+$

$$D_f = \{x | x > 1 \text{ یا } x \leq 0\}$$

$$D_f = (-\infty, 0] \cup (1, +\infty)$$

۳.

$$x^2 - 4 > 0 \Rightarrow x^2 > 4 \Rightarrow |x| > 2 \Rightarrow x > 2 \text{ یا } x < -2$$

$$D_f = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$$

۴.

$$x - x^2 = 0 \Rightarrow x(1-x) = 0 \Rightarrow x=0, x=1 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{0, 1\}$$

۵.

$$\frac{x-1}{1-x} \geq 0 \Rightarrow \frac{x-1}{-(x-1)} \geq 0 \Rightarrow D_f = \emptyset$$

۶.

$$y = -x^2 + 4 \Rightarrow x^2 = 4 - y \Rightarrow x = \pm \sqrt{4 - y}$$

$$4 - y \geq 0 \Rightarrow y \leq 4 \Rightarrow R_f = (-\infty, 4]$$

۷.

$$y = \frac{2x+2}{x-1} \Rightarrow yx - y = 2x + 2 \Rightarrow yx - 2x = y + 2 \Rightarrow$$

$$(y-2)x = y+2 \Rightarrow x = \frac{y+2}{y-2}, \quad y-2=0 \Rightarrow y=2, \quad R_f = \mathbb{R} - \{2\}$$

۸. از ضابطه تابع نتیجه می شود $y \geq 0$ و با توجه به $D_f = [-2, 2]$ داریم:

$$y^2 = 4 - x^2 \Rightarrow x^2 = 4 - y^2 \Rightarrow x = \pm \sqrt{4 - y^2}$$

$$\begin{cases} y \geq 0 \\ 4 - y^2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ y^2 \leq 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ -2 \leq y \leq 2 \end{cases} \Rightarrow R_f = [0, 2]$$

۹.

$$y = \log_r^{1/x} \Rightarrow y = \log_r x^{-1} \Rightarrow y = -\log_r x, \quad D_f = \mathbb{R}$$

$$y = -\log_r x \Rightarrow x = r^{-y}, \quad x > 0 \Rightarrow y \in \mathbb{R} \Rightarrow R_f = \mathbb{R}$$

۱۰.

$$y = r^{-x} \Rightarrow y = \frac{1}{r^x} \Rightarrow r^x = \frac{1}{y} \Rightarrow x = \log_r^{1/y}, \quad \frac{1}{y} > 0 \Rightarrow y > 0 \Rightarrow R_f = \mathbb{R}^+$$

۱۱.

$$y = \cos^2 x + 2^0, \quad 0 \leq \cos^2 x \leq 1 \Rightarrow 0 + 2^0 \leq \cos^2 x + 2^0 \leq 1 + 2^0$$

$$2^0 \leq \cos^2 x + 2^0 \leq 2^1 \Rightarrow 2^0 \leq y \leq 2^1 \Rightarrow R_f = [2^0, 2^1]$$

۱۲.

$$f'(x) = 4x^3 - 4x = 0 \Rightarrow 4x(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \text{یا} \quad x = \pm 1$$

$$f(0) = 0, \quad f(1) = -1, \quad f(-1) = -1, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$$

بنابراین $f(1) = f(-1) = -1$ می نیمم مطلق است و در نتیجه $R_f = [-1, +\infty)$

۱۳.

$$x + \frac{1}{x} = t \Rightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = t^2 \Rightarrow x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = t^2 \Rightarrow$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2, \quad f(t) = t^2 - 2 \Rightarrow f(x) = x^2 - 2$$

$$(f+g)(x) = \begin{cases} ۲+۰ & x < ۲ \\ ۰+۲+x & x > ۲ \\ ۰+۰ & x = ۲ \end{cases} \Rightarrow (f+g)(x) = \begin{cases} ۲ & x < ۲ \\ ۰ & x = ۲ \\ ۲+x & x > ۲ \end{cases} \quad .۱۴$$

$$(f \circ g)(x) = x - ۱ \Rightarrow f(g(x)) = x - ۱ \Rightarrow g(x) + ۵ = x - ۱ \Rightarrow g(x) = x - ۶ \quad .۱۵$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{۱}{\frac{x-۱}{x-۱}} = \frac{x-۱}{x}, D_{f \circ g} = \mathbb{R} - \{۰, ۱\} \quad .۱۶$$

$$f(x_۱) = f(x_۲) \Rightarrow x_۱^۲ - ۳ = x_۲^۲ - ۳ \Rightarrow x_۱^۲ = x_۲^۲ \Rightarrow x_۱ = x_۲ \quad .۱۷$$

تابع مفروض یک به یک است.

$$\forall y \in B, \exists x \in D_f | f(x) = y$$

$$\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R} | x^۲ - ۳ = y$$

$$x^۲ - ۳ = b, (b \in \mathbb{R}) \Rightarrow x^۲ = b + ۳ \Rightarrow x = \sqrt{b+۳}$$

تابع مفروض پوششی است.

$$y = \frac{۲x}{x-۱}, x = \frac{۲y}{y-۱} \Rightarrow xy - x = ۲y \Rightarrow y(x-۲) = x \Rightarrow$$

$$y = \frac{x}{x-۲} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x}{x-۲}$$

$$y = \frac{۲e^x + ۱}{e^x - ۱}, x = \frac{۲e^y + ۱}{e^y - ۱} \Rightarrow xe^y - x = ۲e^y + ۱ \Rightarrow$$

$$e^y(x-۲) = x+۱ \Rightarrow e^y = \frac{x+۱}{x-۲} \Rightarrow \ln e^y = \ln \frac{x+۱}{x-۲} \Rightarrow$$

$$y \ln e = \ln \frac{x+۱}{x-۲} \Rightarrow y = \ln \frac{x+۱}{x-۲} \Rightarrow f^{-1}(x) = \ln \frac{x+۱}{x-۲}$$

$$f(-x) = (-x)^۲ - ۳ = x^۲ - ۳ \Rightarrow f(-x) = f(x) \quad \text{زوج} \quad .۲۰$$

$$f(-x) = ۲(-x)^۵ - ۳(-x)^۲ + (-x) = -(۲x^۵ - ۳x^۲ + x) \Rightarrow f(-x) = -f(x) \quad \text{فرد} \quad .۲۱$$

$$f(-x, y) = y - (-x)^۲ = y + x^۲ \Rightarrow f(-x, y) \neq f(x, y) \quad \text{زوج نیست}$$

$$f(-x, -y) = -y - (-x)^۲ = -y + x^۲ = -(y - x^۲) \Rightarrow f(-x, -y) = -f(x, y) \quad \text{فرد} \quad .۲۲$$

۲۳

$$[x] + [x + 2] = 12 \Rightarrow [x] + [x] + 2 = 12 \Rightarrow 2[x] = 10 \Rightarrow [x] = 5 \Rightarrow 5 \leq x < 6$$

۲۴

$$\tan h^{-1} \left(-\frac{2}{3} \right) = \frac{1}{2} \ln \frac{1 - \frac{2}{3}}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{1}{2} \ln \frac{\frac{1}{3}}{\frac{5}{3}} = \frac{1}{2} \ln \frac{1}{5} = -\frac{1}{2} \ln 5$$

سؤالات تستی فصل ۳

۱- کدامیک از رابطه‌های زیر یک تابع است؟

$f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} | y^2 = 2x + 1\}$ (۲)

$f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} | x < y\}$ (۱)

$f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} | y^2 = x\}$ (۴)

$f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} | x + y > 4\}$ (۳)

۲- کدامیک از رابطه‌های زیر یک تابع است؟

$\{(x, y) | x^2 + y^2 = 5, x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N}\}$ (۲)

$\{(x, y) | x^2 + y^2 = 5, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$ (۱)

$\{(x, y) | x^2 + y^2 = 5, x \in \mathbb{Q}, y \in \mathbb{Q}\}$ (۴)

$\{(x, y) | x^2 + y^2 = 5, x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z}\}$ (۳)

۳- اگر $m = -1$ باشد، کدامیک از مجموعه‌های زیر بیانگر یک تابع است؟

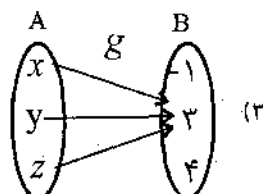
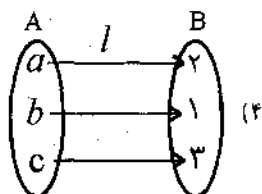
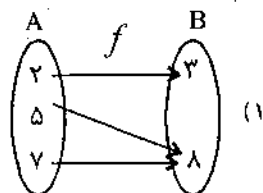
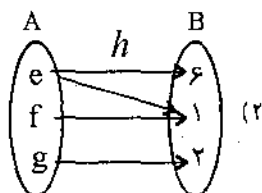
$\{(m^2, m^2), (m^2, 1), (m, -1)\}$ (۲)

$\{(m^2, -1), (2, m), (m, -1)\}$ (۱)

$\{(m - 1, 2), (-2, m), (m, 2)\}$ (۴)

$\{(-1, 2), (m, m^2), (m^2, 4)\}$ (۳)

۴- کدامیک از اشکال زیر نمودار یک تابع نمی‌باشد؟



۵- کدامیک از نمودارهای زیر می‌تواند نمایش یک تابع باشد؟

(۴) سهمی

(۳) بیضی

(۲) دایره

(۱) هذلولی

۶- دامنه تابع با ضابطه $f(x) = 1/\sqrt{x} - 3$ کدام است؟

$(0, +\infty)$ (۴)

$[4, +\infty)$ (۳)

$[3, +\infty)$ (۲)

$(2, +\infty)$ (۱)

۷- دامنه تابع با ضابطه $f(x) = \log \left(\frac{x^2 - 1}{x - 1} \right)$ کدام است؟

$(-2, 2) \cup (2, +\infty)$ (۴) $(0, 1) \cup (1, +\infty)$ (۳) $(-1, 1) \cup (2, +\infty)$ (۲) $(-1, 1) \cup (1, +\infty)$ (۱)

۸- دامنه تابع با ضابطه $f(x) = \text{Arcsin}(\sin(x^2/x))$ کدام است؟

$$\mathbb{R} - \{1\} \quad (۴) \quad \mathbb{R} \quad (۳) \quad \mathbb{R} - \{0\} \quad (۲) \quad [-1, 1] \quad (۱)$$

۹- دامنه تابع با ضابطه $f(x) = \frac{[3-x] + [-x]}{[3-x] + [1-x]}$ کدام است؟

$$(-\infty, +\infty) \quad (۴) \quad (-\infty, 1) \cup [2, +\infty) \quad (۳) \quad (1, 2) \cup (2, +\infty) \quad (۲) \quad (-\infty, 1) \cup (2, +\infty) \quad (۱)$$

۱۰- دامنه تابع با ضابطه $f(x) = \log_{x-1} x$ کدام است؟

$$(1, +\infty) \quad (۴) \quad (-\infty, 2) \cup (2, +\infty) \quad (۳) \quad (-\infty, 1) \cup [1, 2) \quad (۲) \quad (-\infty, -1) \cup (1, 2) \quad (۱)$$

۱۱- دامنه تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{\ln(5x - x^2)}/4$ کدام است؟

$$[4, 1) \quad (۴) \quad [1, 4] \quad (۳) \quad (1, 4] \quad (۲) \quad (1, 4) \quad (۱)$$

۱۲- دامنه تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{(x^2 - 2x)/(x - 2)} + \sqrt{(x^2 - 4x)/(x - 4)}$ کدام است؟

$$(2, 4) \cup (4, +\infty) \quad (۲) \quad [0, 2) \cup (4, +\infty) \quad (۱) \\ [0, 2) \cup (2, 4) \cup (4, +\infty) \quad (۴) \quad (0, 2) \cup (2, 4) \cup (4, +\infty) \quad (۳)$$

۱۳- دامنه تابع با ضابطه $y = \text{Arc cos}(\log x/10)$ کدام است؟

$$\{x | 0.1 \leq x < 10\} \quad (۲) \quad \{x | 1 \leq x \leq 100\} \quad (۱) \\ \{x | 10 \leq x \leq 100\} \quad (۴) \quad \{x | 1 \leq x \leq 10\} \quad (۳)$$

۱۴- اگر $f(x) = x^2/(1+x^2)$ و $g(x) = 1/\sqrt{x^2 - x}$ ، آنگاه دامنه تعریف تابع $g \circ f$ کدام است؟

$$(-1, +\infty) \quad (۴) \quad [0, +\infty) \quad (۳) \quad \phi \quad (۲) \quad \mathbb{R} \quad (۱)$$

۱۵- اگر $f\left(\frac{x-1}{x}\right) = \sqrt{2x-1}$ باشد، دامنه تابع $f(x)$ کدام است؟

$$[-1, 0) \quad (۴) \quad [1, +\infty) \quad (۳) \quad [-1, 1) \quad (۲) \quad [0, 1) \quad (۱)$$

۱۶- دامنه تعریف تابع با ضابطه $f(x) = \log(2+3x) - \log(3-2x)$ کدام است؟

$$\{x | x > -\frac{2}{3}\} \quad (۲) \quad \{x | x < \frac{3}{2}\} \quad (۱) \\ \left\{x | -\frac{2}{3} < x < \frac{3}{2}\right\} \quad (۴) \quad \left\{x | \frac{2}{3} < x < -\frac{3}{2}\right\} \quad (۳)$$

۱۷- دامنه تابع با ضابطه $y = \text{Arcsin}(1-x) + \log(\log x)$ کدام است؟

$$[1, 2) \quad (۴) \quad (1, 2) \quad (۳) \quad [1, 2] \quad (۲) \quad (1, 2] \quad (۱)$$

۱۸- دامنه تابع با ضابطه $f(x) = \cot(x - \pi/3)$ کدام است؟

$$\mathbb{R} - \{x | x = k\pi\} \quad (۲) \quad \mathbb{R} - \left\{x | x = k\pi + \frac{\delta\pi}{9}\right\} \quad (۱) \\ \mathbb{R} - \left\{x | x = k\pi + \frac{\pi}{3}\right\} \quad (۴) \quad \mathbb{R} - \left\{x | x = k\pi + \frac{\pi}{9}\right\} \quad (۳)$$

۱۹- دامنه تابع با ضابطه $f(x) = \log_2 \log_2 \log_2^2 x$ کدام است؟

$$\text{هیچکدام} \quad (۴) \quad (-\infty, +\infty) \quad (۳) \quad (4, +\infty) \quad (۲) \quad [4, +\infty) \quad (۱)$$

۲۰- دامنه تابع با ضابطه $f(x) = 1/\sqrt{|x+1|-4}$ کدام است؟

$$(-\infty, +\infty) \quad (۴) \quad (-\infty, 3) \cup (5, +\infty) \quad (۳) \quad [3, 5) \quad (۲) \quad (-\infty, -5) \cup (3, +\infty) \quad (۱)$$

۲۱- دامنه تابع با ضابطه $f(x) = 2x/\ln(1-x) + \sqrt{x+1}$ کدام است؟

$$\mathbb{R}^+ \quad (1) \quad (-1, 1) \quad (2) \quad (1, -1) \quad (3) \quad (4)$$

۲۲- توابع f و g با ضابطه‌های $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ و $g(x) = \sqrt{x}$ مفروض‌اند. دامنه تعریف تابع $(f+g) \circ f$ کدام است؟

$$\mathbb{R} \quad (1) \quad [0, 1] \quad (2) \quad [-1, 0] \quad (3) \quad (4)$$

۲۳- دامنه تابع با ضابطه $y = \text{Arcsin} \frac{x-3}{4} - \ln(4-x)$ کدام است؟

$$[1, 5] \quad (1) \quad [1, 4] \quad (2) \quad (1, 4) \quad (3) \quad (4)$$

۲۴- دامنه تابع با ضابطه $f(x) = \frac{1}{[|x|]-1}$ کدام است؟

$$\mathbb{R} \quad (1) \quad \mathbb{R} - \{[-2, -1] \cup [1, 2]\} \quad (2) \quad \mathbb{R} - \{[-2, -1] \cup [1, 2]\} \quad (3) \quad \mathbb{R} - \{[-2, -1] \cup [1, 2]\} \quad (4)$$

۲۵- توابع $f(x) = x/(1-|x|)$ و $g(x) = \sqrt{x}$ مفروضند. دامنه تعریف تابع $g \circ f$ کدام است؟

$$[-1, 0] \cup (1, +\infty) \quad (1) \quad (-\infty, -1) \cup [0, 1] \quad (2) \quad (3)$$

$$(-\infty, -1) \cup [1, +\infty) \quad (4) \quad (-\infty, 0) \cup [1, +\infty) \quad (3)$$

۲۶- برد تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} 3x+2 & x \geq -2 \\ \delta x & x < -2 \end{cases}$ کدام است؟

$$\mathbb{R} - [-10, -4] \quad (1) \quad \mathbb{R} - [-10, -4] \quad (2) \quad \mathbb{R} - [-10, -4] \quad (3) \quad \mathbb{R} - [-10, -4] \quad (4)$$

۲۷- دامنه تعریف تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{\log(\sin x)}$ کدام است؟

$$\left\{2k\pi - \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\} \quad (1) \quad \left\{2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\} \quad (2) \quad \mathbb{R} \quad (3) \quad \left\{2k\pi - \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\} \quad (4)$$

۲۸- اگر $g = \{(0, 5), (2, 11), (3, 14)\}$ و $f = \{(5, 7), (9, 15), (11, 19)\}$ باشد، $g \circ f$ کدام است؟

$$\{(0, 7), (2, 19)\} \quad (1) \quad \{(0, 2)\} \quad (2) \quad \{(0, 7)\} \quad (3) \quad \{(0, 7)\} \quad (4)$$

۲۹- دامنه تابع با ضابطه $f(x) = x\sqrt{x - \sqrt{2x-1}}$ کدام است؟

$$\left[\frac{1}{2}, +\infty\right) \quad (1) \quad \left(\frac{1}{2}, +\infty\right) \quad (2) \quad [1, +\infty) \quad (3) \quad (1, +\infty) \quad (4)$$

۳۰- اگر $f(x) = (x-2)/(x-1)$ و $g(x) = 2x/(x-3)$ باشد، $D_{f \circ g}$ کدام است؟

$$\mathbb{R} - \{0, 2, -4\} \quad (1) \quad \mathbb{R} - \{2, -4\} \quad (2) \quad \mathbb{R} - \{4\} \quad (3) \quad \mathbb{R} - \{-4\} \quad (4)$$

۳۱- برد تابع با ضابطه $f(x) = 2^{-x^2}$ کدام است؟

$$\mathbb{R} \quad (1) \quad (0, 1) \quad (2) \quad (0, 1) \quad (3) \quad (0, 1) \quad (4)$$

۳۲- توابع با ضابطه‌های $f(x) = x+1$ و $(f \circ g)(x) = 2/(x-1)$ مفروضند. حوزه مقادیر تابع $g \circ f$ کدام است؟

$$\mathbb{R} - \{0\} \quad (1) \quad \mathbb{R} - \{-1\} \quad (2) \quad \mathbb{R} \quad (3) \quad \mathbb{R}^+ \quad (4)$$

۳۳- حوزه مقادیر تابع با ضابطه $f(x) = (x^2+2)/\sqrt{x^2+1}$ کدام است؟

$$\mathbb{R} \quad (1) \quad [2, +\infty) \quad (2) \quad \mathbb{R}^+ \quad (3) \quad [0, +\infty) \quad (4)$$

۳۴- حوزه مقادیر تابع با ضابطه $y = f(x) = (x^6 - x^9)/(x^6 + x^9)$ کدام است؟

$$\mathbb{R} - \{0, -1\} \quad (1) \quad \mathbb{R} - \{-1, 1\} \quad (2) \quad \mathbb{R} - \{0, 1\} \quad (3) \quad \{\} \quad (4)$$

$$-۳۵ \quad \text{تابع} \quad f(x) = \begin{cases} x-1 & x < 2 \\ 2x+1 & x \geq 2 \end{cases} \quad \text{فرد است، برد } f \text{ کدام است؟}$$

$$(-\infty, 2) \cup [2, +\infty) \quad (4) \quad (-\infty, 2) \quad (1) \quad [2, +\infty) \quad (2) \quad (-\infty, 2) \quad (3)$$

$$-۳۶ \quad \text{حوزه مقادیر تابع با ضابطه} \quad f(x) = \frac{x}{[x-1] + [1-x]}$$

$$\mathbb{R} \quad (4) \quad \mathbb{R} - \{1\} \quad (3) \quad Z \quad (2) \quad \mathbb{R} - Z \quad (1)$$

$$-۳۷ \quad \text{دامنه و برد تابع با ضابطه} \quad y = f(x) = \sqrt{-|x+1|} \quad \text{فرد است؟}$$

$$R_f = \{0\}, D_f = \{-1\} \quad (4) \quad R_f = \{-1\}, D_f = \{0\} \quad (1)$$

$$R_f = \mathbb{R}^+, D_f = \mathbb{R}^+ \quad (4) \quad R_f = \{1\}, D_f = \mathbb{R}^+ \quad (3)$$

$$-۳۸ \quad \text{برد تابع با ضابطه} \quad f = \{(x, y) | y = \ln(x^2 + 1), x \in \mathbb{R}\}$$

$$(-\infty, +\infty) \quad (4) \quad [0, +\infty) \quad (3) \quad [1, +\infty) \quad (2) \quad (0, +\infty) \quad (1)$$

$$-۳۹ \quad \text{برد تابع } f \text{ با ضابطه} \quad f(x) = x^{100} - 100x + 99 \quad \text{فرد است؟}$$

$$(-\infty, 0) \quad (4) \quad (-\infty, 0] \quad (3) \quad (0, +\infty) \quad (2) \quad [0, +\infty) \quad (1)$$

$$-۴۰ \quad \text{حوزه مقادیر تابع } f \text{ با ضابطه} \quad y = f(x) = (x^2 + 3x^2 + 2x)/(x^2 + x)(x^2 - 4) \quad \text{فرد است؟}$$

$$\mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}\right\} \quad (4) \quad \mathbb{R} - \{0, -1, -2, 2\} \quad (1)$$

$$\mathbb{R} - \{-1, -2, 2\} \quad (4) \quad \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, 0\right\} \quad (3)$$

$$-۴۱ \quad \text{حوزه مقادیر تابع با ضابطه} \quad f(x) = (2x^2 + 1)/(x^2 + 1) \quad \text{فرد است؟}$$

$$(1, 2) \quad (4) \quad (1, 2] \quad (3) \quad [1, 2] \quad (2) \quad [1, 2) \quad (1)$$

$$-۴۲ \quad \text{برد تابع با ضابطه} \quad f(x) = 2 \cos(\log(\log x)) \quad \text{فرد است؟}$$

$$(0, 2] \quad (4) \quad \mathbb{R}^+ \quad (3) \quad [-2, 2] \quad (2) \quad (2, +\infty) \quad (1)$$

$$-۴۳ \quad \text{حوزه مقادیر تابع با ضابطه} \quad f(x) = \log_A(x^2+1) + \log_A^{A/(x^2+1)} + \log_r^{1/r} \quad \text{فرد است؟}$$

$$\left\{-\frac{1}{2}\right\} \quad (4) \quad \{7\} \quad (3) \quad \{1\} \quad (2) \quad \{0\} \quad (1)$$

$$-۴۴ \quad \text{برد تابع با ضابطه} \quad f(x) = 2x - 2[x] + 1 \quad \text{فرد است؟}$$

$$[0, 2] \quad (4) \quad [0, 2) \quad (3) \quad [1, 2) \quad (2) \quad (-\infty, 2] \quad (1)$$

$$-۴۵ \quad \text{حوزه مقادیر تابع با ضابطه} \quad f(x) = |x-1| + |x| + |x+1| \quad \text{فرد است؟}$$

$$(0, 3) \quad (4) \quad [3, +\infty) \quad (3) \quad [2, +\infty) \quad (2) \quad \mathbb{R}^+ \quad (1)$$

$$-۴۶ \quad \text{حوزه مقادیر تابع با ضابطه} \quad f(x) = \text{Arc cos}(\tan x \cdot \cot x) \quad \text{فرد است؟}$$

$$[0, \pi] \quad (4) \quad \{0\} \quad (3) \quad \{1\} \quad (2) \quad \emptyset \quad (1)$$

$$-۴۷ \quad \text{برد تابع} \quad f(x) = \begin{cases} x/[x] & x < 0 \\ 0 & x \geq 0 \end{cases} \quad \text{فرد است؟}$$

$$(-\infty, 0] \quad (4) \quad [0, 1) \quad (3) \quad [0, 1] \quad (2) \quad [0, +\infty) \quad (1)$$

۴۸- اگر $f(x) = x^2 + 2x + 1$ و $(g \circ f)(x) = |x + 1|$ باشد، $g(4)$ کدام است؟

- ۱ (۴) $\sqrt{2}$ (۳) ۴ (۲) ۲ (۱)

۴۹- اگر $f(x) = x/(x-1)$ باشد، کدام رابطه زیر نادرست است؟

- $f(-x) = \frac{x}{x+1}$ (۴) $f\left(\frac{1}{f(x)}\right) = x-1$ (۳) $f(f(x)) = x$ (۲) $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{1-x}$ (۱)

۵۰- اگر $f(x + 1/x) = x^2 + 1/x^2 + 2$ ، آنگاه $f(x)$ کدام است؟

- $x^2 + 2x + 2$ (۴) $x^2 + 2x - 2$ (۳) $x^2 - 2x + 2$ (۲) $x^2 - 2x$ (۱)

۵۱- اگر $g(x) = 1 + 1/x$ و $(g \circ f)(x) = x$ باشد، $(f \circ g)(x)$ کدام است؟

- $\frac{2}{x}$ (۴) $1-x$ (۳) $\frac{1}{x}$ (۲) x (۱)

۵۲- در تابع با ضابطه $f(x) = (ax+b)/(cx+d)$ اگر $d = -a$ باشد، $f \circ f$ کدام است؟

- x (۴) $a-d$ (۳) $a-b$ (۲) $ax+b$ (۱)

۵۳- اگر $f(x) = x^2$ ، $g(x) = \sin x$ و $h(x) = \cos x$ باشد، $f \circ h - f \circ g$ برابر است با:

- $(h(x))^2$ (۴) ۱ (۳) $h(2x)$ (۲) $2h(x)$ (۱)

۵۴- اگر $f(2x+1) = (2x^2)/(x-2)$ باشد، $f(7)$ برابر است با:

- نامعین (۴) ۰ (۳) ۲ (۲) ۸ (۱)

۵۵- کدام تساوی صحیح است؟

- هیچکدام (۴) $\operatorname{sgn}(x) = |x|$ (۳) $|x|\operatorname{sgn}(x) = -x$ (۲) $x.\operatorname{sgn}(x) = |x|$ (۱)

۵۶- اگر $f(x) = \begin{cases} x & \text{گویا} \\ -1 & \text{اگر } x \text{ گنگ} \end{cases}$ باشد، تابع f^2 کدام است؟

- بی‌نهایت (۴) $-1, 1$ (۳) ۱ (۲) -1 (۱)

۵۷- اگر $f(x) = \begin{cases} 1+x & x \leq 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} 1+x & x < 1 \\ 0 & x \geq 1 \end{cases}$ باشد، $f+g$ برابر است با:

- $\begin{cases} 1+x & x < 1 \\ -1+x & x = 1 \\ -2 & x > 1 \end{cases}$ (۲) $\begin{cases} -1-x & x < 1 \\ -2-x & x = 1 \\ -2 & x > 1 \end{cases}$ (۱)

- $\begin{cases} 1+x & x < 1 \\ 1-x & x = 1 \\ -2 & x > 1 \end{cases}$ (۴) $\begin{cases} 1-x & x < 1 \\ 2-x & x = 1 \\ -2 & x > 1 \end{cases}$ (۳)

۵۸- تابع $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ به گونه‌ای است که $(g(x))^2 = 1$ ، چند تابع از این گونه وجود دارد؟

- هیچکدام (۴) بی‌شمار (۳) ۴ (۲) ۲ (۱)

۵۹- اگر $f(x) = \begin{cases} [x] + 1 & x \geq 1 \\ x-1 & x < 1 \end{cases}$ ، آنگاه $(f \circ f \circ f)(1/5)$ کدام است؟

- $4/5$ (۴) ۴ (۳) ۳ (۲) $1/5$ (۱)

۶۰- اگر $f(x) = (x+2)/(x-3)$ و $g(x) = 1/x$ باشد، $(g \circ f)(x)$ کدام است؟

(۱) $\frac{x-1}{x-3}$ (۲) $\frac{2+x}{x-1}$ (۳) $\frac{1-x}{2-3x}$ (۴) $\frac{x-1}{2x-2}$

۶۱- اگر $f(x) = x-1$ و $g(x) = x^2-1$ باشد، جواب‌های معادله $g \circ f = 0$ کدام است؟

(۱) $\{0, 2\}$ (۲) $\{0, -2\}$ (۳) $\{2\}$ (۴) $\{0\}$

۶۲- اگر $f\left(\frac{e^x+1}{2e^x-1}\right) = x$ باشد، $f(2)$ کدام است؟

(۱) e^{-1} (۲) e (۳) 1 (۴) صفر

۶۳- مقدار $g(x) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ در صورتی که $f(x) = ax-b$ باشد، کدام است؟

(۱) ax (۲) ah (۳) a (۴) $\frac{1}{h}$

۶۴- فرض کنید $f(x) = (a^x + a^{-x})/2$ ، $a > 0$ در این صورت حاصل $f(x+y) + f(x-y)$ برحسب $f(x)$ و $f(y)$ کدام است؟

(۱) $4f(x) \cdot f(y)$ (۲) $2f(x) \cdot f(y)$ (۳) $\frac{1}{4}f(x) \cdot f(y)$ (۴) $f(x) - f(y)$

۶۵- اگر $f = \{(1, 3), (2, 4)\}$ و $g = \{(-1, 1), (3, 2), (4, 7)\}$ باشد، آنگاه کدام رابطه نادرست است؟

(۱) $(g \circ f)(1) = 2$ (۲) $(f \circ g)(-1) = 3$ (۳) $(g \circ f)(2) = 3$ (۴) $(f \circ g)(3) = 4$

۶۶- اگر $f(x) = e^{-x}$ و $g(x) = \ln \sqrt{x}$ ، آنگاه $(g \circ f)(x)$ کدام است؟

(۱) $\frac{x}{2}$ (۲) $-\frac{x}{2}$ (۳) $-\frac{x}{2}c$ (۴) $\frac{x}{2}c$

۶۷- فرض کنید $h(x) = (x-1)(x+1)g(x) + f(x)$ ، در صورتی که $h(1) = 4$ و $h(-1) = 2$ باشد، $f(x)$ کدام است؟

(۱) $x-3$ (۲) $x+3$ (۳) $-x+3$ (۴) $-x-3$

۶۸- اگر $f(x, y) = 2xy/(x^2+y^2)$ باشد، $f(1, y/x)$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{f(x, y)}$ (۲) $f(x, y)$ (۳) $2f(x, y)$ (۴) هیچ‌کدام

۶۹- اگر $f(x+y, x-y) = x/y$ باشد، $f(2, 1)$ کدام است؟

(۱) 3 (۲) 1 (۳) -3 (۴) 0

۷۰- اگر $f(x) = ax+b$ و $ff(x) = 2-x$ باشد، a و b کدامند؟

(۱) $b=2, a=-1$ (۲) $b=-2, a=1$ (۳) $a=b=1$ (۴) $a=b=2$

۷۱- تابع $f = \{(x, y) | y = (2x+3)/x, x, y \in \mathbb{N}\}$ چند عضو دارد؟

(۱) 1 (۲) 2 (۳) 3 (۴) بی‌شمار

۷۲- در توابع $f(x) = ax+b$ و $g(x) = cx+d$ ، ثابت‌های a, b, c, d در چه شرطی باید صدق کنند تا $f \circ g$ و $g \circ f$ یکی باشند؟

(۱) $ad - cb = d - b$ (۲) $ad + b \neq cb + d$ (۳) $ad = cb$ (۴) $\frac{a}{d} = \frac{c}{b}$

۷۳- اگر $f(x) = (x+2)/(x-2)$ و $g(x) = (1+x^2)/x$ و $h(x) = (1-x)/(1+x)$ باشد، $(f \circ g \circ h)(0)$ کدام است؟

(۱) 1 (۲) 2 (۳) 4 (۴) نامعین

۷۴- تابع f به صورت $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & x > 0 \\ 1 & x = 0 \\ 1/(x-1) & x < 0 \end{cases}$ تعریف شده است، کدام تساوی نادرست است؟

$m \neq 0, f(m^2) = |m|$ (۲) $f(-2) = -\frac{1}{2}$ (۱)
 $f(m^2 + 1) = \sqrt{m^2 + 1}$ (۴) $f(m^2 - 1) = \sqrt{m^2 - 1}$ (۳)

۷۵- تابع f با ضابطه $f(x) = \text{sgn}(x^2 - 1)$ برابر است با:

$\begin{cases} -1 & -1 < x < 1 \\ 0 & x = \pm 1 \\ 1 & x < -1 \text{ یا } x > 1 \end{cases}$ (۲) $\begin{cases} -1 & -1 < x < 1 \\ 0 & x = 1 \\ 1 & x < -1 \text{ یا } x > 1 \end{cases}$ (۱)
 $\begin{cases} 1 & -1 < x < 1 \\ 0 & x = -1 \\ -1 & x < -1 \text{ یا } x > 1 \end{cases}$ (۴) $\begin{cases} 1 & -1 < x < 1 \\ 0 & x = \pm 1 \\ -1 & x > 0 \text{ یا } x < 1 \end{cases}$ (۳)

۷۶- اگر $f(x) = x^2 + 2x + 2$ و $(f \circ g)(x) = x^2 - 4x + 5$ باشد، $g(x)$ کدام است؟

$g(x) = 1 + x$ یا $g(x) = x - 2$ (۲) $g(x) = 1 - x$ یا $g(x) = x + 3$ (۱)
 $g(x) = 1 - x$ یا $g(x) = 2 - x$ (۴) $g(x) = 1 - x$ یا $g(x) = x - 2$ (۳)

۷۷- مقادیر a و b را در تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ چنان تعیین کنید که داشته باشیم: $f(x+1) - f(x) = 8x + 3$

$b = 4, a = -1$ (۴) $b = 1, a = 4$ (۳) $b = 1, a = -4$ (۲) $b = -1, a = 4$ (۱)

۷۸- اگر $f(x) = 2x - |x|$ و $g(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ x & x < 0 \end{cases}$ باشد، تابع $f \circ g$ کدام است؟

$\begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$ (۴) $\begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ \frac{1}{x} & x < 0 \end{cases}$ (۳) $\begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ 2x & x < 0 \end{cases}$ (۲) $\begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ 3x & x < 0 \end{cases}$ (۱)

۷۹- اگر $f(g(x)) = (x^2 + 1)/(x^2 - 4)$ و $g(x) = (x - 1)/x$ باشد، آنگاه $f(x)$ کدام است؟

$x^2 - 4$ (۴) $x^2 + 4$ (۳) $x^2 + 2$ (۲) $x^2 - 2$ (۱)

۸۰- اگر $f(x) = x/(1 - x)$ ، آنگاه $(f(x) + f(-x))/2$ برابر است با:

$\frac{1}{x} f(x)$ (۴) $2f(x)$ (۳) $f^2(x)$ (۲) $f(x^2)$ (۱)

۸۱- اگر $f(4 - x) + 2f(x - 4) = 2x$ باشد، $f(x)$ کدام است؟

$4x + 2$ (۴) $2x + 4$ (۳) $4x - 2$ (۲) $2x - 4$ (۱)

۸۲- اگر $f(x) = (x + |x|)/2$ و $g(x) = \begin{cases} x & x < 0 \\ x^2 & x \geq 0 \end{cases}$ باشد، $(f \circ g)(x)$ کدام است؟

$\begin{cases} 0 & x < 0 \\ x & x \geq 0 \end{cases}$ (۴) $\begin{cases} 1 & x < 0 \\ x^2 & x \geq 0 \end{cases}$ (۳) $\begin{cases} x & x < 0 \\ x^2 & x \geq 0 \end{cases}$ (۲) $\begin{cases} 0 & x < 0 \\ x^2 & x \geq 0 \end{cases}$ (۱)

۸۳- اگر $\frac{x^2}{x^2 + x + 1} = f\left(\frac{x}{x^2 + x + 1}\right)$ باشد، $f(x)$ کدام است؟

$$\frac{x^2}{1+x^2} \quad (۴) \quad \frac{x}{1-2x} \quad (۳) \quad \frac{x}{1-x^2} \quad (۲) \quad \frac{x^2}{1-2x} \quad (۱)$$

۸۴- $f(x)$ تابعی از درجه اول نسبت به x بوده و $(f \circ f)(x) = x + 2$ ، مقدار $f(2)$ کدام است؟

$$۴ \quad (۴) \quad ۳ \quad (۳) \quad ۲ \quad (۲) \quad ۱ \quad (۱)$$

۸۵- اگر $f(x) = 1/x^2$ و $g(x) = \sqrt{x-1}$ و $h(x) = \sqrt{x}$ ، آنگاه $f \circ h \circ g(x)$ کدام است؟

$$\frac{1}{\sqrt{x-1}} \quad (۴) \quad x-1 \quad (۳) \quad \frac{1}{x-1} \quad (۲) \quad \sqrt{x-1} \quad (۱)$$

۸۶- اگر $f(x) = x/(x+1)$ باشد، مقدار $f(nx)/f \circ f \circ \dots \circ f(x)$ کدام است؟

$$\frac{n}{n+1} \quad (۴) \quad \frac{nx}{x+1} \quad (۳) \quad nx \quad (۲) \quad n \quad (۱)$$

۸۷- اگر $f(x) = x^2 + mx - 2m$ باشد، به ازای کدام مقدار m شرط $f \circ f \circ f(1) = 0$ برقرار است؟

$$\frac{1}{3} \quad (۴) \quad ۲ \quad (۳) \quad \frac{1}{6} \quad (۲) \quad \frac{1}{4} \quad (۱)$$

۸۸- اگر $f(x) = ax^2 + bx + c$ و $f(x) = 11$ و $f(-11) = 11$ باشد، آنگاه $f(11)$ کدام است؟

$$-۲۵ \quad (۴) \quad ۲۵ \quad (۳) \quad -۱۱ \quad (۲) \quad ۱۱ \quad (۱)$$

۸۹- اگر $f(x)$ یک تابع ثابت باشد، کدام یک از روابط زیر همواره درست است؟

$$(f \circ g)(x) = g(x) \quad (۴) \quad (g \circ f)(x) = f(x) \quad (۳) \quad (g \circ f)(x) = g(x) \quad (۲) \quad (f \circ g)(x) = f(x) \quad (۱)$$

۹۰- تابع $f(x) = 2x - \sin(x-2)$ مفروض است، حاصل $f(2) + f^{-1}(4)$ کدام است؟

$$-۴ \quad (۴) \quad ۴ \quad (۳) \quad ۲ \quad (۲) \quad ۶ \quad (۱)$$

۹۱- اگر $f(x) = \log(x + \sqrt{x^2 + 1})$ باشد، $f(-x)$ برابر است با:

$$f\left(\frac{1}{x}\right) \quad (۴) \quad \frac{1}{f(x)} \quad (۳) \quad -f(x) \quad (۲) \quad f(x) \quad (۱)$$

۹۲- هرگاه $f(x) = \cos(\log x)$ و $g(x) = 1/x$ باشد، آنگاه $f \circ g(10)$ کدام است؟

$$-\frac{\pi}{4} \quad (۴) \quad \frac{\pi}{4} \quad (۳) \quad \pi \quad (۲) \quad -\pi \quad (۱)$$

۹۳- توابع $f(x) = 2$ ، $g(x) = \{(0, 1), (1, 2), (2, 3)\}$ و $h(x) = x^2 - 2x + 3$ مفروضند. تابع $(f+g) \circ h$ کدام است؟

$$\{(1, 3)\} \quad (۴) \quad \{(0, 2), (1, 5)\} \quad (۳) \quad \{(1, 5)\} \quad (۲) \quad \{(0, 2)\} \quad (۱)$$

۹۴- تابع $f(x) = (x^2 - 1)/|x - 1|$ در نقطه‌ای به طول یک:

$$(۱) \text{ برابر } ۲ \text{ است} \quad (۲) \text{ برابر صفر است} \quad (۳) \text{ مبهم است} \quad (۴) \text{ هیچ کدام}$$

۹۵- عبارت $\tan^{-1}(-4/5)$ بر حسب لگاریتم طبیعی کدام است؟

$$\frac{1}{4} \ln \frac{1}{3} \quad (۴) \quad \frac{1}{4} \ln 3 \quad (۳) \quad \ln \frac{1}{4} \quad (۲) \quad e^{1/4} \quad (۱)$$

۹۶- اگر $\sin hx = 2$ باشد، مقدار x کدام است؟

$$\ln(2 - \sqrt{5}) \quad (۴) \quad \ln(\sqrt{5} - 2) \quad (۳) \quad \ln \frac{\sqrt{5}}{2} \quad (۲) \quad \ln(\sqrt{5} + 2) \quad (۱)$$

۹۷- اگر $f(x) = 2x\sqrt{x^2 + 1}$ باشد، $f(\sin hx)$ کدام است؟

$\sin hx$ (۱) $-\sin hx$ (۲) $\sqrt{\sin hx}$ (۳) $\cos hx$ (۴)

۹۸- اگر $x = \ln 2$ باشد، $\sin hx$ کدام است؟

$\frac{4}{3}$ (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) 2 (۴)

۹۹- تابع $f(x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$ مفروض است، رابطه $f(a) + f(b) = f\left(\frac{a+b}{1+ab}\right)$

(۱) بازای تنها $a = 1$ و $b = 1$ برقرار است. (۲) بازای هیچ مقداری از a و b برقرار نیست.

(۳) بازای جميع مقادیر a و b برقرار است. (۴) بازای تنها $a = 0$ و $b = 0$ برقرار است.

۱۰۰- اگر $(f \circ g \circ h)(x) = (2\sqrt{5+x} - 1)/(3 - \sqrt{5+x})$ باشد، آن گاه:

$h(x) = \sqrt{x}, g(x) = 5+x, f(x) = \frac{2x-1}{3-x}$ (۱)

$h(x) = 5+x, g(x) = \frac{2x-1}{3-x}, f(x) = \sqrt{x}$ (۲)

$h(x) = \sqrt{5+x}, g(x) = 2x-1, f(x) = \frac{1}{3-x}$ (۳)

$h(x) = 5+x, g(x) = \sqrt{x}, f(x) = \frac{2x-1}{3-x}$ (۴)

۱۰۱- در تابع با ضابطه $f(x) = x + [x]$ ، کدام تساوی زیر صحیح است؟

$f(x+2) = f(x) - 2$ (۱) $f(x-1) = f(x) + 1$ (۲)

$f(x+1) = f(x) + 2$ (۳) (۴) موارد ۱ و ۳ صحیح اند.

۱۰۲- تابع $\tan hx$ برابر است با:

$\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$ (۱) $\frac{e^x-1}{e^x+1}$ (۲) $\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}$ (۳) $\frac{e^x+1}{e^x-1}$ (۴)

۱۰۳- اگر $f(x) = (x+1)/(x-1)$ و $f \circ g(x) = -f(x)$ باشد، آن گاه $g(x)$ کدام است؟

$\frac{1}{x}$ (۱) $\frac{y}{x}$ (۲) x (۳) $2x$ (۴)

۱۰۴- بازای چه مقدار از m تابع با ضابطه $y = \log(2x + \sqrt{m^2x^2 + 1})$ فرد است؟

0 (۱) ± 1 (۲) ± 2 (۳) ± 4 (۴)

۱۰۵- اگر $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x > 0 \\ 1 & x \leq 0 \end{cases}$ باشد، مقدار $f(-f(x))$ برابر کدام است؟

1 (۱) $x+1$ (۲) x^2+1 (۳) $(x^2+1)^2+1$ (۴)

۱۰۶- کدام گزاره صحیح تر است؟

(۱) تابع $f(x) = 7$ فرد است. (۲) تابع $f(x) = 0$ زوج است.

(۳) تابع $f(x) = 0$ هم زوج است و هم فرد است. (۴) تابع $f(x) = 0$ فرد است.

۱۰۷- بازای چه مقدار از m تابع $f(x) = (m-2)x + 3m-4$ فرد است؟

2 (۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{2}{4}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴)

۱۰۸- کدام تابع فرد است؟

(۲) $f(x) = x^2 - x \sin^2 x$

(۱) $f(x) = x^2 - x^2$

(۴) $f(x) = x^2 + |x| - 4$

(۳) $f(x) = \ln \frac{1+x^2}{1-x^2}$

۱۰۹- اگر f تابعی فرد باشد، به طوری که $0 \in D_f$ ، آنگاه:

(۴) $f(0) = -\infty$

(۳) $f(0) = +\infty$

(۲) $f(0) = 1$

(۱) $f(0) = 0$

۱۱۰- تابع با ضابطه $f(x) = (1 + 2^x)^{1/2^x}$:

(۱) فرد است (۲) زوج است (۳) نه فرد است و نه زوج است (۴) هم فرد و هم زوج است

۱۱۱- تابع $f(x)$ در دامنه مجموعه اعداد حقیقی تعریف شده است، توابع $h(x) = f(x) + f(-x)$ و $g(x) = f(x) - f(-x)$ چگونه اند؟

(۲) $g(x)$ زوج و $h(x)$ فرد است

(۱) $g(x)$ فرد و $h(x)$ زوج است

(۴) $g(x)$ و $h(x)$ زوج می باشند

(۳) $g(x)$ و $h(x)$ فرد می باشند

۱۱۲- کدام تابع فرد است؟

(۲) $f(x) = |2 - x| + |2 + x|$

(۱) $f(x) = \sqrt{1 + x + x^2} - \sqrt{1 - x + x^2}$

(۴) $f(x) = \sqrt[3]{(2-x)^2} + \sqrt[3]{(2+x)^2}$

(۳) $f(x) = \frac{x^2 - x \cos x + \sin x}{\tan x + \cot x - 2x}$

۱۱۳- تابع $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x + 2xy$:

(۳) نه فرد و نه زوج است (۴) هیچکدام

(۱) فرد است (۲) زوج است

۱۱۴- تابع $f(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$:

(۱) زوج است (۲) فرد است (۳) نه زوج و نه فرد است (۴) نمی توان تعیین کرد

۱۱۵- با فرض $f(x) = (a^x + a^{-x})/2$ و $g(x) = (a^x - a^{-x})/2$ ، کدام تابع زیر فرد است؟

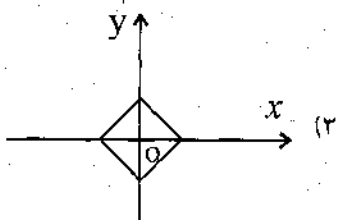
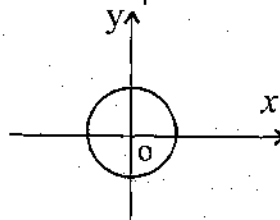
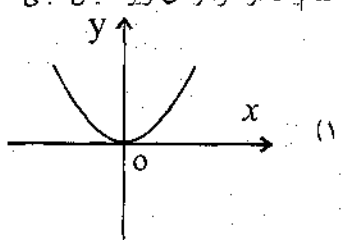
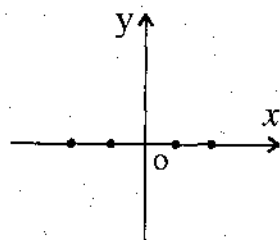
(۴) $f.g$

(۳) $\frac{f}{g}$

(۲) $f - g$

(۱) $f + g$

۱۱۶- کدام یک از نمودارهای زیر نمایش تابعی است که هم زوج است و هم فرد؟



$$۱۱۷- \text{تابع} : \begin{cases} f(Z) \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = x|x| - [x] \end{cases}$$

(۱) فرد است (۲) زوج است (۳) هم زوج و هم فرد است (۴) نه زوج و نه فرد است

$$۱۱۸- \text{تابع} \quad f(x) = \frac{[x] + [-x]}{x^2 + 1} \quad \text{و} \quad g(x) = \frac{x^2 \sin x}{[x] + [-x]} \quad \text{به ترتیب:}$$

(۱) زوج و فرد می باشند. (۲) فرد و زوج می باشند. (۳) فرد و فرد می باشند. (۴) زوج و زوج می باشند.

$$۱۱۹- \text{تابع} \quad f(x) = x^2 + \cos x \quad \text{و} \quad g(x) = x^2 - x \quad \text{مفروضند، کدام گزاره صحیح است؟}$$

(۱) $g \cdot f$ تابعی فرد است (۲) $f \circ g$ تابعی فرد است (۳) $g \circ f$ تابعی فرد است (۴) همه موارد فوق صحیح اند.

$$۱۲۰- (Z \cap \{1\}) \times Z \quad \text{چه نوع تابعی است؟} \quad (Z \text{ مجموعه اعداد صحیح نسبی است})$$

(۱) ثابت (۲) همانی (۳) یک به یک (۴) هیچ کدام

$$۱۲۱- \text{تابع} \quad f: (0, 1) \rightarrow (a, b) \quad \text{با ضابطه} \quad f(x) = bx + (1-x)a$$

(۱) یک به یک است. (۲) معکوس پذیر نیست. (۳) معکوس پذیر است. (۴) موارد ۱ و ۳ صحیح اند.

$$۱۲۲- \text{تابع} \quad f(x) = (ax + b)/(cx + d) \quad \text{در صورتی یک به یک است که:}$$

$$(۱) \quad \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \quad (۲) \quad \frac{a}{c} \neq \frac{b}{d} \quad (۳) \quad \frac{a}{d} \neq \frac{b}{c} \quad (۴) \quad \frac{a}{d} = \frac{b}{c}$$

$$۱۲۳- \text{تابع} \quad f(x) = x/(1 + |x|)$$

(۱) یک به یک است. (۲) یک به یک نیست. (۳) زوج است. (۴) معکوس پذیر نمی باشد.

$$۱۲۴- \text{هرگاه} \quad f(x) = 2x + a \quad \text{و} \quad f \circ f(x) = 9x + 4 \quad \text{باشد، مقدار} \quad a \quad \text{کدام است؟}$$

(۱) ۰ (۲) ۲ (۳) ۹ (۴) ۱

$$۱۲۵- \text{تابع} \quad f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ \quad \text{با ضابطه} \quad f(x) = x^2 + 2x$$

(۱) یک به یک و غیر پوششی است. (۲) یک به یک و پوششی است.

(۳) غیر یک به یک و غیر پوششی است. (۴) غیر یک به یک ولی پوششی است.

$$۱۲۶- \text{کدام یک از توابع زیر پوششی است؟}$$

$$f(x) = x^2 + 9x, f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ \quad (۲)$$

$$f(x) = \frac{1}{x+2}, f: \mathbb{R} - \{-2\} \rightarrow \mathbb{R} \quad (۱)$$

$$f(x) = 2x^2 + 2, f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \quad (۴)$$

$$f(x) = x^2 - 2x + 1, f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad (۳)$$

$$۱۲۷- \text{کدام گزاره نادرست است؟}$$

(۱) نمودار تابع همانی نیمیاز ناحیه اول و سوم است. (۲) حوزه مقادیر تابع ثابت یک عضوی است.

(۳) تابع همانی یک به یک و پوششی است. (۴) ترکیب هر تابع با وارون خودش تابعی ثابت است.

$$۱۲۸- \text{تابع} : \begin{cases} f: \mathbb{R} \rightarrow Z \\ x \mapsto [x] \end{cases}$$

(۱) هم پوشا و هم یک به یک است. (۲) یک به یک است ولی پوشا نیست.

(۳) نه پوشا و نه یک به یک است. (۴) پوشا است ولی یک به یک نیست.

$$۱۲۹- \text{معکوس تابع} \quad f(x) = 2^{x-1} \quad \text{کدام است؟}$$

$$f^{-1}(x) = \log_2^+ x \quad (۴) \quad f^{-1}(x) = \log_2^+ x + 1 \quad (۳) \quad f^{-1}(x) = \log_2^+ x \quad (۲) \quad f^{-1}(x) = \log_2^+ x - 1 \quad (۱)$$

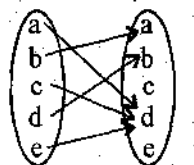
۱۳۰- معکوس تابع $f(x) = \ln \ln x$ کدام است؟

$$\left(\frac{1}{e}\right)^{e^x} \quad (۲) \quad e^{e^x} \quad (۳) \quad e^x \quad (۲) \quad e^{-x} \quad (۱)$$

۱۳۱- اگر $f(x+1) = 2x+1$ باشد، $f^{-1}(x)$ کدام است؟

$$\frac{x+1}{2} \quad (۲) \quad \frac{2x-1}{2} \quad (۳) \quad \frac{2x+1}{2} \quad (۲) \quad \frac{x-1}{2} \quad (۱)$$

۱۳۲- فرض می‌کنیم که $f: A \rightarrow A$ و $A = \{a, b, c, d, e\}$ با نمودار زیر تعریف شده است. کدام رابطه صحیح است؟



$$f^{-1}(\{c, b, d\}) = \{a, c, e\} \quad (۲) \quad f(\{a, c, e\}) = \{b\} \quad (۱) \\ f^{-1}(\{c, e\}) = \emptyset \quad (۳) \quad \text{همه موارد ۱ و ۲ و ۳} \quad (۴)$$

۱۳۳- معکوس تابع با ضابطه $y = \sqrt{x+1} + 2\sqrt{x+1}$ کدام است؟

$$f^{-1}(x) = x^2 - 1 + 2\sqrt{x^2+1} \quad (۲) \quad f^{-1}(x) = x^2 + 1 - 2\sqrt{x^2+1} \quad (۱) \\ f^{-1}(x) = x^2 + 1 + 2\sqrt{x^2+1} \quad (۳) \quad \text{معکوس‌پذیر نمی‌باشد.} \quad (۴)$$

۱۳۴- معکوس تابع با ضابطه $f(x) = 2(8)^{x/2}$ در نقطه $x = 8$ کدام است؟

$$۴ \quad (۱) \quad \frac{3}{4} \quad (۲) \quad ۲ \quad (۳) \quad \text{نامعین} \quad (۴)$$

۱۳۵- تابع $f(x) = x^2 - 4x^2 + 2$ مفروض است، اگر $x \in [0, \sqrt{2}]$ باشد، ضابطه تابع معکوس $f(x)$ کدام است؟

$$f^{-1}(x) = \sqrt{2 + \sqrt{2+x}} \quad (۲) \quad f^{-1}(x) = \sqrt{2 - \sqrt{2+x}} \quad (۱) \\ f^{-1}(x) = -\sqrt{2 + \sqrt{2+x}} \quad (۴) \quad f^{-1}(x) = -\sqrt{2 - \sqrt{2+x}} \quad (۳)$$

۱۳۶- معکوس تابع $f(x) = \sin \frac{x+1}{x}$ کدام است؟

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{\text{Arcsin } x - 1} \quad (۲) \quad f^{-1}(x) = \frac{1}{\text{Arcsin } x + 1} \quad (۱) \\ f^{-1}(x) = \text{Arcsin } x + 1 \quad (۴) \quad f^{-1}(x) = \text{Arcsin } x - 1 \quad (۳)$$

۱۳۷- اگر مبدأ مختصات مرکز تقارن تابع f با ضابطه $f(x) = \log(ax + \sqrt{9x^2+1})$ باشد، مقدار a کدام است؟

$$3 \quad (۱) \quad -3 \quad (۲) \quad ۱ \quad (۳) \quad \pm 3 \quad (۴)$$

۱۳۸- اگر $f(x) = \begin{cases} x-2 & x \geq 1 \\ 2x-2 & x < 1 \end{cases}$ ، آن‌گاه $f^{-1}(-6)$ کدام است؟

$$۱ \quad (۱) \quad -۱ \quad (۲) \quad ۴ \quad (۳) \quad -۲ \quad (۴)$$

۱۳۹- مختصات نقطه تقاطع نمودار تابع $f(x) = x^2 + x + 27$ با نمودار تابع معکوس آن کدام است؟

$$(-3, -3) \quad (۱) \quad (1, 1) \quad (۲) \quad (3, 3) \quad (۳) \quad (-1, -1) \quad (۴)$$

۱۴۰- وارون تابع $y = \sin(\cos x)$ کدام است؟

$$\text{Arc cos cos } x \quad (۱) \quad \text{Arc sin } x \quad (۲) \quad \text{Arc cos Arc sin } x \quad (۳) \quad \text{Arc sin Arc cos } x \quad (۴)$$

۱۴۱- کدام یک از توابع زیر در دامنه تعریفش معکوس‌پذیر است؟

$$f(x) = |x^2| \quad (۲) \quad f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{x^2} \quad (۱) \\ f(x) = x - \sqrt{x^2+9} \quad (۴) \quad f(x) = 2x - \sqrt{x-1} \quad (۳)$$

۱۴۲- تابع $f(x) = -x^2 + 12x + 4$ در کدام یک از فواصل زیر وارون پذیر است؟

- (۱) $(1, +\infty)$ (۲) $(-\infty, 0)$ (۳) $[-3, 2]$ (۴) $[-2, 2]$

۱۴۳- معکوس تابع $f(x) = \text{Arcsin}(\ln x / 10)$ کدام است؟

- (۱) $e^{\sin x}$ (۲) $10 \ln e^{\sin x}$ (۳) $10 e^{\sin x}$ (۴) هیچ کدام

۱۴۴- معکوس تابع $f(x) = \text{Arc cos } 2x/(1+x)$ کدام است؟

(۱) $f^{-1}(x) = \frac{\cos x}{2 - \cos x}$ (۲) $f^{-1}(x) = \frac{\cos x}{1 - x}$

(۳) $f^{-1}(x) = \frac{2 \cos x}{1 - \cos x}$ (۴) هیچ کدام

۱۴۵- تابع $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ و $x > 1$ مفروض است، کدام رابطه زیر درست است؟

(۱) $f^{-1} \circ f \neq f \circ f^{-1}$ (۲) $f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1}$

(۳) $f^{-1}(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ (۴) موارد ۲ و ۳

۱۴۶- معکوس تابع $f(x) = \sin hx + \cos hx$ کدام است؟

(۱) $f^{-1}(x) = \ln x$ (۲) $f^{-1}(x) = e^x$ (۳) $f^{-1}(x) = \ln \ln x$ (۴) $f^{-1}(x) = e^{\ln x}$

۱۴۷- وارون تابع $f(x) = \cot hx$ کدام است؟

(۱) $\ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^2$ (۲) $\ln \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$ (۳) $\ln \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^2$ (۴) $\ln \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$

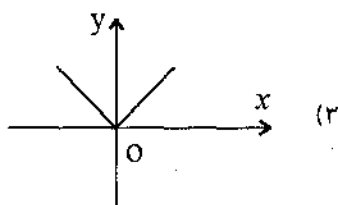
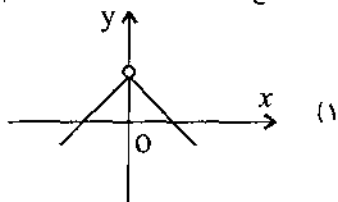
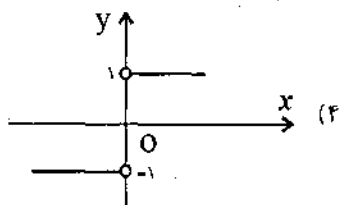
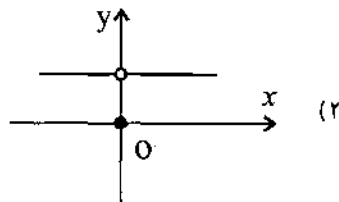
۱۴۸- اگر $f(x) = e^x/(1+e^x)$ و $g(x) = \sin^2 x$ ، تابع $f^{-1}(g(x))$ کدام است؟

(۱) $\ln \tan x$ (۲) $\ln \cot x$ (۳) $2 \ln \cot x$ (۴) $2 \ln \tan x$

۱۴۹- معکوس تابع $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{x}(e^{-x} - e^x)$ (۲) $e^x - e^{-x}$ (۳) $\frac{1}{x}(e^x - 1)$ (۴) $\frac{1}{x}(e^x - e^{-x})$

۱۵۰- نمودار تابع $y = f(x) = \text{sgn}(x^2)$ کدام است؟



۱۵۱- کدام رابطه زیر تابع نیست؟

(۱) $y^2 = x$ (۲) $y^2 = x^2$ (۳) $y = \sqrt{x^2}$ (۴) $\begin{cases} x & x \geq 0 \\ 1 & x < 0 \end{cases}$

۱۵۲- تابع $f(x) = \sqrt{2/|x| - 1} + \log(x^2 - 1)$ در چه فاصله‌ای معین است؟

(۱) $(-2, -1), (1, 2)$ (۲) $(-2, -1), (1, 2)$ (۳) $(-\infty, 2]$ (۴) $(2, +\infty)$ (۵) $(-\infty, 2), (2, +\infty)$

۱۵۳- اگر $[(1-x)/x] = 1$ باشد، مقدار $E(-6x)$ کدام است؟

(۱) -1 (۲) 3 (۳) -3 (۴) 1

۱۵۴- در تابع $y = x + |x - 1|$ حدود تغییرات y کدام است؟

(۱) $y \geq 0$ (۲) $y \geq 1$ (۳) $y \geq -1$ (۴) $0 \leq y \leq 2$

۱۵۵- کدام یک از توابع زیر تناظر یک به یک دارد؟

(۱) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 2$ (۲) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x+1}$
(۳) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 2x + 1$ (۴) $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x^2 + 3$

۱۵۶- قرینه منحنی $f(x) = \sqrt{x-1} + 1$ نسبت به نیمساز ناحیه اول و سوم کدام است؟

(۱) $y = \sqrt{(x-1)^2} + 1$ (۲) $y = x^2 - 2x^2 + 3x + 1$ (۳) $y = \sqrt{(x-1)^2} - 1$ (۴) $y = x^2 - 2x^2 + 3x$

۱۵۷- تابع f و g بر $\mathbb{R}$ با ضابطه‌های زیر مفروضند، کدام یک از این دو تابع با هم مساویند؟

(۱) $f(x) = x^2 - 1, g(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2}$ (۲) $f(x) = x - 1, g(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$
(۳) $f(x) = 1, g(x) = \frac{x}{x}$ (۴) $f(x) = 2, g(x) = \frac{2x^2 + 2}{x^2 + 1}$

۱۵۸- توابع $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = \lambda x^2$ مفروضند، تابع معکوس $g \circ f$ به ازاء $x = 1$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{\lambda}$ (۲) 1 (۳) λ (۴) $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$

۱۵۹- تابع با ضابطه $f(x) = E(x^2/(1+x^2))$:

(۱) زوج است. (۲) فرد است. (۳) هم فرد و هم زوج است. (۴) نه فرد و نه زوج است.

۱۶۰- کدام یک از گزاره‌های زیر نادرست است؟

(۱) تابع سینوس هیپربولیک یک تابع فرد است.
(۲) تابع کسینوس هیپربولیک یک تابع زوج است.
(۳) تابع کسکانت هیپربولیک یک تابع زوج است.
(۴) تابع کتانژانت هیپربولیک یک تابع فرد است.

۱۶۱- کدام یک از توابع چند ضابطه‌ای زیر ثابت هستند؟

(۱) $f(x) = \begin{cases} 1 & x \text{ های گویا} \\ 2 & x \text{ های اصم} \end{cases}$ (۲) $g(x) = \begin{cases} 5 & x < 0 \\ \text{تعریف نشده} & x = 0 \\ -5 & x > 0 \end{cases}$

(۳) $h(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|} & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -\frac{x}{|x|} & x < 0 \end{cases}$ (۴) $\ell(x) = \begin{cases} 1 & x \text{ های گویا} \\ \text{تعریف نشده} & x \text{ های اصم} \end{cases}$

۱۶۲- جواب معادله $|e^x - 1| = |3 - 2e^x|$ کدام است؟

(۱) $x = \ln \frac{2}{3}, x = \ln 2$ (۲) $x = \ln \frac{1}{2}, x = \ln \frac{2}{3}$ (۳) $x = \ln \frac{2}{3}, x = \ln 2$ (۴) $x = \ln 2, x = \ln \frac{2}{3}$

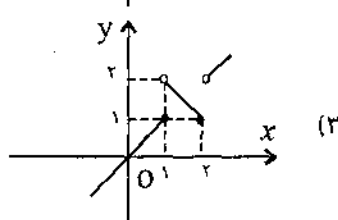
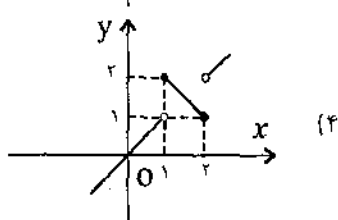
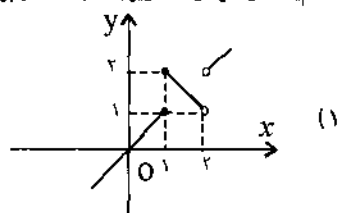
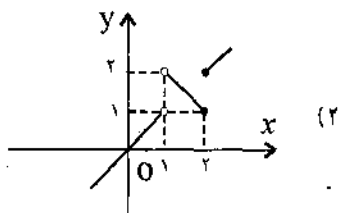
۱۶۳- مجموعه جواب $|5x + 2| < 2/5$ کدام است؟

(۴) هیچکدام $\left(-\frac{12}{25}, -\frac{2}{5}\right) \cup \left(-\frac{2}{5}, -\frac{8}{25}\right)$ (۳) $\left(-\frac{2}{5}, -\frac{8}{25}\right)$ (۲) $\left(-\frac{12}{25}, -\frac{8}{25}\right)$ (۱)

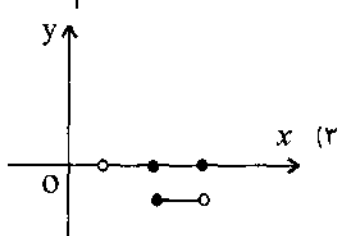
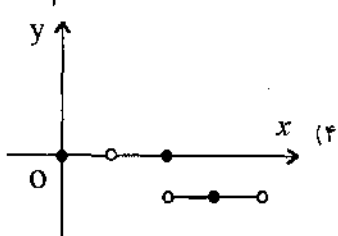
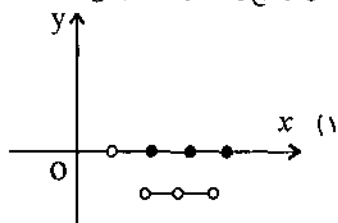
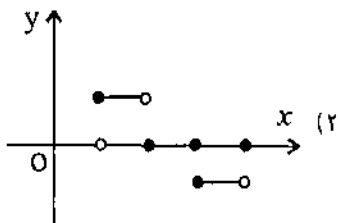
۱۶۴- اگر $f(x) = \log(4 - x^2)$ و $g(x) = \sqrt{x-1}$ باشد، دامنه تابع g/f کدام است؟

(۴) $(1, 2)$ (۳) $[1, 2) - \{\sqrt{3}\}$ (۲) $[1, 2)$ (۱) $[1, 2]$

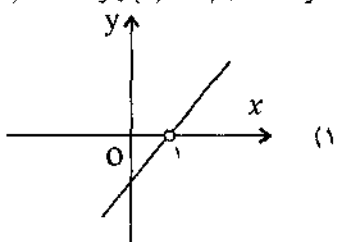
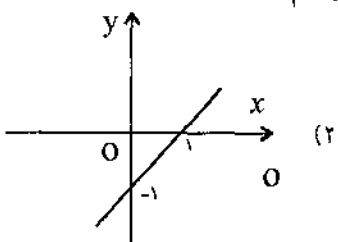
۱۶۵- کدام یک از نمودارهای زیر یک به یک و پوششی است؟

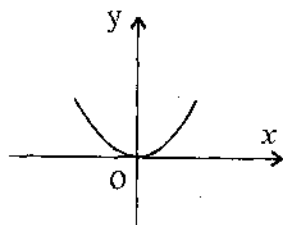
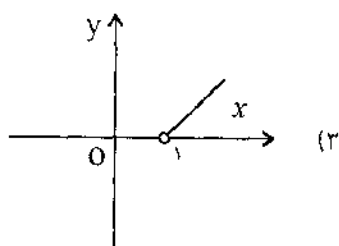
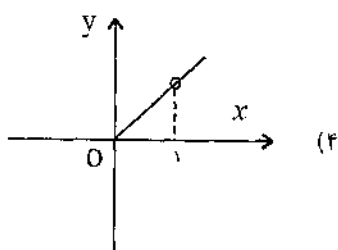


۱۶۶- نمودار تابع $y = [\sin x]$ وقتی که $0 \leq x \leq 2\pi$ کدام است؟



۱۶۷- اگر $f(x) = 1/\sqrt{x-1}$ و $g(x) = x^{-1}$ ، آنگاه نمودار $y = g \circ f$ کدام است؟





۱۶۸- اگر تابع $f(x)$ دارای نمودار مقابل باشد، کدام یک از توابع زیر پوششی است؟

- (۱) $f(x)[x]$ (۲) $-f(x)$
(۳) $xf(x)$ (۴) $f(x)\frac{|x|}{x}$

۱۶۹- تابع $y = x - 1/x$:

(۲) نسبت به مبدأ مختصات متقارن است.

(۱) نسبت به محور طول‌ها متقارن است.

(۳) نسبت به محور عرض‌ها متقارن است.

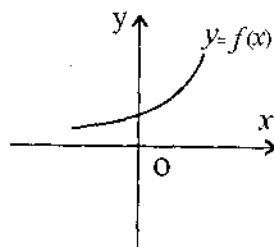
۱۷۰- اگر u تابعی زوج از x و v تابعی فرد از x باشد، کدام یک از توابع زیر زوج هستند؟

(۴) هیچ کدام

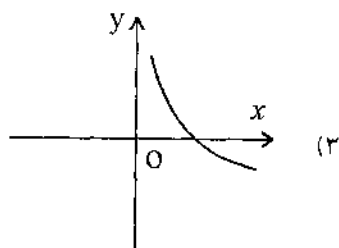
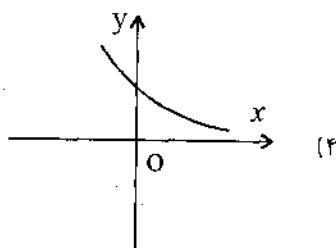
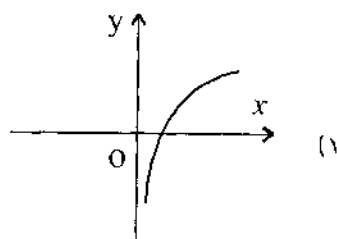
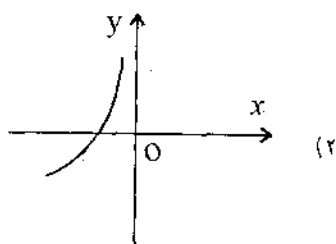
(۳) $\frac{v}{u}$

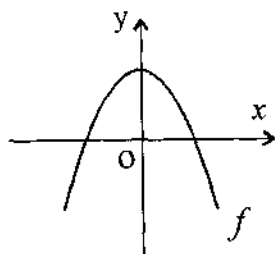
(۲) $\frac{u}{v}$

(۱) uv



۱۷۱- اگر نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت شکل مقابل باشد، نمودار تابع $y = f^{-1}(x)$ کدام است؟





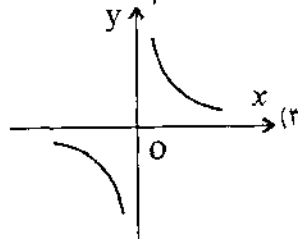
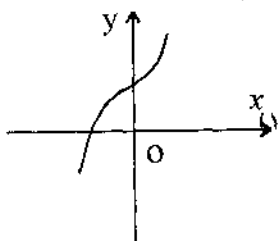
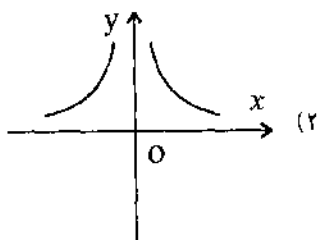
۱۷۲- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده، تابع f :

- (۱) یک به یک است. (۲) پوششی است.
(۳) معکوس پذیر است. (۴) همه موارد ۱ و ۲ و ۳ صحیح اند.

۱۷۳- تابع $f: [-2, 3] \rightarrow [0, 4]$
 $x \mapsto |x|$

- (۱) پوشا و یک به یک است.
(۲) نه پوشا و نه یک به یک است.
(۳) پوشا است ولی یک به یک نیست.
(۴) پوشا نیست ولی یک به یک است.

۱۷۴- کدامیک از نمودارهای زیر در دامنه خود یک تابع پوشا می باشد؟



(۴) همه موارد

۱۷۵- اگر f تابعی معکوس پذیر و معکوس آن f^{-1} باشد، کدامیک از رابطه های زیر همواره برقرار است؟

- (۱) $f^{-1} \circ f \neq f \circ f^{-1}$ (۲) $f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = 1$ (۳) $f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = x$ (۴) هیچ کدام

تست های آزمون کارشناسی ارشد

«تابع»

• تست های شماره ۱ الی ۳۴ آزمون های کارشناسی ارشد مجموعه علوم اقتصادی

• تست های شماره ۳۵ الی ۶۳ آزمون های کارشناسی ارشد مجموعه مدیریت

• تست های شماره ۶۴ الی ۸۷ آزمون های کارشناسی ارشد حسابداری

۱- کدامیک از روابط زیر معادله یک تابع روی $\mathbb{R}$ است؟

- (۱) $y^2 = \sqrt{x^2 - 1}$ (۲) $x^2 + y^2 = 1$ (۳) $x^2 - 2xy + y^2 - 1 = 0$ (۴) $x^2 y = 1$

۲- اگر $f(x) = \sqrt{x - |x|}$ باشد، برد یا حوزه مقادیر تابع $f(x)$ کدام است؟

(۴) $[0, 1]$

(۳) $\mathbb{R}$

(۲) $\{0\}$

(۱) $\mathbb{R}^+$

۳- اگر $x \neq 0$ و $f(x) = (x+1)/x$ ، تابع معکوس $f(x)$ برابر است با:

$$\frac{1}{x-1} \quad (۴) \quad \frac{x}{x+1} \quad (۳) \quad \frac{x}{x-1} \quad (۲) \quad \frac{x^2}{x+1} \quad (۱)$$

۴- اگر f و g دو تابع روی $\mathbb{R}$ با ضابطه‌های $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = x^2$ باشند، $f \circ g$ کدام است؟

$$x^2 \quad (۴) \quad \sqrt{x} \quad (۳) \quad x \quad (۲) \quad |x| \quad (۱)$$

۵- ریشه‌های معادله $(6x-9)^2 = 9$ کدام یک از جواب‌های زیر است؟

$$۱ \text{ و } ۲ \quad (۱) \quad ۳ \text{ و } ۵ \quad (۲) \quad ۲ \text{ و } -۱ \quad (۳) \quad \text{هیچکدام} \quad (۴)$$

۶- معکوس تابع f به معادله $f(x) = \operatorname{sh} 2x$ عبارت است از:

$$\operatorname{ch} 2x \quad (۱) \quad \frac{\ln(-x \pm \sqrt{x^2+1})}{2} \quad (۲) \quad \operatorname{Arcoth} 2x \quad (۳) \quad \text{هیچکدام} \quad (۴)$$

۷- نمودار معکوس هر تابع در صفحه مختصات قائم:

- (۱) قرینه نمودار تابع نسبت به نیمساز ربع اول و سوم
- (۲) قرینه نمودار تابع نسبت به نیمساز ربع دوم و چهارم
- (۳) قرینه نمودار تابع نسبت به مبدأ مختصات
- (۴) بستگی به نوع تابع دارد

۸- تابع $f(x) = |x|$ مفروض است، تابع $f[g(x)]$ برابر است با: (در صورتی که $g(x) < 0$ باشد)

$$g(x) \quad (۱) \quad g(x^2) \quad (۲) \quad -g(x) \quad (۳) \quad |g^2(x)| \quad (۴)$$

۹- معکوس تابع $y = b^x$ برابر است با:

$$\log_b^x \quad (۱) \quad \log_b^x \quad (۲) \quad \log_b^x \quad (۳) \quad \log_x^x \quad (۴)$$

۱۰- قلمرو تابع $f(x) = \operatorname{sgn}(x^2 - 1)$ کدام است؟

$$\mathbb{R} \quad (۱) \quad \mathbb{R}^+ \quad (۲) \quad [0, +\infty) \quad (۳) \quad \text{هیچکدام} \quad (۴)$$

۱۱- دامنه تعریف (Domain) تابع $f(x) = \ln(x^2 - x)/\sqrt{1-x}$ کدام است؟

$$(1, +\infty) \quad (۱) \quad (-\infty, 0) \quad (۲) \quad [0, 1] \quad (۳) \quad (0, 1) \quad (۴)$$

۱۲- در تابع $f = \{(x, y) | y = (2x+3)/x, x \in Z, y \in Z\}$ ، D_f کدام است؟

$$\{\pm 1, \pm 3\} \quad (۱) \quad Z - \{0\} \quad (۲) \quad \mathbb{R} - \{0\} \quad (۳) \quad \{1, 3\} \quad (۴)$$

۱۳- اگر $f(x) = [x] - x$ باشد، برد یا حوزه مقادیر تابع $f(x)$ برابر است با:

$$(-1, 1) \quad (۱) \quad \mathbb{R} \quad (۲) \quad (-1, 0] \quad (۳) \quad (1, 0) \quad (۴)$$

$$۱۴- \text{اگر داشته باشیم } f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x^2 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases} \text{ و } g(x) = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ 2x & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases} \text{ تابع مرکب } f \circ g$$

کدام است؟

$$\frac{1}{2} \quad (۱) \quad 0 \quad (۲) \quad \frac{1}{4} \quad (۳) \quad ۱ \quad (۴)$$

۱۵- معکوس تابع $y = (e^{2x} + 1)/(e^{2x} - 1)$ عبارت است از:

$$y = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1} \quad (۱) \quad y = \ln \frac{x+1}{x-1} \quad (۲) \quad y = \frac{1}{2} \ln \frac{x-1}{x+1} \quad (۳) \quad y = \ln \frac{x-1}{x+1} \quad (۴)$$

۱۶- دامنه تابع $y = 1/([x] + [-x])$ برابر است با:

$\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (۱) $\mathbb{Z} \setminus \{2\}$ (۲) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ (۳) $\mathbb{Q} \setminus \{2\}$ (۴)

۱۷- قلمرو تابع مقابل، کدامیک از چهار فاصله داده شده است؟

$(-1, 1)$ (۱) $[-1, 0)$ (۲) $[-1, 1]$ (۳) $(0, 1)$ (۴)

۱۸- اگر $f(x) = x^2 + 1$ و $g(x) = \sqrt{x}$ باشد، تابع $g \circ f$ کدام است؟

$x^2 + 1$ (۱) $\sqrt{x^2 + 1}$ (۲) $\sqrt{x}(x^2 + 1)$ (۳) $\sqrt{x}(x^2 + 1)^2$ (۴)

۱۹- دامنه (Domain) تابع زیر کدامیک از فواصل عددی است؟

$(-2, 2]$ (۱) $[-2, 2)$ (۲) $(2, 3]$ (۳) $[-2, 2]$ (۴)

۲۰- برد تابع $y = 2\|x\|$ برابر است با:

$\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (۱) $\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ (۲) $\{1, 2, 4, 8, \dots\}$ (۳) $\{2, 4, 8, \dots\}$ (۴)

۲۱- اگر $f(x) = \ln(x-1)/(x+1)$ باشد، مقدار $f^{-1}(1)$ کدام است؟

$\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}$ (۱) ϵ (۲) $\epsilon + 1$ (۳) $\frac{1}{\epsilon-1}$ (۴)

۲۲- اگر $f(1/(3x-2)) = (x-1)/(x+1)$ باشد، مقدار $f(x)$ کدامیک از عبارت‌های زیر است؟

$f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ (۱) $f(x) = \frac{1-x}{1+5x}$ (۲) $f(x) = \frac{x-3}{x}$ (۳) $f(x) = x - 1$ (۴)

۲۳- اگر x متغیر مستقل باشد، کدامیک از روابط زیر تابع است؟

$y^2 = x + 1$ (۱) $y + x^2 - 1 = 0$ (۲) $x^2 + y^2 - 1 = 0$ (۳) $\sin y = x$ (۴)

۲۴- دامنه تابع $y = |x|/[x]$ عبارت است از:

$\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ (۱) $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ (۲) $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ (۳) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (۴)

۲۵- هرگاه $f(\text{Arcsin}(x-1)) = (x-1)/x$ باشد، $f(x)$ کدام است؟

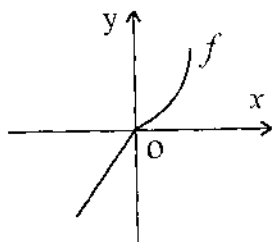
$\sin x - 2$ (۱) $\frac{1+\sin x}{\sin x}$ (۲) $\frac{1-\sin x}{\sin x}$ (۳) $\frac{\sin x}{1+\sin x}$ (۴)

۲۶- مقدار تابع معکوس $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ برای $x = \ln(1 + \sqrt{2})$ کدام است؟

$\frac{1}{2}$ (۱) 1 (۲) $\sqrt{2}$ (۳) 2 (۴)

۲۷- در مورد رابطه f به شکل مقابل کدام مورد صحیح نیست؟

تابع (۱) معکوس پذیر (۳) فرد (۲) یک به یک (۴)



$(-1, 2)$ (۱) $[-1, 2]$ (۲) $(-1, 2)$ (۳) $(2, 3)$ (۴)

۲۸- برد تابع با ضابطه $y = \ln(-x^2 + 2x + 3)$ کدام است؟

$(-1, 1)$ (۱) $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ (۲) $[-1, 1]$ (۳) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (۴)

۲۹- اگر $f(x) = (e^x + e^{-x})/2$ و $g(x) = \ln x$ باشد، مقدار $f \circ g(1)$ کدام است؟

1 (۱) $\sqrt{2}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) 2 (۴)

۳۱- برد (Range) تابع حقیقی f ، به معادله $f(x) = (e^x + e^{-x})/4$ کدام است؟

$$\begin{array}{llll} R(1) & \left[\frac{1}{2}, \infty\right) (2) & R^+(2) & [1, \infty) (4) \end{array}$$

۳۲- دامنه تعریف (Domain)، تابع حقیقی f به معادله $f(x) = \ln(\sin x)$ به کدام صورت است؟

$$\begin{array}{llll} R(1) & 2k\pi < x < 2k\pi + \pi (2) & R^+(2) & 2k\pi - \frac{\pi}{2} < x < 2k\pi + \frac{\pi}{2} (4) \end{array}$$

۳۳- اگر $f(x) = \ln(x+1)/x$ باشد، مقدار $f^{-1}(2)$ کدام است؟

$$\begin{array}{llll} \frac{1}{e^2 - 1} (1) & e^2 + 1 (2) & \ln \frac{2}{3} (3) & \ln \frac{2}{3} (4) \end{array}$$

۳۴- کدام یک از توابع زیر نه زوج اند و نه فرد؟

$$\begin{array}{llll} y = e^{x^2} (1) & y = xe^{x^2} (2) & y = \sin x + x (3) & y = \cos x + x (4) \end{array}$$

۳۵- معکوس تابع $y = \sqrt{(1-x)/(1+x)}$ کدام است؟ آیا این معکوس یک تابع است؟

$$\begin{array}{llll} y = \frac{1-x^2}{1+x^2} (1) \text{ بلی} & y = \frac{1-x^2}{1+x^2} (2) \text{ خیر} & y = \frac{x^2+1}{x^2-1} (3) \text{ بلی} & y = \frac{x^2+1}{x^2-1} (4) \text{ خیر} \end{array}$$

۳۶- اگر $f(x) = x/(x-1)$ و $g(x) = 2x/(x+1)$ باشد، $f \circ g(x)$ کدام است؟

$$\begin{array}{llll} \frac{2x^2}{x^2-1} (1) & \frac{2x}{x^2-1} (2) & \frac{2x}{x-1} (3) & \frac{2x}{x+1} (4) \end{array}$$

۳۷- دامنه تابع $y = \sqrt[3]{(x-1)/(x^2+1)}$ کدام است؟

$$\begin{array}{llll} R - \{1\} (1) & R(2) & R - \{1, 2\} (3) & x \geq 1 (4) \end{array}$$

۳۸- برد یا حوزه مقادیر تابع $y = x/(x+1)$ کدام است؟

$$\begin{array}{llll} R - \{1\} (1) & R - \{-1\} (2) & R(3) & R^+(4) \end{array}$$

۳۹- اگر $f(x) = x/(x+1)$ باشد، مقدار $f \circ f(x)$ در $x=1$ کدام است؟

$$\begin{array}{llll} \frac{1}{2} (1) & 1 (2) & \frac{1}{2} (3) & \frac{1}{4} (4) \end{array}$$

۴۰- اگر $f(x) = [3x-1] + 2$ باشد (عبیرت $[...]$ جزء صحیح است)، $f(-1/5)$ کدام است؟

$$\begin{array}{llll} -3 (1) & -2 (2) & -4 (3) & -3/5 (4) \end{array}$$

۴۱- معکوس تابع $y = e^x + 2$ کدام است؟

$$\begin{array}{llll} y = e^x + 2 (1) & y = \ln(x-2) (2) & y = \ln(x+2) (3) & y = e^x - 2 (4) \end{array}$$

۴۲- برد یا حوزه مقادیر تابع f در مجموعه اعداد حقیقی $f = \{(x, y) | y = (x+4)/x, x, y \in \mathbb{R}\}$ کدام است؟

$$\begin{array}{llll} R - \{1\} (1) & R - \{0\} (2) & R(3) & -2 (4) \end{array}$$

۴۳- در معکوس تابع $f(x) = \ln(x+4)$ مقدار $f^{-1}(0)$ کدام است؟

$$\begin{array}{llll} 3 (1) & -4 (2) & 0 (3) & -3 (4) \end{array}$$

۴۴- برد تابع $y = x/\sqrt{x^2+1}$ کدام است؟

$$\begin{array}{llll} [0, 1) (1) & [-1, 0) (2) & R^+(3) & (-1, 1) (4) \end{array}$$

۴۵- اگر $f(x) = \sqrt{x+1}$ و $g(x) = x^2$ باشد، $f \circ g(x)$ کدام است؟

$$\begin{array}{llll} 2\sqrt{2} (1) & 5\sqrt{2} (2) & 6\sqrt{2} (3) & 8\sqrt{2} (4) \end{array}$$

۴۶- کدام یک از توابع زیر زوج است؟

$y = \sin x$ (۱) $y = \sin x + \cos x$ (۲) $y = |x|(x^2 + 1)$ (۳) $y = x^2 + x$ (۴)

۴۷- دامنه تابع $y = \ln(x^2 - 4)$ کدام است؟

$|x| > 2$ (۱) $|x| \geq 2$ (۲) $-2 < x < 2$ (۳) $|x| > 0$ (۴)

۴۸- از توابع زیر کدام یک فرد است؟

$f(x) = x^2 - x$ (۱) $f(x) = x^2 + x$ (۲)

$f(x) = \sin x + \cos x$ (۳) $f(x) = \cos x$ (۴)

۴۹- اگر دو تابع $f(x) = x/(x+1)$ و $g(x) = (x-1)/(x+1)$ مفروض باشند، مقدار $(f \circ g)(x)$ به ازای $x = 2$ کدام است؟

$\frac{1}{3}$ (۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{1}{5}$ (۳) $\frac{2}{5}$ (۴)

۵۰- اگر تابع $f(x) = 2x/(x-2)$ مفروض باشد، مقدار $f^{-1}(-2)$ کدام است؟

$\frac{3}{4}$ (۱) ۱ (۲) $\frac{4}{3}$ (۳) ۰ (۴)

۵۱- دامنه (Domain) تابع $y = x/(\ln x - 1)$ کدام است؟

$\mathbb{R} \setminus \{1\}$ (۱) $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ (۲) $\mathbb{R}^+ \setminus \{e\}$ (۳) $\mathbb{R}^+ \setminus \{e\}$ (۴)

۵۲- معکوس تابع $y = x/(x+1)$ در کدام نقطه با نیمساز ناحیه اول نقطه مشترک دارد؟

$x = 0$ (۱) $x = 1$ (۲) $x = 2$ (۳) $x = 3$ (۴)

۵۳- اگر $f(x) = 2 \sin x + 1$ و $g(x) = \pi x/(5x+1)$ باشد، $(f \circ g)(1)$ کدام است؟

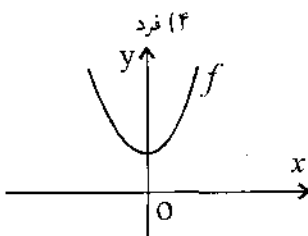
3 (۱) 2 (۲) $\frac{2}{5}$ (۳) $\frac{3}{5}$ (۴)

۵۴- تابع $f(x) = \sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt{(x-1)^2}$ کدام است؟

(۱) همگن و فرد (۲) نه زوج و نه فرد (۳) زوج (۴) فرد

۵۵- در مورد تابع f با شکل مقابل، کدام مورد صحیح است؟

(۱) زوج (۲) فرد (۳) نه فرد و نه زوج (۴) یک به یک



۵۶- دامنه تابع $f(x) = (2x+1)/(|x|-1)$ کدام است؟

$\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ (۱) $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ (۲) $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ (۳) $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ (۴)

۵۷- برد تابع با ضابطه $y = (e^x + 1)/(e^x - 1)$ کدام است؟

$\mathbb{R} \setminus \{1\}$ (۱) $\mathbb{R} \setminus [-1, 1]$ (۲) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (۳) $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ (۴)

۵۸- اگر $f(x) = (2e^x - e^{-x})/2$ و $g(x) = \ln x$ باشد، مقدار $f \circ g(1)$ کدام است؟

0 (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴)

۵۹- اگر $f(x) = x/(x+1)$ و $g(x) = \sqrt{x+1}$ باشد، مقدار $f \circ g(3)$ کدام است؟

$\frac{2}{3}$ (۱) $\frac{3}{4}$ (۲) $\frac{4}{3}$ (۳) ۳ (۴)

۶۰- برد (Range) تابع حقیقی f به معادله $f(x) = x^2/(x^2 + 4)$ ، کدام است؟

(۱) $[0, 1]$ (۲) R (۳) R^+ (۴) $(0, 1)$

۶۱- دامنه تعریف (Domain) تابع حقیقی f به معادله $y = \frac{\ln(x+1)}{x}$ کدام است؟

(۱) $x \neq 0, R$ (۲) $x \neq 0, (-1, \infty)$ (۳) $R - \{0, 1\}$ (۴) R^+

۶۲- اگر $f(x) = \ln(x+1)/x$ باشد مقدار $f^{-1}(1)$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{e-1}$ (۲) $\ln \frac{1}{e}$ (۳) $e-1$ (۴) $\ln 2$

۶۳- کدامین تابع زوج نیست؟

(۱) $y = e^{x^2} + 1$ (۲) $y = e^{x^2} - x$ (۳) $y = x^2$ (۴) $y = \cos x$

۶۴- معکوس تابع $y = x > 0$ و $y = \frac{1}{x} \left(x - \frac{1}{x}\right)$ کدام است؟

(۱) $x - \sqrt{x^2 + 1}$ (۲) $x + \sqrt{x^2 - 1}$ (۳) $x - \sqrt{x^2 - 1}$ (۴) $x + \sqrt{x^2 + 1}$

۶۵- اگر $f(x) = e^{-x}$ ، $g(x) = \ln \sqrt{x}$ ، آنگاه $g(f(x))$ کدام است؟

(۱) $-x$ (۲) $\frac{2}{x}$ (۳) $-\frac{x}{2}$ (۴) $\frac{1}{\sqrt{x}}$

۶۶- تابع $f(x) = x/([x] - 1)$ در کدام فاصله تعریف نشده است؟

(۱) $(0, 1)$ (۲) $[1, 2]$ (۳) $[1, 2]$ (۴) $[0, 1)$

۶۷- تابع $y = x^2 + x \sin x$ کدام وضعیت را دارد؟

(۱) نه فرد و نه زوج (۲) هم زوج و هم فرد (۳) فرد (۴) زوج

۶۸- تابع $f = \{(x, y) | y = (x+4)/x, x, y \in N\}$ چند عضو دارد؟

(۱) ۳ (۲) ۶ (۳) N (۴) نامحدود

۶۹- حوزه مقادیر $f = \{(x, y) | y = \ln(x^2 + 1), x \in R\}$ کدام است؟

(۱) R (۲) R^+ (۳) $R^+ - \{0\}$ (۴) $R^+ \cup \{0\}$

۷۰- برد یا حوزه مقادیر رابطه $f = \{(x, y) | x^2/4 + y^2 = 1, x \in R\}$ کدام است؟

(۱) $-2 \leq y < 2$ (۲) $-1 \leq y \leq 1$ (۳) R^+ (۴) $R - \{1, -1\}$

۷۱- اگر $f(x) = x/(x+1)$ و $g(x) = 2x/(x-1)$ مفروض باشد $f \circ g(x)$ کدام است؟

(۱) $\frac{2(x+1)}{x-1}$ (۲) $\frac{2x}{2x-1}$ (۳) $\frac{2x}{2x-1}$ (۴) $\frac{2x^2}{x^2-1}$

۷۲- $f^{-1}(x)$ معکوس تابع $f(x) = 2x/(x-1)$ کدام است؟

(۱) $f^{-1}(x) = \frac{x}{x-2}$ (۲) $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2x}$ (۳) $f^{-1}(x) = \frac{x}{x+2}$ (۴) $f^{-1}(x) = \frac{x}{2x-1}$

۷۳- برد تابع y با معادله $y\sqrt{x^2+1} - x = 0$ کدام است؟

(۱) $(0, 1)$ (۲) $(-1, 1)$ (۳) $[-1, 1]$ (۴) $[0, 1]$

۷۴- اگر $f(x) = x/(x+1)$ و $g(x) = \sqrt{x-1}$ باشد، $f \circ g(5/4)$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{2}{5}$

۷۵- دامنه تابع $y = \ln(x^2 - 1)$ کدام است؟

- (۱) $\mathbb{R}$ (۲) $|x| > 1$ (۳) $-1 < x < 1$ (۴) $-1 \leq x \leq 1$

۷۶- برد تابع $y = 1/(2 - \cos x)$ کدام است؟

- (۱) $[\frac{1}{3}, 1]$ (۲) $(\frac{1}{3}, 1)$ (۳) $(\frac{1}{2}, 0)$ (۴) $[\frac{1}{2}, 0]$

۷۷- کدام یک از توابع زیر یک به یک نیست؟

- (۱) $f(x) = e^x$ (۲) $f(x) = \ln x$ (۳) $f(x) = x^2$ (۴) $f(x) = \frac{1}{x}$

۷۸- کدام یک از توابع زیر زوج است؟

- (۱) $f(x) = e^{-x}$ (۲) $f(x) = e^x$ (۳) $f(x) = e^{x^2}$ (۴) $f(x) = e^x + x$

۷۹- معکوس تابع $f(x) = x/(x-1)$ را $f^{-1}(x)$ نامیده، کدام است؟

- (۱) $\frac{x}{x-1}$ (۲) $\frac{1}{x}$ (۳) x (۴) $\frac{x}{x+1}$

۸۰- برد یا حوزه مقادیر (Range) تابع $y = (x^2 - 1)/(x^2 + 1)$ کدام است؟

- (۱) $\mathbb{R}$ (۲) $\mathbb{R}^+$ (۳) $(-1, 1)$ (۴) $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

۸۱- دامنه (Domain) یا حوزه تعریف تابع $y = (x^2 + 1)/(x^2 - 1)$ کدام است؟

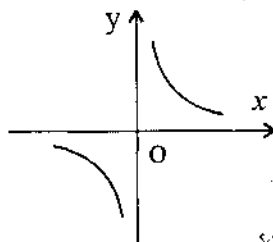
- (۱) $\mathbb{R}$ (۲) $\mathbb{R}^+ + \{0\}$ (۳) $\mathbb{R} - [-1, 1]$ (۴) $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$

۸۲- تابع $y = e^x/(e^x + 1)$ مفروض است، اگر معکوس تابع $f^{-1}(x)$ باشد، $f^{-1}(1/2)$ کدام است؟

- (۱) 0 (۲) 1 (۳) e (۴) $\ln 2$

۸۳- نمودار یک تابع فرد، دارای کدام خاصیت است؟

- (۱) محور y ها محور تقارن آن است. (۲) محور x ها محور تقارن آن است.
(۳) مبدأ مرکز تقارن آن است. (۴) فاقد مرکز تقارن است.



۸۴- در مورد رابطه f با شکل مقابل کدام مورد صحیح است؟

- (۱) نه زوج، نه فرد (۲) فرد
(۳) زوج (۴) تابع نیست

۸۵- اگر $f(x) = (3e^x - e^{-x})/2$ و $g(x) = \ln x$ باشد، مقدار $f \circ g(1)$ کدام است؟

- (۱) 0 (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) 1 (۴) $\frac{3}{2}$

۸۶- دامنه تعریف (Domain) تابع حقیقی f ، با ضابطه $f(x) = (e^x + e^{-x})/3$ ، کدام است؟

- (۱) (e^{-1}, e) (۲) $[e^{-1}, e]$ (۳) $\mathbb{R}^+$ (۴) $\mathbb{R} - \{0\}$

۸۷- برد (Range) تابع حقیقی f با ضابطه $f(x) = \ln(x+1)$ ، کدام است؟

- (۱) $\mathbb{R}$ (۲) $\mathbb{R}^+$ (۳) $\mathbb{R} - \{1\}$ (۴) $\mathbb{R} - \{0\}$

حد و پیوستگی

۴-۱ تعریف حد

حد $f(x)$ هنگامی که x به سمت x_0 میل می‌کند برابر L است. اگر x از هر سمت به x_0 میل کند (بدون آنکه با آن مسوی شود) $f(x)$ به سمت L میل می‌کند و می‌نویسیم:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \quad \text{یا} \quad \text{حد}_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

تعریف دقیق‌تر حد این‌گونه است، حد تابع $f(x)$ در نقطه $x = x_0$ برابر L است و می‌نویسیم:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

اگر به ازای هر عدد مثبت هر اندازه کوچک ε ، عددی مانند $\delta > 0$ وجود داشته باشد، به طوری که اگر $|x - x_0| < \delta$ باشد، آنگاه نتیجه می‌شود که $|f(x) - L| < \varepsilon$ و یا:

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

این تعریف از نظر هندسی بدان معناست که هر اندازه فاصله x از نقطه x_0 کم‌تر شود، فاصله $f(x)$ از L کوچک‌تر می‌شود.

۴-۲ حد راست و حد چپ

گاهی اوقات مقادیر تابعی چون $f(x)$ ، وقتی از دو جهت مختلف به عددی مانند x_0 میل می‌کند، به حدهای مختلفی می‌گیرند. در چنین حالتی:

(۱) اگر در تابع $f(x)$ ، x با مقادیر بزرگ‌تر از x_0 به سمت x_0 میل کند، حد به دست آمده را «حد راست» گویند. یعنی:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L_1$$

منظور از $x \rightarrow x_0^+$ این است که x به x_0 نزدیک می‌شود ولی همیشه از x_0 بزرگ‌تر است، یعنی $x > x_0$.
(۲) اگر در تابع $f(x)$ ، x با مقادیر کوچک‌تر از x_0 به سمت x_0 میل کند، حد به دست آمده را «حد چپ» گویند. یعنی:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L_2$$

منظور از $x \rightarrow x_0^-$ این است که x به x_0 نزدیک می‌شود ولی همیشه از x_0 کوچک‌تر است، یعنی $x < x_0$ (مسئله ۱).

۴-۳ حد تابع در یک نقطه

منظور از حد تابع $f(x)$ در نقطه x_0 این است که حد راست و حد چپ تابع $f(x)$ را در نقطه $x = x_0$ به دست آورده و اگر این حدود با هم برابر باشند، گوئیم تابع $f(x)$ در نقطه $x = x_0$ دارای حد بوده و آن را با علامت $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$

نمایش می‌دهیم. بنابراین داریم (مسئله ۲):

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

و اگر این حدود با هم برابر نباشند، گوییم تابع $f(x)$ در نقطه $x = x_0$ حد ندارد.

نکات مهم:

- ۱- حد تابع در یک نقطه وجود منحصر به فرد است.
- ۲- گاهی $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ را حد دوطرفه f در x_0 می‌نامیم تا آن را از حدهای یک طرفه راست و چپ f در نقطه x_0 متمایز کنیم.
- ۳- گاهی ممکن است یک تابع در یک نقطه دارای حد چپ یا حد راست نباشد.
- ۴- حد تابع $f(x)$ وقتی x به سمت x_0 میل می‌کند، به معین بودن یا معین نبودن تابع در x_0 بستگی ندارد، یعنی ممکن است:
 - الف) تابع f در x_0 تعریف نشده باشد، اما وقتی $x \rightarrow x_0$ حد داشته باشد.
 - ب) تابع f در x_0 تعریف شده باشد، اما وقتی $x \rightarrow x_0$ حد نداشته باشد.
- ۵- هنگامی که تابع $f(x)$ در نقطه x_0 دارای حد است، حد تابع می‌تواند با مقدار تابع برابر باشد یا نباشد، یعنی:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \quad \text{یا} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$$

۴-۴ قضایای اساسی حد

اگر $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L_1$ و $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L_2$ ، آن‌گاه:

- ۱) $\lim_{x \rightarrow x_0} (f \pm g)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L_1 + L_2$
- ۲) $\lim_{x \rightarrow x_0} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L_1 \cdot L_2$
- ۳) $\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f}{g} \right)(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} = \frac{L_1}{L_2}, \quad L_2 \neq 0$
- ۴) $\lim_{x \rightarrow x_0} \lambda = \lambda$
- ۵) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0, \quad f(x) = x$
- ۶) $\lim_{x \rightarrow x_0} (\lambda f(x)) = \lambda \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lambda L_1$
- ۷) $\lim_{x \rightarrow x_0} (x^n) = x_0^n$
- ۸) $\lim_{x \rightarrow x_0} (ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \dots + s) = ax_0^n + bx_0^{n-1} + cx_0^{n-2} + \dots + s$
- ۹) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{ax^n + bx^{n-1} + \dots + s}{a'x^n + b'x^{n-1} + \dots + s'} = \frac{ax_0^n + bx_0^{n-1} + \dots + s}{a'x_0^n + b'x_0^{n-1} + \dots + s'}$

۵-۴ حد بی‌نهایت

تابع $f(x) = 1/x$ ، $x \neq 0$ مفروض است، مقداری که برای x تعیین کرده‌ایم در جدول‌های شماره ۱ و ۲ ثبت می‌نماییم تا مقداری برای $f(x)$ نیز معلوم شود.

x	۱	۰٫۱	۰٫۰۱	۰٫۰۰۱	...	$\rightarrow 0$
$f(x)$	۱	۱۰	۱۰۰	۱۰۰۰	...	$\rightarrow +\infty$

(۱)

x	-1	-0.1	-0.01	-0.001	$\dots \rightarrow 0$
$f(x)$	-1	-10	-100	-1000	$\dots \rightarrow -\infty$

(۲)

در جدول شماره (۱) ملاحظه می‌شود، وقتی x از سمت راست به عدد صفر نزدیک می‌شود ($x \rightarrow 0^+$)، مقدار $f(x)$ به سمت $+\infty$ میل پیدا می‌کند ($f(x) \rightarrow +\infty$)، در این صورت داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

در جدول شماره (۲) ملاحظه می‌شود، وقتی x از سمت چپ به عدد صفر نزدیک می‌شود ($x \rightarrow 0^-$)، مقدار $f(x)$ به سمت $-\infty$ میل پیدا می‌کند ($f(x) \rightarrow -\infty$)، در این صورت داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

بنابراین می‌توان نتیجه گرفت حد $1/x$ وقتی $x \rightarrow 0$ وجود ندارد، زیرا حد چپ و حد راست وجود ندارند. اکنون به تعریف حد بی‌نهایت می‌پردازیم.

تعریف: تابع f را که در بازه I شامل x_0 تعریف شده است (مگر شاید در خود x_0) در نظر می‌گیریم، گویند که (مسئله ۲):

(۱) حد تابع f وقتی x به سمت x_0 میل می‌کند، $+\infty$ است. هرگاه وقتی x به قدر کافی به x_0 نزدیک شود، $f(x)$ از هر عدد بسیار بزرگ مثبتی بزرگ‌تر گردد. یعنی:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$$

(۲) حد تابع f وقتی x به سمت x_0 میل می‌کند، $-\infty$ است. هرگاه وقتی x به قدر کافی به x_0 نزدیک شود، $f(x)$ از هر عدد منفی کوچکی کوچک‌تر گردد. یعنی:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$$

تعاریف بالا در مورد حد راست و حد چپ یک تابع در x_0 نیز درست است. یعنی:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty \quad \text{یا} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty \quad \text{یا} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty$$

۴-۶ حد در بی‌نهایت

تابع $f(x) = 1/x$ ، $x \neq 0$ مفروض است، مقادیری که برای x تعیین کرده‌ایم در جدول‌های شماره ۱ و ۲ ثبت می‌نماییم، تا مقادیری برای $f(x)$ نیز معلوم شود.

x	10	100	1000	$\dots \rightarrow +\infty$
$f(x)$	0.1	0.01	0.001	$\dots \rightarrow 0$

(۱)

x	-10	-100	-1000	$\dots \rightarrow -\infty$
$f(x)$	-0.1	-0.01	-0.001	$\dots \rightarrow 0$

(۲)

در جدول شماره (۱) ملاحظه می‌شود، وقتی x بزرگ و مثبت است، $f(x)$ کوچک و مثبت است و، به‌طور کلی:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

در جدول شماره (۲) ملاحظه می‌شود، وقتی x بزرگ و منفی است، $f(x)$ کوچک و منفی است و، به‌طور کلی:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

بنابراین وقتی $x \rightarrow +\infty$ یا $x \rightarrow -\infty$ ، $f(x)$ به سمت ۰ میل می‌کند. اکنون به تعریف حد در بی‌نهایت می‌پردازیم (مسئله ۴):

تعریف: حد تابع وقتی $x \rightarrow +\infty$: تابع f را که برای هر $x > x_0$ تعریف شده است در نظر می‌گیریم. می‌گوییم هنگامی که x به سمت $+\infty$ میل می‌کند، حد تابع f عدد حقیقی L است. هرگاه وقتی x از هر عدد بسیار بزرگ مثبتی بزرگ‌تر باشد، $f(x)$ به سمت عدد L میل می‌نماید. یعنی:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$$

تعریف: حد تابع وقتی $x \rightarrow -\infty$: تابع f را که برای هر $x < x_0$ تعریف شده است در نظر می‌گیریم. می‌گوییم هنگامی که x به سمت $-\infty$ میل می‌کند، حد تابع f عدد حقیقی L است. هرگاه وقتی x از هر عدد منفی بسیار کوچکی کوچک‌تر باشد، $f(x)$ به سمت عدد L میل می‌نماید. یعنی:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$$

۷-۴ حد چند جمله‌ای‌ها

برای تعیین حد چند جمله‌ای $f(x)$ وقتی $x \rightarrow \pm\infty$ از روابط زیر استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x)) &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\text{جمله با کوچک‌ترین درجه}) \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x)) &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\text{جمله با بزرگ‌ترین درجه}) \end{aligned}$$

۸-۴ حد خارج قسمت چند جمله‌ای‌ها

اگر $f(x)$ و $g(x)$ دو چند جمله‌ای باشند، آن‌گاه (مسئله ۵):

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)}, \quad g(x_0) \neq 0$$

۹-۴ حد یک کسر وقتی صورت و مخرج هر دو به سمت بی‌نهایت میل می‌کنند

راه اول برای محاسبه حد خارج قسمت دو چند جمله‌ای وقتی $x \rightarrow +\infty$ یا $x \rightarrow -\infty$ این است که صورت و مخرج را بر جمله‌ای که دارای بزرگ‌ترین توان x است تقسیم کنیم و ببینیم برای صورت و مخرج جدید وقتی $x \rightarrow +\infty$ یا $x \rightarrow -\infty$ چه پیش می‌آید. راه دوم آن است که فرض کنیم $x = 1/t$ و حد را وقتی $t \rightarrow 0^+$ یا $t \rightarrow 0^-$ محاسبه کنیم. با استفاده از قاعده زیر می‌توان حد توابع گویا را هنگامی که x به سمت بی‌نهایت میل می‌کند، به‌دست آورد:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_0} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m} = \frac{a_n}{b_m} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^n}{x^m} = \begin{cases} 0 & n < m \\ \frac{a_n}{b_m} & n = m \\ \infty & n > m \end{cases}$$

برای محاسبه حالت سوم می‌بایست به علامت کسر توجه کرد (مسئله ۶).

۱۰-۴ محاسبه حد توابع نمایی و لگاریتمی وقتی $x \rightarrow \infty$

قضایای زیر در تعیین حد توابع نمایی و لگاریتمی مفید هستند. توجه داشته باشید که $x \in \mathbb{R}$ می‌باشد (مسئله ۷).

$$\begin{array}{ll} \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0, a > 1 & (۲) \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty, a > 1 & (۱) \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} n^x = +\infty, 0 < n < 1 & (۴) \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} n^x = 0, 0 < n < 1 & (۳) \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0, e = 2,718 \dots & (۶) \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty, e = 2,718 \dots & (۵) \\ \lim_{x \rightarrow +} \log_a x = -\infty, a > 1 & (۸) \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty, a > 1 & (۷) \\ \lim_{x \rightarrow +} \log_a x = +\infty, 0 < a < 1 & (۱۰) \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = -\infty, 0 < a < 1 & (۹) \end{array}$$

۱۱-۴ محاسبه یک حد مهم

در قضیه زیر x برحسب رادینان اندازه‌گیری شده است، در صورتی که x برحسب درجه باشد، قضیه زیر غلط خواهد بود (مسئله ۸).

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

از قضیه فوق می‌توان نتیجه گرفت: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin mx}{nx} = \frac{m}{n}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{nx}{\sin mx} = \frac{n}{m}$

قضیه فشار: فرض کنید در بازای حول x_0 (مگر احتمالاً در خود x_0) داشته باشیم $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$. اگر $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L$ ، آن‌گاه $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = L$ موجود و برابر L است.

۱۲-۴ بی‌نهایت کوچک‌ها و هم‌ارزی آن‌ها

تابع f را وقتی $x \rightarrow x_0$ یا $x \rightarrow \infty$ یک بی‌نهایت کوچک می‌گویند، هرگاه:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \quad \text{یا} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

تعریف: فرض کنید وقتی $x \rightarrow x_0$ دو تابع f و g بی‌نهایت کوچک هستند، f و g را «هم‌ارز» گویند، هرگاه:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

در این صورت می‌نویسیم $f(x) \sim g(x)$ در مجاورت x_0 .

۱۳-۴ کاربرد بی‌نهایت کوچک‌های هم‌ارز در محاسبه حد

فرض کنید وقتی $x \rightarrow x_0$ دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ بی‌نهایت کوچک هستند، اگر $f(x) \sim f_1(x)$ و $g(x) \sim g_1(x)$ باشد، آن‌گاه:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$$

یعنی برای محاسبه $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)/g(x)$ می‌توان به جای $f(x)$ هم‌ارز آن $f_1(x)$ و به جای $g(x)$ هم‌ارز آن $g_1(x)$ را قرار داد.

۱۴-۴ توابع هم‌ارز مثلثاتی

- (۱) وقتی $x \rightarrow 0$ ، آن‌گاه: $\sin x \sim x$
- (۲) وقتی $x \rightarrow 0$ ، آن‌گاه: $\tan x \sim x$
- (۳) وقتی $x \rightarrow x_0$ ، $m(x) \rightarrow 0$ ، آن‌گاه: $\sin^n(m(x)) \sim (m(x))^n$
- (۴) وقتی $x \rightarrow x_0$ ، $m(x) \rightarrow 0$ ، آن‌گاه: $\tan^n(m(x)) \sim (m(x))^n$

- (۵) وقتی $x \rightarrow x_0$, $m(x) \rightarrow 0$ آن‌گاه: $\text{Arcsin}(m(x)) \sim m(x)$
- (۶) وقتی $x \rightarrow x_0$, $m(x) \rightarrow 0$ آن‌گاه: $\text{Arc tan}(m(x)) \sim m(x)$
- (۷) وقتی $x \rightarrow x_0$, $m(x) \rightarrow 0$ آن‌گاه: $1 - \cos(m(x)) \sim (m(x))^2/2$
- (مسئله ۹)

۱۵-۴ هم‌ارزی رادیکال‌ها

$$\sqrt[m]{ax^m + bx^{m-1} + \dots + s} \sim \pm \sqrt[m]{a} \left(x + \frac{b}{am} \right) \quad a > 0, m \text{ زوج} \quad (۱)$$

$$\sqrt[m]{ax^m + bx^{m-1} + \dots + s} \sim \sqrt[m]{a} \left(x + \frac{b}{am} \right) \quad a > 0, m \text{ فرد} \quad (۲)$$

(مسئله ۱۰)

۱۶-۴ صورت‌های مبهم

عبارتی که به صورت $0/0$, ∞/∞ , $0 \times \infty$, $\infty \times \infty$, 0^∞ , ∞^0 , $\infty - \infty$ می‌باشند، مبهم‌اند. منظور از رفع ابهام این‌گونه عبارات، پیدا کردن مقدار واقعی آن‌ها می‌باشد. برای این منظور حالات زیر را در نظر می‌گیریم.

۱-۱۶-۴ نوع $0/0$ یا ∞/∞

اگر کسری به صورت $f(x)/g(x)$ داشته باشیم که مقدار آن در نقطه مثلاً $x = x_0$ به صورت $0/0$ یا ∞/∞ باشد و ضمناً حد $f(x)/g(x)$ وجود داشته باشد، در این صورت داریم:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

روش فوق مبتنی بر قاعده هوییتال است. بدین معنی که از صورت و مخرج کسر مشتق گرفته و سپس به جای x مقدار x_0 را گذاشته و مقدار واقعی آن را به دست می‌آوریم. این قاعده برای مقادیر محدود و نامحدود x_0 برقرار است. قاعده هوییتال به‌طور متوالی به‌کار می‌رود و اولین صورت معین جواب صحیح است (مسئله ۱۱).

۲-۱۶-۴ نوع $0 \times \infty$

اگر $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm \infty$ باشد. در این صورت حد عبارت $f(x).g(x)$ به صورت $0 \times (\pm \infty)$ و مبهم است، زیرا می‌توان آن را به صورت $0/0$ یا ∞/∞ به شکل زیر درآورد (مسئله ۱۲).

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x).g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{1/g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{1/f(x)}$$

۳-۱۶-۴ نوع 1^∞ یا ∞^0 یا 0^∞

حالت $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^{g(x)}$ ممکن است به صورت‌های 1^∞ یا ∞^0 یا 0^∞ درآید. که می‌توان آن را به صورت $0/0$ یا ∞/∞ به شکل زیر درآورد^۱ (مسائل ۱۳ و ۱۴).

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^{g(x)} = \exp \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{\ln f(x)}{1/g(x)} \right) = \exp \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{\ln g(x)}{1/f(x)} \right)$$

اگر حد یکی از مقادیر بالا برابر m باشد، حد تبع برابر e^m است.

(۱) $\exp f(x)$ به مفهوم $e^{f(x)}$ است.

نکته: حدهای زیر را به خاطر بسپارید.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(c + \frac{b}{x} \right)^{ax} = e^{ab}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(c - \frac{b}{x} \right)^{ax} = e^{-ab}$$

۴-۱۶-۴ نوع $\infty - \infty$

اگر $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ و $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$ در این صورت حد عبارت $(f(x) - g(x))$ به صورت $\infty - \infty$ است. که در این صورت تنها باید حد زیر را به دست آورد (مسئله ۱۵).

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{1}{1/f(x)} - \frac{1}{1/g(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{g(x)} \cdot \frac{1}{f(x)}} \right)$$

۴-۱۷ پیوستگی تابع در یک نقطه

تابع $y = f(x)$ در $x = c$ پیوسته است، اگر و تنها اگر هر سه شرط زیر در این نقطه برقرار باشد:

(۱) تابع در این نقطه تعریف شده باشد، یعنی $f(c)$ وجود داشته باشد.

(۲) تابع در این نقطه حد داشته باشد، یعنی $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ وجود داشته باشد.

(۳) حد تابع برابر مقدار تابع باشد، یعنی $f(c) = \lim_{x \rightarrow c} f(x)$ باشد.

اگر تابع $y = f(x)$ در نقطه $x = c$ یکی از سه شرط پیوستگی را نداشته باشد، گوییم تابع در نقطه $x = c$ ناپیوسته یا گسسته یا منفصل است (مسئله ۱۶).

۴-۱۸ پیوستگی راست و پیوستگی چپ در یک نقطه

هرگاه تابع $y = f(x)$ وقتی $x \rightarrow c$ حد نداشته باشد، اما دارای حد راست باشد و این حد با مقدار تابع در c برابر باشد، یعنی:

$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = f(c)$$

در این صورت می‌گویند که تابع در نقطه $x = c$ پیوستگی راست دارد و در صورتی که حد چپ تابع با مقدار تابع در c برابر باشد، یعنی:

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = f(c)$$

در این صورت می‌گویند که تابع در نقطه $x = c$ پیوستگی چپ دارد (مسئله ۱۷).

۴-۱۹ قضایای پیوستگی

(۱) اگر توابع f و g در $x = c$ پیوسته باشند، آن‌گاه همه ترکیب‌های زیر در $x = c$ پیوسته‌اند.

$$f + g, f - g, f \cdot g, \frac{f}{g} \quad g(c) \neq 0, \lambda g \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

(۲) هر چند جمله‌ای $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ در تمام نقاط پیوسته‌اند.

(۳) هر خارج قسمت $f(x)/g(x)$ از چند جمله‌ای‌ها در تمام نقاط غیر از $g(x) = 0$ پیوسته‌اند.

(۱) اساساً هنگامی تابع پیوسته است که منحنی منقطع نباشد.

- (۴) توابع رادیکالی با فرجه زوج در هر نقطه از دامنه تعریفشان که مقدار زیر رادیکال مثبت باشد، پیوسته‌اند.
- (۵) توابع رادیکالی با فرجه فرد در هر نقطه از دامنه تعریفشان پیوسته‌اند.
- (۶) اگر تابع f در $x = c$ پیوسته باشد و تابع g در $x = c$ ناپیوسته باشد، آنگاه توابع $(f + g)$ و $(f - g)$ در $x = c$ ناپیوسته‌اند. ولی وضع توابع $f \cdot g$ و f/g در $x = c$ نامعلوم است.
- (۷) اگر دو تابع f و g در $x = c$ ناپیوسته باشند. در حالت کلی وضع توابع $(f \pm g)$ و $f \cdot g$ و f/g در $x = c$ نامعلوم است.
- (۸) اگر تابع $f(x)$ در $x = c$ پیوسته باشد، آنگاه تابع $|f(x)|$ در $x = c$ پیوسته است.
- (۹) تابع $f(x) = \lambda$ در تمام نقاط پیوسته است ($\lambda \in \mathbb{R}$).
- (۱۰) تابع $f(x) = [x]$ ، در فاصله $[n, n+1)$ پیوسته است ($n \in \mathbb{Z}$).
- (۱۱) تابع $f(x) = [x] + [-x]$ در فاصله $(n, n+1)$ پیوسته است ($n \in \mathbb{Z}$).
- (۱۲) اگر $g(x)$ در $x = c$ و $f(x)$ در $x = g(c)$ پیوسته باشد، آنگاه $f \circ g$ در $x = c$ پیوسته است.
- (۱۳) اگر $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = L$ و تابع f در نقطه $x = L$ پیوسته باشد، آنگاه:

$$\lim_{x \rightarrow c} (f \circ g)(x) = \lim_{x \rightarrow c} f(g(x)) = f(\lim_{x \rightarrow c} g(x)) = f(L)$$

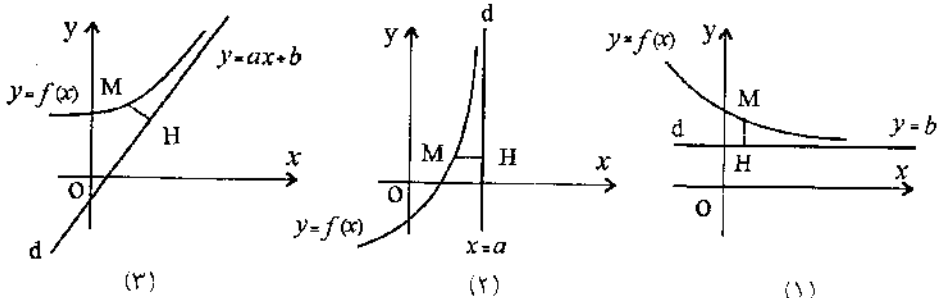
- (۱۴) توابع $y = \cos x$ و $y = \sin x$ در هر نقطه $x \in \mathbb{R}$ پیوسته است (مسائل ۱۸ و ۱۹ و ۲۰).

۲۰-۴ پیوستگی تابع در یک فاصله

- (۱) تابع f در فاصله (a, b) وقتی پیوسته است که این تابع در تمام نقاط این فاصله پیوسته باشد.
- (۲) تابع f در فاصله $[a, b)$ وقتی پیوسته است که اولاً: این تابع در فاصله (a, b) پیوسته باشد. ثانیاً: این تابع در $x = a$ پیوستگی راست داشته باشد.
- (۳) تابع f در فاصله $(a, b]$ وقتی پیوسته است که اولاً: این تابع در فاصله (a, b) پیوسته باشد. ثانیاً: این تابع در $x = b$ پیوستگی چپ داشته باشد.
- (۴) تابع f در فاصله $[a, b]$ وقتی پیوسته است که این تابع در a پیوستگی راست و در b پیوستگی چپ داشته باشد.

۲۱-۴ مجانب‌ها

اگر نقطه‌ای از منحنی نمایش تابع $y = f(x)$ و H تصویر آن بر خط d باشد و اگر M به سمت بی‌نهایت میل کند، ممکن است MH به سمت صفر نزدیک شود. در این صورت خط d را مجانب تابع $y = f(x)$ گویند.



- (۱) مجانب افقی $y = b$ خط راستی است موازی محور x ها.
- (۲) مجانب قائم $x = a$ خط راستی است موازی محور y ها.
- (۳) مجانب مایل $y = ax + b$ خط راستی است که دو محور را قطع می‌کند.

۴-۲۱-۱ مجانب افقی

هرگاه حد تابع $y = f(x)$ وقتی $x \rightarrow +\infty$ یا $x \rightarrow -\infty$ عددی مانند b باشد، خط $y = b$ را مجانب افقی متحنی گوئیم (شکل ۱). برای محاسبه مجانب افقی باید حد تابع را وقتی $x \rightarrow +\infty$ یا $x \rightarrow -\infty$ به دست آورد.

الف) مجانب افقی در توابع کسری: یک تابع کسری وقتی مجانب افقی دارد که یا درجه صورت کسر با درجه مخرج کسر مساوی باشد یا درجه صورت کسر کم‌تر از درجه مخرج کسر باشد. اگر درجه صورت همواره کوچک‌تر از درجه مخرج باشد، خط $y = 0$ مجانب افقی تابع است.

ب) مجانب افقی در توابع رادیکالی غیرکسری: با استفاده از هم‌ارزی رادیکال‌ها مجانب افقی این توابع را به دست می‌آوریم (مسئله ۲۱).

۴-۲۱-۲ مجانب قائم

هرگاه $x \rightarrow a^+$ یا $x \rightarrow a^-$ یا $x \rightarrow a$ آن‌گاه $f(x) \rightarrow +\infty$ یا $f(x) \rightarrow -\infty$ ، در این صورت خط $x = a$ را مجانب قائم متحنی گوئیم (شکل ۲). برای محاسبه مجانب قائم، y را به سمت بی‌نهایت میل داده اگر برای x عدد معین a به دست آید، یعنی x به سمت a میل می‌کند، گوئیم $x = a$ مجانب قائم است.

الف) مجانب قائم در توابع کسری: در این نوع توابع مخرج کسر را باید به سمت صفر میل دهیم تا $f(x)$ یا y به سمت $+\infty$ یا $-\infty$ میل کند. اما در عمل معمولاً مخرج کسر را مساوی صفر قرار می‌دهیم و در ازای آن x را محاسبه می‌کنیم (مسئله ۲۲).

ب) مجانب قائم در توابع رادیکالی: در توابع رادیکالی که عدد فرجه زوج است، ابتدا دامنه تعریف تابع را تعیین می‌کنیم و مجانب قائم متحنی تابع را این‌گونه به دست می‌آوریم. اگر $x = a$ مجانب قائم متحنی یک تابع باشد، حتماً عدد a عضو دامنه تعریف تابع نیست (زیرا ریشه کسر است) ونی حداقل a^+ یا a^- باید عضو دامنه باشد تا خط $x = a$ مجانب قائم قابل قبول باشد (مسئله ۲۳).

۴-۲۱-۳ مجانب مایل

هرگاه حد تابع $y = f(x)$ وقتی $x \rightarrow +\infty$ یا $x \rightarrow -\infty$ برابر ∞ باشد، امکان آن‌که تابع مجانب مایل داشته باشد، وجود دارد. برای این‌که تابع دارای مجانب مایل باشد یا نه، قضیه زیر را بیان می‌کنیم (شکل ۳):

شرح لازم و کافی برای آن‌که خط $Y = ax + b$ یک مجانب مایل متحنی $y = f(x)$ باشد آنست که:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} |y - Y| = 0 \quad \text{یا} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} |Y - y| = 0$$

روش‌های تعیین مجانب مایل عبارتند از:

الف) روش حد: اگر خط $Y = ax + b$ معادله خط مجانب مایل متحنی تابع $y = f(x)$ باشد، باید مقادیر a و b را تعیین کنیم. برای این‌کار مقادیر a و b را از روابط زیر به دست می‌آوریم:

$$a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (y - ax)$$

وقتی $x \rightarrow -\infty$ می‌توان همین نتایج را به دست آورد (مسئله ۲۴).

(۱) اگر $a = 0$ و b حد معینی داشته باشد (عدد حقیقی) مجانب مایل به مجانب افقی $y = b$ تبدیل می‌شود. اگر a یک عدد حقیقی و b به سمت بی‌نهایت میل کند، متحنی مجانب مایل نخواهد داشت بلکه متحنی دارای شاخه سهمی مانند در امتداد خطی با ضریب زاویه a است.

(۲) اگر a بی‌نهایت شود، تابع مجانب مایل ندارد، بلکه دارای شاخه سهمی مانند در امتداد محور y ها می‌باشد.

ب) روش مستقیم: در توابع کسری اگر درجه صورت کسری یک واحد بیش تر از درجه مخرج کسر باشد، منحنی حتماً دارای مجانب مایل خواهد بود و برای تعیین آن صورت کسر را بر مخرج آن تقسیم می‌کنیم، خط (خارج قسمت $= y$) را معادله مجانب مایل گویند (مسئله ۲۵).

ج) روش تقاطع: مجانب‌ها در بی‌نهایت بر منحنی تابع مماس هستند، بنابراین اگر خط $Y = ax + b$ معادله مجانب مایل تابع $y = f(x)$ باشد، باید معادله تقاطع آن‌ها ریشه مضاعف ∞ داشته باشد. لذا باید ضرایب دو جمله متوالی از بزرگ‌ترین درجات معادله تقاطع را به سمت صفر میل دهیم، تا a و b به دست آیند. اگر تابع $y = f(x)$ یک تابع اصم یا فرجه زوج باشد، مجانب که به روش تقاطع به دست می‌آید وقتی قابل قبول است که لااقل یک دسته از بی‌نهایت‌های تابع در آن صدق کند (مسئله ۲۶).

نکته: در توابعی که به صورت $y = \alpha x + \beta \pm \sqrt[n]{ax^n + bx^{n-1} + \dots}$ هستند، معادلات مجانب‌های افقی و مایل از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$y = \alpha x + \beta \pm \sqrt[n]{a} \left(x + \frac{b}{an} \right)$$

که اگر n زوج باشد برای هر تابع دو مجانب و اگر n فرد باشد برای هر تابع فقط یک مجانب به دست می‌آید.

۴-۲۱-۴ تعیین مجانب‌های پارامتری

معادله این منحنی‌ها به صورت $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$ می‌باشد، سه حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

۱) اگر $t \rightarrow t_0, (t \neq t_0), f(t) \rightarrow \pm\infty$ و $g(t) \rightarrow \pm\infty$ دارای حد متناهی a باشد، خط $x = a$ را یک مجانب قائم منحنی نامند.

۲) اگر $t \rightarrow t_0, (t \neq t_0), f(t) \rightarrow \pm\infty$ و $g(t) \rightarrow \pm\infty$ دارای حد متناهی b باشد، خط $y = b$ را یک مجانب افقی منحنی نامند.

۳) اگر $t \rightarrow t_0, f(t) \rightarrow \pm\infty$ و $g(t) \rightarrow \pm\infty$ امکان مجانب مایل وجود دارد و از «روش حد» معادله آن را تعیین می‌کنیم.

اگر $a = 0$ شود، منحنی دارای یک شاخه سهمی شکل در امتداد محور x هاست. اگر $a = \pm\infty$ شود، منحنی دارای شاخه سهمی شکل در امتداد محور y هاست و اگر a متناهی و مخالف صفر باشد معادله آن به صورت کلی $Y = ax + b$ خواهد بود (مسئله ۲۷).

مسائل نمونه فصل ۴

۱. حد راست و چپ تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} 2x & x \geq 1 \\ x-1 & x < 1 \end{cases}$ را در نقطه $x = 1$ بیابید.
۲. حد تابع $f(x) = [x] + 1$ را در نقطه $x = 1/3$ به دست آورید.
- (۱۵-۳) حد توابع زیر را بیابید.

$$۳) \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{x^2 - 2x + 1}$$

$$۴) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x-1}{x+2}$$

$$۵) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{x - 2}$$

$$۶) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2 - x + 5}{-2x^2 + 1}$$

$$۷) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} \right)^{1/x}$$

$$۸) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos x - 1}{x}$$

$$۹) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cot \sqrt{x}}{\cot x}$$

$$۱۰) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3 + 3x + 5} - 2x - 1$$

$$۱۱) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{x^2}$$

$$۱۲) \lim_{x \rightarrow \infty} x(e^{1/x} - 1)$$

$$۱۳) \lim_{x \rightarrow \infty} (1 - 2x)^{1/x}$$

$$۱۴) \lim_{x \rightarrow \infty} x^{1/x}$$

$$۱۵) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right)$$

۱۶. a را طوری تعیین کنید که تابع $f(x) = \begin{cases} (x^2 - 1)/(x - 1) & x \neq 1 \\ (a - 1)/(a + 1) & x = 1 \end{cases}$ در نقطه $x = 1$ پیوسته باشد.

۱۷. پیوستگی تابع $f(x) = \begin{cases} x & x \geq 1 \\ x^2 - 1 & x < 1 \end{cases}$ را در نقطه $x = 1$ بررسی کنید.

(۱۸-۱۹). توابع زیر به ازای چه مقادیری از x پیوسته‌اند؟

$$۱۸) f(x) = \frac{x^2 + 7x + 6}{x^2 - 1}$$

$$۱۹) h(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

۲۰. طول نقطه گسستگی تابع $y = (x - 1)/(e^{2x} - 27)$ را بیابید.

۲۱. مجانب افقی تابع با ضابطه $y = x/\sqrt{x^2 + 1}$ را بیابید.

(۲۲-۲۳). مجانب قائم توابع زیر را بیابید.

$$۲۲) y = \frac{x - 2}{x^2 - x}$$

$$۲۳) y = \frac{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}{x - 1}$$

(۲۴-۲۶). مجانب مایل توابع زیر را بیابید.

$$۲۴) y = \frac{3x^2 - 5x + 1}{x - 2}$$

$$۲۵) y = \frac{x^2}{x^2 + x - 2}$$

$$۲۶) y = \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

۲۷. معادله مجانب‌های پارامتری $\begin{cases} x = \frac{t^2}{t+1} \\ y = \frac{t}{t-1} \end{cases}$ را بیابید.

پاسخ مسائل نمونه فصل ۴

۱.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x) = 2 \times 1 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x - 1) = 1 - 1 = 0$$

۲.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1/2^+} f(x) &= 1 + 1 = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1/2^-} f(x) &= 1 + 1 = 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1/2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1/2^-} f(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1/2} f(x) = 2$$

۳.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{(x-1)^2} = \frac{1}{(0^-)^2} = +\infty$$

۴.

$$x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$\begin{array}{c|ccc} x & -\infty & 1 & +\infty \\ \hline x^2 - 2x + 1 & + & 0 & + \end{array} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} x/x^2 - 2x + 1 = 1/0^+ = +\infty$$

۴.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x-1}{x+2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x \left(2 - \frac{1}{x}\right)}{x \left(1 + \frac{2}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{2}{x}} = \frac{2-0}{1+0} = 2$$

۵.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{x-2} &= \frac{0}{0} \\ \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} &= \lim_{x \rightarrow 2} (x+2) = 4 \end{aligned}$$

۶.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2 - x + 5}{-3x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2}{-3x^2} = -\frac{2}{3}$$

 ۷. اگر $l = 1/x$ باشد، وقتی $x \rightarrow 0^+$ در این صورت $l \rightarrow +\infty$ و در نتیجه:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^{1/x} = \lim_{l \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{l}\right)^l = 0$$

۸.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} &= \frac{0}{0} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} \times \frac{\cos x + 1}{\cos x + 1} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - 1}{x(\cos x + 1)} = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin^2 x}{x(\cos x + 1)} \\ &= -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\cos x + 1} = -1 \times 0 = 0 \end{aligned}$$

۹.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cot 2x}{\cot 3x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{\tan 3x}, \quad \tan 2x \sim 2x, \tan 3x \sim 3x \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{\tan 3x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

۱۰.

$$\begin{aligned} \sqrt{4x^2 + 2x + 5} &\sim \sqrt{4} \left(x + \frac{2}{4 \times 2}\right) \sim 2 \left(x + \frac{1}{4}\right) \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[2 \left(x + \frac{1}{4}\right) - 2x - 1\right] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} - 1\right) = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{x^2} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{هویتال}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{2x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{هویتال}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{1+1}{2} = 1 \quad .11$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x(e^{1/x} - 1) = \infty \times 0 \quad .12$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x(e^{1/x} - 1) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{1/x} - 1}{\frac{1}{x}} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{هویتال}} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{e^{1/x}}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = e^1 = 1 \quad .13$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - x)^{1/x} = 1^\infty$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} (1 - x)^{1/x} &= \exp \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - x)}{\frac{1}{x}} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{هویتال}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{1-x}}{\frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{1-x} = -1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1 - x)^{1/x} = e^{-1} \end{aligned} \quad .14$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{1/x} = \infty^0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{1/x} = \exp \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{\text{هویتال}} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x^{1/x} = e^0 = 1 \quad .15$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) = \infty - \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x - \sin x}{x \sin x} \right) = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{هویتال}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos x}{\sin x + x \cos x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{هویتال}} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{\cos x + \cos x - x \sin x} = 0 \quad .16$$

$$f(1) = \frac{a-1}{a+1}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2 \end{aligned}$$

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \Rightarrow \frac{a-1}{a+1} = 2 \Rightarrow a = -3$$

$$f(1) = 1 \quad 1 \in D_f$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 - 1) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \text{ وجود ندارد}$$

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1$$

بنابراین تابع $f(x)$ در نقطه $x = 1$ پیوستگی راست دارد.

۱۸. تابع f در تمام نقاط غیر از $x = 1$ یا $x = -1$ پیوسته است.

۱۹. تابع h در هر نقطه از فاصله $(-3, 3)$ پیوسته است.

۲۰.

$$e^{2x} - 27 = 0 \Rightarrow e^{2x} = 27 \Rightarrow \ln e^{2x} = \ln 27 \Rightarrow 2x = \ln 27$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2} \ln 27 = \ln 27^{1/2} \Rightarrow x = \ln \sqrt[3]{27} \Rightarrow x = \ln 3$$

۲۱.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{|x|} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = 1 \Rightarrow y = 1 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{-x} = -1 \Rightarrow y = -1 \end{cases}$$

۲۲.

$$x^2 - x = 0 \Rightarrow x(x - 1) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 1, x = -1$$

۲۳.

$$x^2 - 5x + 6 \geq 0 \Rightarrow (x - 2)(x - 3) \geq 0 \Rightarrow D_f = (-\infty, 2] \cup [3, +\infty)$$

$$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

۲۴.

$$a = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{3x^2 - 5x + 1}{x - 2}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^2 - 5x + 1}{x^2 - 2x} \Rightarrow a = 3$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (y - ax) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{3x^2 - 5x + 1}{x - 2} - 3x \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x + 1}{x - 2} \Rightarrow b = 1 \Rightarrow y = 3x + 1$$

۲۵.

$$\begin{array}{r} x^2 \\ -x^2 + x^2 - 2x \\ + \\ -x^2 + 2x \\ -x^2 - x + 2 \\ + \quad + \quad - \\ \hline 3x - 2 \end{array} \quad \frac{|x^2 + x - 2|}{x - 1} \Rightarrow y = x - 1$$

۲۶. شرط لازم مجانب مایل دو دسته از بی‌نهایت‌ها $\begin{cases} x \rightarrow \pm\infty \\ y \rightarrow \pm\infty \end{cases}$ ، فرض می‌کنیم $y = ax + b$ معادله مجانب

مایل منحنی تابع باشد، پس:

$$\begin{aligned} \begin{cases} y = \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x^2 + 1}} \\ y = ax + b \end{cases} &\Rightarrow ax + b = \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x^2 + 1}} \Rightarrow a^2 x^2 + 2abx + b^2 = \frac{x^2 + 2x^2 + 1}{x^2 + 1} \\ &\Rightarrow a^2 x^2 + a^2 x^2 + 2abx^2 + 2abx + b^2 x^2 + b^2 = x^2 + 2x^2 + 1 \\ &\Rightarrow (a^2 - 1)x^2 + 2abx^2 + (a^2 + b^2 - 2)x^2 + 2abx + b^2 - 1 = 0 \\ &\Rightarrow \begin{cases} a^2 - 1 = 0 & \Rightarrow a = \pm 1 \\ 2ab = 0 & \Rightarrow b = 0 \end{cases} \Rightarrow y = x, y = -x \end{aligned}$$

هر دو معادله فوق قابل قبولند زیرا یک دسته از بی‌نهایت‌های تابع در هر کدام از آن‌ها صدق می‌کند.
۲۷. ابتدا مخارج کسرها را مساوی صفر قرار می‌دهیم تا معلوم شود به ازای چه مقادیری از t ، x و y به سمت بی‌نهایت میل می‌کنند.

$$t + 1 = 0 \Rightarrow t = -1, t - 1 = 0 \Rightarrow t = 1$$

$$\text{اگر: } t \rightarrow 1 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{1+1} \\ y \rightarrow \pm\infty \end{cases} \Rightarrow x = \frac{1}{2} \text{ قائم}$$

$$\text{اگر: } t \rightarrow -1 \Rightarrow \begin{cases} x \rightarrow \pm\infty \\ y = \frac{-2}{-1-1} \end{cases} \Rightarrow y = 1 \text{ افقی}$$

$$\text{اگر: } t \rightarrow \pm\infty \Rightarrow \begin{cases} \lim_{t \rightarrow \pm\infty} x = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{t^2}{t+1} = \pm\infty \\ \lim_{t \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{2t}{t-1} \Rightarrow y = 2 \text{ افقی} \end{cases}$$

سؤالات تستی فصل ۴

$$۱- \text{ حد راست تابع } f(x) = \begin{cases} x+2 & x > 1 \\ (x-2)/2 & x \leq 1 \end{cases}, \text{ در نقطه } x=1 \text{ کدام است؟}$$

۳ (۱) $-\frac{1}{2}$ (۲) ۱ (۳) وجود ندارد (۴)

$$۲- \text{ حد تابع } f(x) = \begin{cases} 2-2x & x \geq 2 \\ -x^2-1 & x < 2 \end{cases}, \text{ در نقطه } x=2 \text{ کدام است؟}$$

۴ (۱) -5 (۲) وجود ندارد (۳) ۲ (۴)

$$۳- \text{ اگر } f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq -2 \\ mx+n & -2 < x < 2 \\ 2x-6 & x \geq 2 \end{cases}, \text{ باشد، به ازای کدام مقدار } m \text{ و } n \text{ این تابع دارای حد است؟}$$

۳ (۱) $m = \frac{3}{4}, n = 1$ (۲) $m = \frac{2}{3}, n = 1$ (۳) $m = -\frac{2}{3}, n = 1$ (۴) $m = -\frac{3}{4}, n = 1$

۴- حد تابع $f(x) = \begin{cases} 2 \sin x - 1 & x \geq \pi/2 \\ \cos x + 1 & x < \pi/2 \end{cases}$ در نقطه $x = \pi/2$ کدام است؟

(۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۰ (۴) وجود ندارد

۵- تابع $f(x) = \begin{cases} ax + 2b & x > 3 \\ ax^2 + bx + 2 & x < 3 \end{cases}$ مفروض است، عدددهی a و b را چنان بپایید که $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 6$ و $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 2$ باشد.

(۱) $b = -6, a = -2$ (۲) $b = 6, a = -2$ (۳) $b = 6, a = 2$ (۴) $b = -6, a = 2$

۶- تابع $f(x)$ به صورت مقابل تعریف شده است، مقادیر a و b برای آنکه $\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x)$ موجود باشند، کدام است؟

$$f(x) = \begin{cases} 2x - a & x < -3 \\ ax + 2b & -3 \leq x \leq 3 \\ b - 5x & x > 3 \end{cases}$$

(۱) $b = 6, a = 3$ (۲) $b = 6, a = -3$ (۳) $b = -6, a = 3$ (۴) $b = -6, a = -3$

۷- حد تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & x \neq 0 \\ 2 & x = 0 \end{cases}$ در نقطه $x = 0$ کدام است؟

(۱) $\sqrt{3}$ (۲) ۲ (۳) ۰ (۴) حد ندارد

۸- تابع $f(x) = a[x] + [x + 1]$ در نقطه $x = 1$ دارای حد است؟

(۱) -۱ (۲) ۲ (۳) -۲ (۴) ۱

۹- تابع $f(x) = E((x^2 - x)/6)$ در نقطه‌ای به طول $x = 1493$:

(۱) مقدار دارد ولی حد ندارد (۲) حد دارد ولی مقدار ندارد
(۳) حد و مقدار مساوی دارد (۴) حد و مقدار نامساوی دارد

۱۰- حد عبارت $[x] + [x^2] + [x^3] + \dots + [x^{1000}]$ وقتی $x \rightarrow 0^-$ کدام است؟

(۱) ۱۰۰۰ (۲) -۱۰۰۰ (۳) -۵۰۰ (۴) ۵۰۰

۱۱- حد راست تابع $f(x) = 2^{-(2^{1/(x-1)})}$ در نقطه $x = 1$ کدام است؟

(۱) ۰ (۲) $+\infty$ (۳) $-\infty$ (۴) ۲

۱۲- حد تابع $f(x) = \frac{3^{1/x} - 3^{-1/x}}{3^{1/x} + 3^{-1/x}}$ وقتی $x \rightarrow 0^+$ کدام است؟

(۱) $+\infty$ (۲) $-\infty$ (۳) ۱ (۴) -۱

۱۳- حد تابع $f(x) = (3x + 5)/(x^2 - 4)$ وقتی $x \rightarrow 2$ کدام است؟

(۱) ۰ (۲) $+\infty$ (۳) $-\infty$ (۴) حد ندارد

۱۴- حد عبارت $((1+x)^{1/5} - (1-x)^{1/5}) / ((1+x)^{1/3} - (1-x)^{1/3})$ وقتی $x \rightarrow 0$ کدام است؟

(۱) ۰ (۲) $-\frac{3}{2,6}$ (۳) ۳ (۴) $\frac{3}{2,6}$

۱۵- حد عبارت $(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) \cdot \frac{1}{n^3}$ وقتی $n \rightarrow \infty$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{3}$ (۲) ۳ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{1}{6}$

- ۱۶- حاصل $\lim_{x \rightarrow \infty} |x|/(|x|+1)$ وقتی $x \rightarrow \infty$ کدام است؟
 (۱) ۰ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) وجود ندارد
- ۱۷- حد عبارت $\sec x / \tan x$ وقتی $x \rightarrow \pi^+$ کدام است؟
 (۱) ۰ (۲) ۱ (۳) -۱ (۴) وجود ندارد
- ۱۸- حد تابع $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)/(2x+1)^5$ وقتی $x \rightarrow +\infty$ کدام است؟
 (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{16}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) ۱
- ۱۹- حاصل $\lim_{x \rightarrow \infty} (2x-3)^{2x} (3x+2)^{2x} / (2x+1)^{5x}$ وقتی $x \rightarrow \infty$ کدام است؟
 (۱) $\left(\frac{2}{3}\right)^{20}$ (۲) $\left(\frac{2}{3}\right)^{20}$ (۳) $\left(\frac{3}{2}\right)^{20}$ (۴) $\left(\frac{2}{3}\right)^{20}$
- ۲۰- حد تابع $f(x) = \{(x+1)^2 / (3x^2 - 5x + 1)\}^{(2x+1)/(3+x)}$ وقتی $x \rightarrow +\infty$ کدام است؟
 (۱) ۹ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{9}$ (۴) ۳
- ۲۱- حاصل $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 1/2 + 1/4 + \dots + 1/2^n}{1 + 1/3 + 1/9 + \dots + 1/3^n}$ وقتی $n \rightarrow \infty$ کدام است؟
 (۱) $\frac{4}{3}$ (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{2}{3}$
- ۲۲- حاصل $\lim_{n \rightarrow \infty} n! / (1 + 2 + 3 + \dots + n)$ برابر است با:
 (۱) ۲ (۲) ۱ (۳) $-\infty$ (۴) $+\infty$
- ۲۳- حاصل $\lim_{x \rightarrow \infty} 5x^2 / \sqrt{x^6 + 1}$ برابر است با:
 (۱) ۵ (۲) $\frac{1}{5}$ (۳) $\frac{1}{6}$ (۴) ۶
- ۲۴- حاصل $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{2} \times \dots \times \sqrt[3]{2})$ وقتی $n \rightarrow \infty$ کدام است؟
 (۱) $\sqrt{2}$ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) ۰
- ۲۵- اگر $\lim_{x \rightarrow \infty} (m-1)(x+1)/(4-m)(x+2) = 1/2$ ، آنگاه m کدام است؟
 (۱) ۲ (۲) ۱ (۳) -۲ (۴) -۱
- ۲۶- حاصل $\lim_{x \rightarrow 2^-} x^2 |4x-8|/(x-2)$ وقتی $x \rightarrow 2^-$ کدام است؟
 (۱) ۸ (۲) ۴ (۳) ۱۶ (۴) -۱۶
- ۲۷- حد تابع $f(x) = (e^x - \sin x - \cos x)/x^2$ در صفر کدام است؟
 (۱) -۱ (۲) ۱ (۳) ۰ (۴) $+\infty$
- ۲۸- حد عبارت $\ln(\cos x) / \ln(\tan x)$ وقتی $x \rightarrow \pi/2$ کدام است؟
 (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $-\frac{1}{2}$
- ۲۹- حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^-} (2+x)/(2+2^{1/x})$ وقتی $x \rightarrow 0^-$ کدام است؟
 (۱) ۰ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $-\infty$
- ۳۰- اگر $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 4$ ، آنگاه $(4x-1)/x < f(x) < (4x^2+x)/x^2$ کدام است؟
 (۱) ۰ (۲) ۱ (۳) وجود ندارد (۴) ۲

۳۱- حد تابع $f(x) = 1/\ln x - 1/(x-1)$ وقتی $x \rightarrow 1$ برابر است با:

$$\frac{1}{2} (1) \quad -\frac{1}{2} (2) \quad 1 (3) \quad -1 (4)$$

۳۲- اگر $f(x) = (x+1)/(x-2)$ باشد، آنگاه $\lim_{x \rightarrow 2} f^{-1}(x)$ وقتی $x \rightarrow 2$ کدام است؟

$$2 (1) \quad -1 (2) \quad 3 (3) \quad 5 (4)$$

۳۳- حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - 5/3x)^x$ برابر است با:

$$e^{-5/3} (1) \quad e^{-3/5} (2) \quad e^{5/3} (3) \quad e^{3/5} (4)$$

۳۴- حاصل $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x/x^k$ وقتی $x \rightarrow \infty$ برابر است با:

$$\infty (1) \quad k (2) \quad 1 (3) \quad 0 (4)$$

۳۵- اگر $f(x) = |\operatorname{sgn}(x)|$ باشد، کدام رابطه درست است؟

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1 (1) \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1 (2) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1 (3) \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1 (4)$$

۳۶- حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x - |\tan x|)/(|\sin x| - x)$ وقتی $x \rightarrow 0^+$ کدام است؟

$$-2 (1) \quad 3 (2) \quad 2 (3) \quad 1 (4)$$

۳۷- حاصل $\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin 30^\circ/n$ وقتی $n \rightarrow \infty$ کدام است؟

$$0 (1) \quad n30^\circ (2) \quad \frac{1}{2} (3) \quad 30^\circ (4)$$

۳۸- حاصل $\lim_{x \rightarrow +4} \frac{3 - [x]}{x^2 - 9}$ برابر است با:

$$0 (1) \quad 1 (2) \quad +\infty (3) \quad -\infty (4)$$

۳۹- حد عبارت $(x - \ln \cos hx)$ وقتی $x \rightarrow +\infty$ برابر است با:

$$\ln 2 (1) \quad 1 (2) \quad \ln 3 (3) \quad e^2 (4)$$

۴۰- اگر دو تابع $f(x) = x - \sin x$ و $g(x) = ax^b$ وقتی $x \rightarrow 0$ هم‌ارز باشند، a و b کدام است؟

$$b = \frac{1}{2}, a = 1 (1) \quad b = 3, a = 1 (2) \quad b = 1, a = \frac{1}{6} (3) \quad b = 3, a = \frac{1}{6} (4)$$

۴۱- حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x} - 1) / (3\sqrt{x} - 1)$ کدام است؟

$$1 (1) \quad 3 (2) \quad \frac{\ln 8}{\ln 3} (3) \quad \log_3 8 (4)$$

۴۲- حاصل $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(x+n)^n - x^n}{n}$ برابر است با:

$$3 (1) \quad 3x^2 (2) \quad 3nx^2 (3) \quad x^2 (4)$$

۴۳- حد تابع $f(x) = \operatorname{Arccos}(x + \sqrt{x^2 - 2x}) / (2x - 1)$ وقتی $x \rightarrow -\infty$ برابر است با:

$$0 (1) \quad \pi (2) \quad \frac{\pi}{2} (3) \quad 1 (4)$$

۴۴- حاصل $\lim_{x \rightarrow \infty} x.e^{-x}$ برابر است با:

$$0 (1) \quad 1 (2) \quad e (3) \quad e^{-1} (4)$$

۴۵- حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} (x + e^{2x})^{1/x}$ وقتی $x \rightarrow 0$ برابر است با:

$$e^{-2} (1) \quad e^2 (2) \quad e (3) \quad e^{-2} (4)$$

۴۶- حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x \cdot \sin 2x \cdot \dots \cdot \sin nx / x^n$ برابر است با:

$\frac{n!}{n}$ (۴) $n!$ (۳) ۱ (۲) n (۱)

۴۷- حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1-x)^{1/x}$ وقتی $x \rightarrow 0^+$ برابر است با:

e^{-1} (۴) e^1 (۳) e^{-1} (۲) e (۱)

۴۸- اگر $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1+1/x)^x = e$ باشد، آنگاه $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1+1/x)^{x-2/2}$ کدام است؟

$e^{1/2}$ (۴) $e^{-1/2}$ (۳) $-\frac{1}{e}$ (۲) $\frac{1}{e}$ (۱)

۴۹- حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin x)^{\cot x}$ برابر است با:

۰ (۴) ۱ (۳) $-\infty$ (۲) $+\infty$ (۱)

۵۰- حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x + \cos x)^{1/x}$ برابر است با:

e^2 (۴) e^{-1} (۳) ۱ (۲) e (۱)

۵۱- حاصل حد $(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}) / \sqrt{2x+1}$ وقتی $x \rightarrow +\infty$ کدام است؟

هیچ کدام (۴) ۱ (۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۲) $\sqrt{2}$ (۱)

۵۲- حاصل حد $\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right)$ وقتی $x \rightarrow 0$ کدام است؟

-1 (۴) $\frac{1}{e}$ (۳) ۱ (۲) $-\frac{1}{e}$ (۱)

۵۳- فرض کنید $g(x) = \begin{cases} x-1 & x > 1 \\ x^2+1 & x \leq 1 \end{cases}$ در این صورت $\lim_{x \rightarrow 0} g(g(g(x)))$ برابر است با:

۱۶ (۴) ۲ (۳) -2 (۲) -16 (۱)

۵۴- حد تابع $f(x) = (2x-2)/\sqrt{x+26} - 3$ وقتی $x \rightarrow 1$ برابر است با:

۳۲ (۴) ۳ (۳) ۲۶ (۲) ۵۲ (۱)

۵۵- حاصل $\lim_{x \rightarrow \pi/2} (1 + \cos x)^{\tan x}$ برابر است با:

e^{-3} (۴) e^3 (۳) e^{-1} (۲) e^1 (۱)

۵۶- حد تابع $f(x) = \sqrt{x^2+4x-1} - ax + b$ وقتی $x \rightarrow +\infty$ برابر ۵ است، $a+b$ کدام است؟

۵ (۴) ۱ (۳) ۳ (۲) ۴ (۱)

۵۷- اگر $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x+1} - mx - n\right) = 0$ باشد، m و n کدام است؟

$n=1, m=-1$ (۴) $n=-1, m=1$ (۳) $m=n=1$ (۲) $m=n=-1$ (۱)

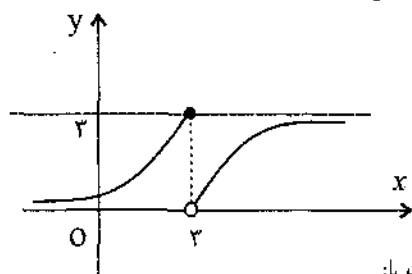
۵۸- حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} (-1)^{[x]}/(x-1)$ برابر است با:

وجود ندارد (۴) ۰ (۳) $-\infty$ (۲) $+\infty$ (۱)

۵۹- کدام یک از موارد زیر درست است؟

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin x) e^{1/x} = \infty$ (۴) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin x) e^{1/x} = 1$ (۳) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin x) e^{1/x} = -1$ (۲) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin x) e^{1/x} = 0$ (۱)

۶۰- در مورد تابع f که نمودار آن در مقابل رسم شده است، کدام رابطه نادرست است؟



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2 \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0 \quad (3)$$

$$f(2) = 2 \quad (4)$$

۶۱- اگر $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e$ ، آنگاه $\lim_{x \rightarrow 0} (1+ax)^{a/x}$ برابر است با:

$$e^{a^2} \quad (1) \quad e^{1/a} \quad (2) \quad e^{1/a^2} \quad (3) \quad e \text{ هیچ کدام} \quad (4)$$

۶۲- حد عبارت $\frac{\sin(1/x)}{\tan^{-1}(1/x)}$ وقتی $x \rightarrow \infty$ برابر است با:

$$1 \quad (1) \quad 0 \quad (2) \quad +\infty \quad (3) \text{ هیچ کدام} \quad (4)$$

۶۳- حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \sin \sin \dots \sin x^n / \tan x, \tan 2x, \dots, \tan nx$ برابر است با:

$$n \quad (1) \quad n! \quad (2) \quad \frac{n!}{n} \quad (3) \quad \frac{n}{n!} \quad (4)$$

۶۴- حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1/x)^{\sin x}$ برابر است با:

$$1 \quad (1) \quad e \quad (2) \quad -1 \quad (3) \quad e^{-1} \quad (4)$$

۶۵- حاصل $\lim_{x \rightarrow k} (x^a - k^a) / (k^b - x^b)$ وقتی $x \rightarrow k$ کدام است؟ $(a, b \in \mathbb{N})$

$$-\frac{a}{b} \quad (1) \quad K^{a-b} \quad (2) \quad -\frac{a}{b} K^{a-b} \quad (3) \quad \frac{b}{a} K^{b-a} \quad (4)$$

۶۶- c را به قسمی بیابید که $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+c}{x-c} \right)^x = 2$

$$c = \ln 2 \quad (1) \quad c = 2 \quad (2) \quad c = \ln 4 \quad (3) \quad c = 4 \quad (4)$$

۶۷- حاصل $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x} / \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$ برابر است با:

$$1 \quad (1) \quad 0 \quad (2) \quad \infty \quad (3) \text{ هیچ کدام} \quad (4)$$

۶۸- حاصل $\lim_{x \rightarrow 1^+} ([x]^1 - [x]^1) / (x^1 - 1)$ برابر است با:

$$1 \quad (1) \quad 0 \quad (2) \quad \frac{1}{2} \quad (3) \quad -1 \quad (4)$$

۶۹- حاصل $\lim_{x \rightarrow \pi/2^-} \sec^2 x / \sec^2 2x$ کدام است؟

$$\frac{1}{4} \quad (1) \quad 18 \quad (2) \quad 9 \quad (3) \quad 3 \quad (4)$$

۷۰- حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin^{-1} x \cdot \operatorname{cosec} x$ کدام است؟ $(\sin^{-1} x = \operatorname{Arcsin} x)$

$$1 \quad (1) \quad -1 \quad (2) \quad +\infty \quad (3) \quad 0 \quad (4)$$

۷۱- حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} (1/x^2 - 1/x^2 \sec x)$ برابر است با:

$$1 \quad (1) \quad -1 \quad (2) \quad \frac{1}{2} \quad (3) \quad -\frac{1}{2} \quad (4)$$

۷۲- $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2 - \cos 2x) / (x^2 - |x|)$ برابر است با:

$$2 \cos 2 \quad (1) \quad 2 \sin 2 \quad (2) \quad \cos 2 \quad (3) \quad -2 \sin 2 \quad (4)$$

۷۳- حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \cot \frac{a}{x}$ وقتی $x \rightarrow +\infty$ برابر است با:

- (۱) a (۲) $\frac{1}{a}$ (۳) $\frac{a}{1}$ (۴) $\frac{1}{a}$

۷۴- تابع $f(x) = \frac{\sin 1/x}{1/x}$ در نقطه‌ای به طول صفر:

- (۱) دارای حد برابر صفر است. (۲) دارای حد برابر یک است. (۳) دارای حد نیست. (۴) به سمت ∞ میل می‌کند.

۷۵- حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} (\arctan x - \arcsin x)/x(1 - \cos)$ برابر است با:

- (۱) 1 (۲) -1 (۳) 3 (۴) -3

۷۶- حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+2}{x-1} \right)^{2x}$ برابر است با:

- (۱) e^2 (۲) $e^{-1/2}$ (۳) e^{-2} (۴) $e^{1/2}$

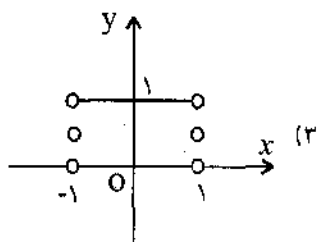
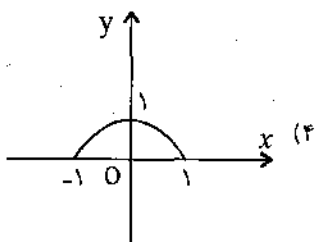
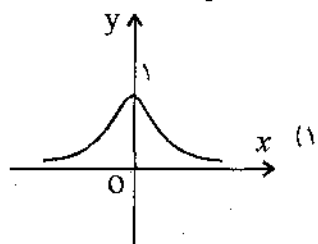
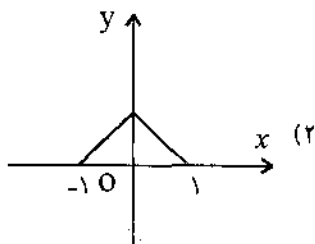
۷۷- $\lim_{x \rightarrow 0} x \log x$ برابر است با:

- (۱) 1 (۲) 0 (۳) $-\infty$ (۴) وجود ندارد

۷۸- اگر $y = x/(x - \sin x) - 6/x^2$ آنگاه $\lim_{x \rightarrow 0} y$ برابر است با:

- (۱) $0/1$ (۲) $0/3$ (۳) $0/5$ (۴) $0/6$

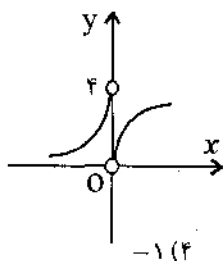
۷۹- فرض کنید تابع f از $\mathbb{R}$ در $\mathbb{R}$ به صورت $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1/(1 + x^{2n})$ تعریف می‌شود، نمودار f کدام است؟



۸۰- نمودار تابع f شکل مقابل است $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ کدام است؟

- (۱) -4 (۲) 4

- (۳) 0 (۴) وجود ندارد



۸۱- در صورتی که $f(x+2) = (x+1)/(x-1)$ باشد، $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ برابر است با:

- (۱) 0 (۲) 1 (۳) ∞ (۴) ∞

۸۲- حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x + e^{-x}) / (e^x - e^{-x})$ برابر است با:

- ۰ (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) $+\infty$ (۴)

۸۳- حاصل $\lim_{x \rightarrow 1^-} \sin 2x / \sqrt{1 - \cos 2x}$ برابر است با:

- $\sqrt{2}$ (۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۲) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۳) $-\sqrt{2}$ (۴)

۸۴- حاصل $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sin x / (\sqrt{1 + \tan x} - \sqrt{1 - \tan x})$ برابر است با:

- $\frac{1}{2}$ (۱) ۱ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) -۱ (۴)

۸۵- حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - 2x^2 - x}{2x^2 + x^2} \right)^{(x^2 - x)/(x + x^2)}$ برابر است با:

- $\frac{1}{2}$ (۱) ۰ (۲) ۲ (۳) $+\infty$ (۴)

۸۶- حاصل $\lim_{x \rightarrow \pi/4} (\tan x - 1) / (4x - \pi)$ برابر است با:

- $\frac{1}{4}$ (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴)

۸۷- اگر حد $(x^2 + 2ax^2 - x - 2a) / (ax^2 + x(1-a) - 1)$ وقتی $x \rightarrow 1$ برابر ۱ باشد، a کدام است؟

- ۳ (۱) $-\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) ۳ (۴)

۸۸- برای این که تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 1/2 \\ ax^2 & x \geq 1/2 \end{cases}$ در $x = 1/2$ پیوسته باشد، a باید برابر:

- ۲ (۱) ۱ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) -۲ (۴)

۸۹- تابع $f(x) = \begin{cases} [x] & x < -2 \\ 2mx + 5 & x \geq -2 \end{cases}$ ، به ازای کدام مقدار m همواره پیوسته است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) -۳ (۳) -۱ (۴)

۹۰- تابع $f(x) = \begin{cases} e^x + e^{-x} & x \geq 0 \\ 2a - x & x < 0 \end{cases}$ به ازای کدام مقدار a در نقطه $x = 0$ پیوسته است؟

- ۲ (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) -۲ (۴)

۹۱- به ازای کدام مقدار a تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} (\ln x) / (1 - x^2) & x \neq 1 \\ a & x = 1 \end{cases}$ بر روی دامنه اش پیوسته است؟

- ۲ (۱) $-\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) ۲ (۴)

۹۲- اگر تابع $f(x) = \begin{cases} [x] + a & x > 2 \\ 2x = 2 \\ [x] + bx & x < 2 \end{cases}$ وقتی $x = 2$ پیوستگی راست داشته باشد و حد چپ آن برابر ۳ باشد،

$a + b$ کدام است؟

- ۵ (۱) ۳ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴)

۹۳- m را به قسمی بیابید که تابع $f(x) = \begin{cases} \sin(x-1)/(\sqrt{x}-1) & x \neq 1 \\ m & x = 1 \end{cases}$ در نقطه $x=1$ پیوسته شود.

۱ (۱) ۲ (۲) -۱ (۳) -۲ (۴)

۹۴- تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x < 1 \\ 2x & x > 1 \end{cases}$ در $x=1$ چه مقدار تعریف شود تا در این نقطه پیوستگی راست داشته باشد؟

۰ (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۲ (۴)

۹۵- اگر تابع $f(x) = \begin{cases} (x^2 - 4)/(x^2 - 8) & x \neq 2 \\ (2a - 1)/(2a + 1) & x = 2 \end{cases}$ در نقطه‌ای به طول $x=2$ پیوسته باشد، a کدام است؟

۱ (۱) -۱ (۲) ۰ (۳) ۲ (۴)

۹۶- تابع $f(x) = \begin{cases} \sin x + \cos x & x \geq \pi/2 \\ 2 \sin^2 x - 1 & x < \pi/2 \end{cases}$ در نقطه $x = \pi/2$

(۱) پیوسته است. (۲) فقط پیوستگی راست دارد. (۳) فقط پیوستگی چپ دارد. (۴) پیوسته نیست.

۹۷- تابع $f(x) = \begin{cases} x^2/a & 0 \leq x < a \\ a & x = a \\ (2a - a^2)/x^2 & x > a \end{cases}$ بر روی $\mathbb{R}^+$

(۱) ناپیوسته است. (۲) فقط پیوستگی راست دارد. (۳) فقط پیوستگی چپ دارد. (۴) پیوسته است.

۹۸- تابع $f(x) = \begin{cases} (x^2 + 2x - 3)/(x^2 - 1) & x \neq \pm 1 \\ 2 & x = 1 \end{cases}$ در کدام یک از نقاط زیر پیوسته است؟

۱ (۱) ۲ (۲) -۱ (۳) ۴ موارد ۱ و ۲ و ۳ صحیح‌اند.

۹۹- مقدار تابع f در نقطه صفر کدام یک از مقادیر باشد تا تابع $f(x) = \frac{\arctan x}{x}$ در نقطه صفر پیوسته باشد؟

۰ (۱) ۱ (۲) ۳ (۳) ۴ هیچ کدام

۱۰۰- تابع $f(x) = (x-2)/(x^2-1)$ در کدام یک از فواصل زیر پیوسته است؟

(۱) $(0, 1]$ (۲) $[-1, 1]$ (۳) $[-2, 0]$ (۴) $[-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$

۱۰۱- تابع $f(x) = (e^x + 4x)/(3e^x - 3)$ در کدام نقطه ناپیوسته است؟

۰ (۱) ۱ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) -۱ (۴)

۱۰۲- کدام یک از عبارت‌های زیر در مورد تابع $f(x) = \begin{cases} \sin(\pi x) & 0 < x < 1 \\ \ln x & 1 < x < 2 \end{cases}$ صحیح است؟

(۱) در $x=1$ معین است. (۲) در $x=1$ پیوسته است.

(۳) در $x=1$ پیوسته نیست. (۴) در $x=1$ حد چپ و حد راست مساوی نیستند.

۱۰۳- تابع $f(x) = x - 1 + \sqrt{x^2 - x}$ در کدام فاصله ناپیوسته است؟

(۱) $\{x | x > 1\}$ یا $0 < x < 1$ (۲) $\{x | x > 1\}$ (۳) $\{x | x \in \mathbb{R}\}$ (۴) $\{x | x < -1\}$ یا $0 < x < 1$

۱۰۴- طول نقطه گسستگی تابع $f(x) = \frac{x}{\sin x + 5/2}$ کدام است؟

- (۱) $-2/5$ (۲) $2/5$ (۳) 0 (۴) فاقد گسستگی است.

۱۰۵- کدام یک از توابع زیر در نقطه $x = 1$ گسسته است؟

- (۱) $f(x) = \frac{x+1}{\ln x}$ (۲) $f(x) = \frac{x}{x+1}$ (۳) $f(x) = \frac{x+1}{\ln x - 1}$ (۴) موارد ۱ و ۳

۱۰۶- تابع $f(x) = \text{Arc tan}(1/x)$ در کدام نقطه گسسته است؟

- (۱) $x = 0$ (۲) $x = -1$ (۳) $x = 1$ (۴) $x = 2$

۱۰۷- توابع $f(x) = x^2 - 1$ و $g(x) = \sin x$ مفروض است، تابع $f \circ g$ در کدام یک از نقاط زیر پیوسته نیست؟

- (۱) 0 (۲) π (۳) -1 (۴) هیچ کدام

۱۰۸- طول نقطه انفصال تابع $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ کدام است؟

- (۱) $x = 0$ (۲) $x = 1$ (۳) $x = -1$ (۴) هیچ کدام

۱۰۹- طول نقطه ناپیوستگی تابع $f(x) = \begin{cases} x-1 & x \leq 0 \\ -1 & 0 < x \leq 1 \\ x^2-1 & x > 1 \end{cases}$ کدام است؟

- (۱) $x = 0$ (۲) $x = 1$ (۳) $x = -1$ (۴) همواره پیوسته است

۱۱۰- تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 - \sqrt{(x-1)^2}/(x-1) & x \neq 1 \\ 2 & x = 1 \end{cases}$ در نقطه $x = 1$:

- (۱) پیوسته است. (۲) فقط پیوستگی راست دارد. (۳) فقط پیوستگی چپ دارد. (۴) ناپیوسته است.

۱۱۱- فرض کنیم $f(x) = \sqrt{x-1}$, $(x \geq 1)$ در این صورت تابع $f(\tan x)$ در کدام فاصله پیوسته است؟

- (۱) $\left[\frac{\pi}{4}, \pi\right)$ (۲) $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ (۳) $\left[0, \frac{\pi}{4}\right)$ (۴) $\left[0, \frac{\pi}{4}\right)$

۱۱۲- تابع $y = 4[x] + 3[-x]$ در نقطه $x = n \in \mathbb{Z}$ دارای:

- (۱) انفصال است (۲) پیوستگی راست است (۳) پیوستگی چپ است (۴) هیچ کدام

۱۱۳- تابع $f(x) = \sqrt{-x^2} + 4x - 3$ در کدام فاصله پیوسته است؟

- (۱) $[1, 3]$ (۲) $[3, +\infty)$ (۳) $(-\infty, 1]$ (۴) هیچ کدام

۱۱۴- مجموعه نقاط پیوستگی تابع $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ کدام است؟

- (۱) $(-\infty, +\infty)$ (۲) $(-\infty, 0)$ (۳) $[-1, 0) \cup (0, 1]$ (۴) $[-1, 1]$

۱۱۵- مجموعه نقاط پیوستگی تابع $f(x) = \{2/x\}$ کدام است؟

- (۱) $\mathbb{R}$ (۲) $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$ (۳) $\mathbb{R} - \{0\}$ (۴) $\mathbb{R} - \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

۱۱۶- نقاط گسستگی تابع $f(x) = (-1)^{[x]}$ کدام است؟

- (۱) $\mathbb{Z}$ (۲) $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$ (۳) $\mathbb{R}$ (۴) $\mathbb{Z} - \{1\}$

۱۱۷- نقاط انفصال تابع $f(x) = x - \{x\}$ کدام است؟

- (۱) $\mathbb{R}$ (۲) $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$ (۳) $\mathbb{R} - \{0\}$ (۴) $\mathbb{Z}$

۱۱۸- تابع $f(x) = \operatorname{sgn}[|x|]$:

- (۱) در $x = 1$ پیوسته است.
 (۲) در $x = 1$ ناپیوسته است.
 (۳) در $x = -1$ ناپیوسته است.
 (۴) موارد ۲ و ۳ صحیح اند.

۱۱۹- تابع با ضابطه $f(x) = |x+1| + \sqrt{x}$ در نقطه‌ای به طول $x = 0$:

- (۱) پیوسته است.
 (۲) فقط پیوستگی راست دارد.
 (۳) ناپیوسته است.
 (۴) فقط پیوستگی چپ دارد.

۱۲۰- تابع $f(x) = \begin{cases} x+1 & x \leq -2 \\ 2-x & -2 < x \leq 2 \\ 2x-1 & x > 2 \end{cases}$ در نقاط $x = 2$ و $x = -2$ به ترتیب:

- (۱) پیوستگی چپ و پیوستگی راست دارد.
 (۲) پیوستگی چپ و پیوستگی چپ دارد.
 (۳) پیوستگی راست و پیوستگی چپ دارد.
 (۴) پیوستگی راست و پیوستگی راست دارد.

۱۲۱- اگر تابع $g(x)$ همواره پیوسته باشد، تابع $f(x) = \sqrt{g^2(x) + g(x)}$ در کدام فاصله ناپیوسته است؟

- (۱) $\{x | g(x) > 1\}$ (۲) $\{x | g(x) > 0\}$ (۳) $\{x | -1 < g(x) < 0\}$ (۴) $\{x | g(x) < -1\}$

۱۲۲- طول نقطه گسستگی تابع $f(x) = \ln(x^2 - 1)^2$ کدام است؟

- (۱) $x = 0$ (۲) $x = 1$ (۳) $x = -1$ (۴) هیچ کدام

۱۲۳- تابع $f(x) = 1/(1 + e^{1/x})$ در کدام نقطه گسسته است؟

- (۱) $x = -1$ (۲) $x = 1$ (۳) $x = 0$ (۴) هیچ کدام

۱۲۴- طول نقطه گسستگی تابع $f(x) = (x-1)/(e^{1/x} - 16)$ برابر است با:

- (۱) $x = \ln 4$ (۲) $x = 4$ (۳) $x = \ln 16$ (۴) $x = e^{\ln 2}$

۱۲۵- تابع $f(x) = x^{-1}$ داده شده است، کدام یک از موارد زیر صحیح است؟

- (۱) در پیوستگی تابع $f(x)$ نمی‌توان اظهار نظر کرد.
 (۲) تابع $f(x)$ در نقطه $x = 0$ پیوسته است.
 (۳) تابع $f(x)$ در تمام نقاط دامنه‌اش پیوسته است.
 (۴) هیچ کدام

۱۲۶- تابع $f(x) = \sin x$ و $g(x) = \begin{cases} x - \pi & x \leq 0 \\ x + \pi & x > 0 \end{cases}$ کدام یک از احکام زیر صحیح است؟

- (۱) $f(g(x))$ در نقطه $x = 0$ پیوسته است.
 (۲) $g(x)$ در نقطه $x = 0$ ناپیوسته است.
 (۳) $f(g(x))$ در نقطه $x = 0$ پیوستگی راست دارد.
 (۴) هر سه گزینه فوق صحیح است.

۱۲۷- به ازای $x \neq 2$ ، تابع $f(x)$ مساوی است با $(x^2 + 3x - 10)/(x - 2)$ ، چه مقداری باید به $f(2)$ نسبت داد تا $f(x)$ در $x = 2$ پیوسته باشد؟

- (۱) ۷ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۶

۱۲۸- کدام یک از گزاره‌های زیر همواره درست است؟

- (۱) اگر تابع f در x_0 پیوسته باشد، آنگاه تابع $\sqrt{f}$ در x_0 پیوسته است.
 (۲) اگر تابع f در x_0 و تابع g در x_0 پیوسته باشد، آنگاه تابع f/g در x_0 پیوسته است.
 (۳) اگر تابع f در x_0 و تابع g در x_0 پیوسته باشد، آنگاه تابع $g \circ f$ در x_0 پیوسته است.
 (۴) اگر تابع f در x_0 و تابع g در x_0 پیوسته باشد، آنگاه تابع $g \circ f$ در x_0 پیوسته است.

۱۲۹- تابع f به معادله $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & x \geq 1 \\ 1 & x < 1 \end{cases}$ و تابع g به معادله $g(x) = \begin{cases} 4x-1 & x \geq 0 \\ 5 & x < 0 \end{cases}$ در $x_0 = 1$ ناپوسته‌اند. آن‌گاه تابع $f+g$ در $x_0 = 1$:

(۱) ناپوسته است. (۲) پیوسته است. (۳) فقط پیوستگی چپ دارد. (۴) فقط پیوستگی راست دارد.

۱۳۰- تابع g در معادله $g(x) = \tan x$ در $x_0 = \pi/3$ پیوسته است و تابع f به معادله $f(x) = [x]$ در $\tan \pi/3$ پیوسته است. بنابراین تابع $f \circ g$ در $x_0 = \pi/3$:

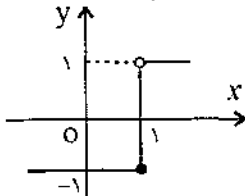
(۱) پیوسته است. (۲) ناپوسته است. (۳) نمی‌توان اظهار نظر کرد. (۴) فقط پیوستگی راست دارد.

۱۳۱- تابع f به معادله $f(x) = \begin{cases} 3x^3 - 4x^2 - 7x & x \notin Z \\ 0 & x \in Z \end{cases}$ در چند نقطه به طول‌های عدد صحیح پیوسته است؟

(۱) یک نقطه (۲) دو نقطه (۳) سه نقطه (۴) چهار نقطه

۱۳۲- تابع f به معادله $f(x) = (a^x - 3a)[x] + 2x + 2[x]$ بازاری چه مقادیر a همواره پیوسته است؟

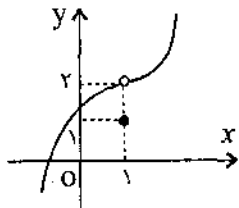
(۱) $\{0, 2\}$ (۲) $\{0, 2\}$ (۳) $\{1, 2\}$ (۴) $\{0, 1\}$



۱۳۳- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. تابع f در نقطه $x_0 = 1$:

(۱) پیوسته است. (۲) پیوستگی راست دارد.

(۳) پیوستگی چپ دارد. (۴) هیچ‌کدام



۱۳۴- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. تابع f در نقطه $x_0 = 1$:

(۱) پیوسته است. (۲) پیوسته نیست.

(۳) فقط پیوستگی چپ دارد. (۴) فقط پیوستگی راست دارد.

۱۳۵- تابع f به معادله $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$ در نقطه $x_0 = 0$:

(۱) پیوسته نیست ولی حد دارد. (۲) پیوسته است ولی حد ندارد.

(۳) هم پیوسته است و هم حد دارد. (۴) نه پیوسته است و نه حد دارد.

۱۳۶- مجانب قائم تابع $y = \sqrt{x^2 - 4x + 3}/(x - 2)$ کدام است؟

(۱) $x = 2$ (۲) $x = -2$ (۳) $x = 1$ (۴) هیچ‌کدام

۱۳۷- منحنی $f(x) = e^{1/x}$ دارای چند مجانب است؟

(۱) هیچ (۲) یک (۳) دو (۴) سه

۱۳۸- مجانب‌های $y = 1/(x^0 + 32)$ کدامند؟

(۱) $y = 0, x = 2$ (۲) $y = 1, x = -2$ (۳) $y = 0, x = 0$ (۴) $y = 0, x = -2$

۱۳۹- تابع $y = (\cos x + 1)/\cos x$ با شرط $0 \leq x \leq 2\pi$ دارای چند مجانب قائم است؟

(۱) یک (۲) دو (۳) سه (۴) چهار

۱۴۰- کدام یک از منحنی‌های زیر مجانب قائم ندارد؟

$$y = \frac{\sin x}{1 - \sin x} \quad (۴) \quad y = \frac{2 \cos x}{2 + \cos x} \quad (۳) \quad y = \frac{\cos x}{2 \cos x - 1} \quad (۲) \quad y = \frac{2 \cos x - 1}{\cos x} \quad (۱)$$

۱۴۱- مجانب‌های افقی $y = x/(5 + |x|)$ کدامند؟

$$y = 1, y = 0 \quad (۴) \quad y = 1, x = -1 \quad (۳) \quad y = -1, y = 1 \quad (۲) \quad y = -1, x = 1 \quad (۱)$$

۱۴۲- ضریب زاویه یکی از مجانب‌های مایل تابع $y = x \sqrt{(x+1)/(x-1)}$ کدام است؟

$$-2 \quad (۴) \quad 2 \quad (۳) \quad -1 \quad (۲) \quad 1 \quad (۱)$$

۱۴۳- معادله مجانب مایل $y = (x^2 + 2x - 1)/x$ کدام است؟

$$y + x + 2 = 0 \quad (۴) \quad y + x - 2 = 0 \quad (۳) \quad y - x - 2 = 0 \quad (۲) \quad y - x + 2 = 0 \quad (۱)$$

۱۴۴- عرض از مبدأ معادله خط مجانب مایل منحنی تابع $y = (x^2 + 3)/(x - 1)$ کدام است؟

$$\text{صفر} \quad (۴) \quad 2 \quad (۳) \quad -1 \quad (۲) \quad 1 \quad (۱)$$

۱۴۵- مجانب افقی تابع $y = x + 4 + \sqrt{x^2 - 6x + 3}$ کدام است؟

$$y = 1 \quad (۴) \quad y = 2 \quad (۳) \quad y = 0 \quad (۲) \quad y = -1 \quad (۱)$$

۱۴۶- معادلات مجانب‌های منحنی تابع $y = x + x^2/\sqrt{x^2 - 1}$ کدام است؟

$$y = 2x, y = 1, x = 1 \quad (۲) \quad y = 2x, y = 0, x = \pm 1 \quad (۱)$$

$$y = x, y = 0, x = -1 \quad (۴) \quad y = 2, x = \pm 1 \quad (۳)$$

۱۴۷- نمودار تابع با ضابطه $y = 3 + (x - 1)/(x^2 - 2x + 4)$ چند مجانب دارد؟

$$\text{هیچ} \quad (۱) \quad \text{یک} \quad (۲) \quad \text{دو} \quad (۳) \quad \text{سه} \quad (۴)$$

۱۴۸- مجانب مایل تابع با ضابطه $y = (x^2 + x)/\sqrt{x^2 + 1}$ کدام است؟

$$\text{هیچ کدام} \quad (۴) \quad \text{موازی ۱ و ۲} \quad (۳) \quad y = -x - 1 \quad (۲) \quad y = x + 1 \quad (۱)$$

۱۴۹- منحنی $y = \text{Arc cos}(1 - x^2)/(1 + x^2)$ چند مجانب دارد؟

$$\text{یک} \quad (۱) \quad \text{دو} \quad (۲) \quad \text{سه} \quad (۳) \quad \text{چهار} \quad (۴)$$

۱۵۰- در تابع $y = (x+a)/(bx+2)$ مقادیر a و b را طوری بیابید که خط $y = 1$ مجانب آن بوده و از نقطه $M(3, 2)$ بگذرد.

$$b = -1, a = -5 \quad (۴) \quad b = -1, a = 7 \quad (۳) \quad b = 1, a = 13 \quad (۲) \quad b = 1, a = 7 \quad (۱)$$

۱۵۱- معادله مجانب‌های منحنی نمایش تغییرات تابع $y = x^3/(x^2 + x - 2)$ کدام است؟

$$y = x - 1, x = -2, x = 1 \quad (۲) \quad y = x - 1, x = 2, x = 1 \quad (۱)$$

$$y = 0, x = -2, x = 1 \quad (۴) \quad y = 2, x = 1 \quad (۳) \quad \text{مجانب افقی ندارد}$$

۱۵۲- منحنی نمایش تابع $y = |x|/(x - 1)$ دارای:

(۱) یک مجانب افقی و یک مجانب مایل است.

(۲) یک مجانب قائم و یک مجانب مایل است.

۱۵۳- کدام یک از منحنی‌های زیر مجانب افقی دارد؟

$$y = x^2 - \sqrt{x} \quad (۴) \quad y = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x-1} \quad (۳) \quad y = x + \frac{2x}{x-1} \quad (۲) \quad y = \sqrt{2x^2 - 1} \quad (۱)$$

۱۵۴- تابع $f(x) = 1/(x-2)(x-3)\dots(x-n)$ دارای چند مجانب است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۱۵۵- اگر خط $x = 1/2$ مجانب منحنی $y = (x-2)/(ax-3)$ باشد، a کدام است؟

- ۳ (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴)

تست‌های آزمون کارشناسی ارشد

«حد و پیوستگی»

• تست‌های شماره ۱ الی ۲۱ آزمون‌های کارشناسی ارشد مجموعه علوم اقتصادی

• تست‌های شماره ۲۲ الی ۴۳ آزمون‌های کارشناسی ارشد مجموعه مدیریت

• تست‌های شماره ۴۴ الی ۶۷ آزمون‌های کارشناسی ارشد حسابداری

۱- حد تابع $f(x) = \begin{cases} 1-2x & x \geq 0 \\ x^2-1 & x < 0 \end{cases}$ در صفر کدام است؟

- صفر (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) حد ندارد

۲- کدام یک از توابع زیر در نقطه $x = 1$ گسسته است؟

- $\frac{x}{x+1}$ (۱) $\frac{x+1}{\ln x - 1}$ (۲) $\frac{x+1}{\ln x}$ (۳) $\frac{1}{1+e^{1/x}}$ (۴)

۳- مقدار $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{1/x^2}$ برابر است با:

- e^{-1} (۱) e (۲) e^2 (۳) $e^{-1/2}$ (۴)

۴- حد تابع $y = (1 + 2/x)^{1+x}$ هنگامی که x به سمت بی‌نهایت میل می‌کند برابر است با:

- $e^2 - 1$ (۱) e^2 (۲) e (۳) $e + 1$ (۴)

۵- حاصل حد مقابل، کدام یک از چهار عدد داده شده است؟
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot \sin x}{\sqrt{x^2 + 1} - 1}$

- ۲ (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۱ (۴)

۶- حد راست تابع مقابل در نقطه $x = 1$ کدام است؟
 $f(x) = 2 - (x^{1/x} - 1)$

- ۱ (۱) ۰ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴)

۷- طول نقطه گسستگی تابع مقابل کدام است؟
 $f(x) = \begin{cases} x-1 & x \leq 0 \\ -1 & 0 < x \leq 1 \\ x^2-1 & x > 1 \end{cases}$

- $x = 1$ (۱) $x = 0$ (۲) $x = 2$ (۳) $x = 0$ (۴)

۸- حد تابع $y = \frac{(n+2)! + (n+1)!}{(n+2)! - (n+1)!}$ هنگامی که n به سمت ∞ میل می‌کند، کدام است؟

- ۲ (۱) ۱ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) -۱ (۴)

۹- حد عبارت $([x]^2 - [x^2])/(x^2 - 1)$ هنگامی که x به سمت عدد یک میل کند، کدام است؟

- صفر (۳) ۱ (۲) ۲ (۴)

۱۰- تابع $f(x) = \begin{cases} (\sin x)/x & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$ مفروض است، کدام یک از عبارت‌های زیر صحیح است؟

- ۱) f در $x = 0$ ناپیوسته است. ۲) f در $x = 0$ پیوسته است.

- ۳) فقط از سمت چپ پیوسته است. ۴) فقط از سمت راست پیوسته است.

۱۱- حد تابع $y = (\sqrt{x+5} - 3)/(\sqrt{x} - 2)$ هنگامی که x به سمت عدد ۴ میل کند، مساوی خواهد بود با:

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) ۳ ۳) $\frac{7}{3}$ ۴) $\frac{4}{3}$

۱۲- حاصل حد $\lim_{n \rightarrow \infty} (3^{n+2} - 3^n - 5)/(3^{n+1} + 3^n - 1)$ برابر است با:

۱) $\frac{7}{3}$ ۲) $\frac{4}{3}$ ۳) ۲ ۴) ۲

۱۳- به ازای کدام مقدار a تابع $f(x) = \begin{cases} xe^x & x \leq 1 \\ e^{ax} & x > 1 \end{cases}$ در نقطه $x = 1$ پیوسته است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) $\frac{1}{3}$

۱۴- به ازای چه مقدار از a و b تابع $f(x)$ در $x = 4$ پیوسته است؟
 $f(x) = \begin{cases} a[x-2] + b & x < 4 \\ \left[\frac{x}{2}\right] + b & x = 4 \\ \frac{x^2 - 16}{x - 4} & x > 4 \end{cases}$

۱) $a = -1, b = 6$ ۲) $a = \frac{1}{2}, b = 7$ ۳) $a = 2, b = 6$ ۴) $a = 1, b = 7$

۱۵- حد عبارت $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi/6 + h) - \sin(\pi/6)}{h}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۴) ۱

۱۶- طول نقطه گسستگی تابع f با ضابطه $y = x/(e^x - 2)$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) $\ln 2$

۱۷- حد راست تابع f با ضابطه $f(x) = (x - [x])/(x - 1)$ در $x = 1$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۰ ۴) $+\infty$

۱۸- حد عبارت $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - \sqrt{x})/\ln(2 - x)$ چقدر است؟

۱) $-\frac{5}{3}$ ۲) $-\frac{4}{3}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{5}{3}$

۱۹- مقدار $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} C_n^r}{1 + 2 + \dots + n}$ برابر کدام است؟ $(C_n^r = \binom{n}{r})$

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ∞

۲۰- اگر $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1/an)^n = e^3$ باشد، مقدار a کدام است؟

۱) e ۲) $\frac{1}{e}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) ۳

۲۱- اگر $f(x) = [x/2] + x$ ، در فاصله $0 \leq x \leq 2$ و $x \in R$ باشد، تعداد نقاط گسستگی آن برابر کدام است؟ (نماد $[]$ جزء صحیح است)

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۲۲- حد تابع $y = (1 + 1/x)^{1/x}$ هنگامی که x به سمت $+\infty$ میل کند، کدام است؟

۱) ۱ ۲) e ۳) e^2 ۴) $2e$

۲۳- اگر تابع $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & x \leq 1 \\ ax^2 + x & x > 1 \end{cases}$ در $x = 1$ پیوسته باشد، مقدار a کدام است؟

۱) -۱ ۲) ۰ ۳) ۱ ۴) ۲

۲۴- اگر تابع $y = [x - 1] + 2$ مفروض و منظور از $[\dots]$ جزء صحیح باشد، حد چپ و راست این تابع در نقطه $x = -1$ کدام است؟

- (۱) $-1, 0$ (۲) $0, 1$ (۳) $2, -1$ (۴) برابر و مساوی -1

۲۵- طول نقطه گسستگی تابع $y = \ln(x^2 - 1)$ کدام است؟

(۱) -1 (۲) 0 (۳) 1 (۴) فاقد نقطه گسستگی

۲۶- تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & x \leq 1 \\ x + a & x > 1 \end{cases}$ به ازای چه مقادیر a در $x = 1$ پیوسته است؟

- (۱) 1 (۲) -2 (۳) -1 (۴) $+2$

۲۷- عبارت $\lim_{t \rightarrow \infty} (2/t + 1)^{2t}$ کدام است؟

- (۱) $2e$ (۲) e (۳) e^2 (۴) e^2

۲۸- نقطه گسستگی تابع $y = x/(e^{2x} - 1)$ کدام است؟

- (۱) 1 (۲) صفر (۳) c (۴) e^2

۲۹- مقدار $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x)/x$ کدام است؟

- (۱) -1 (۲) صفر (۳) -1 (۴) -2

۳۰- حاصل عبارت $\lim_{x \rightarrow 0^+} (3 + x)/(2 + 2^{1/x})$ (حد چپ در نقطه $x = 0$) کدام است؟

- (۱) صفر (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) 1

۳۱- حاصل عبارت $\lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x - x)/x$ (حد چپ در نقطه $x = 0$) کدام است؟

- (۱) صفر (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) 1 (۴) $-\infty$

۳۲- حاصل عبارت $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{1+x} \right)^x$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{e}$ (۲) 1 (۳) صفر (۴) e

۳۳- طول نقطه گسستگی تابع f به معادله $y = \frac{x}{\sin x + 3/2}$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{3}{2}$ (۲) صفر (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) فاقد گسستگی است

۳۴- حد عبارت $(x^2 - 1) \cdot \sin x / 2x(x + 2)$ هنگامی که x به سمت صفر میل کند، کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{2}$ (۲) $-\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{1}{2}$

۳۵- حد راست تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + x & x \leq 1 \\ 3x + 1 & x > 1 \end{cases}$ در نقطه $x = 1$ کدام است؟

- (۱) 4 (۲) 2 (۳) 1 (۴) فاقد حد راست

۳۶- حد عبارت $\lim_{x \rightarrow 0} (10^x - e^{2x})/x$ کدام است؟

- (۱) $10 - 2e$ (۲) $10 - 2e^2$ (۳) $\ln 10 - 2$ (۴) صفر

۳۷- حد راست تابع $f(x) = (2x - 1)/(4^{1/x} + 2)$ در نقطه $x = 0$ کدام است؟

- (۱) 2 (۲) صفر (۳) 1 (۴) $\frac{1}{2}$

۳۸- حد عبارت $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x}$ کدام است؟

- ۱ (۱) $\sqrt{e}$ (۲) e^2 (۳) ۴ (۴) ∞

۳۹- حد عبارت $\lim_{h \rightarrow 0} (x+h)^2 - x^2/h$ کدام است؟

- صفر (۱) ۴ (۲) $4x^2$ (۳) ۴ (۴) $4x$

۴۰- با فرض $x > 0$ طول نقطه گسستگی تابع با ضابطه $y = x/(\ln|x| - 1)$ کدام است؟

- ۱ (۱) -۱ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) e

۴۱- حد چپ تابع با ضابطه $f(x) = (x - [x])/(x + 1)$ در $x = 1$ کدام است؟

- ۱ (۱) $-\frac{1}{2}$ (۲) ۰ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) ۱

۴۲- مقدار $\lim_{n \rightarrow \infty} n!/(2n)^n/(n+1)!(n+2)$ برابر کدام است؟

- ۰ (۱) ۱ (۲) ۴ (۳) ۴ (۴) ∞

۴۳- تعداد نقاط گسستگی تابع f با ضابطه $f(x) = [x] + x^2$ در فاصله $0 \leq x < 5$ ، $x \in R$ کدام است؟

- صفر (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۲ (۴) ۴

۴۴- حد عبارت $\left(\frac{x-1}{x}\right)^{2x}$ وقتی $x \rightarrow \infty$ کدام است؟

- e^{-2} (۱) ۱ (۲) بی‌نهایت (۳) e^2 (۴) e^2

۴۵- حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} (2x^2 - 3x + 1)/(x^2 + x - 2)$ کدام است؟

- ۱ (۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{2}{5}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{1}{3}$

۴۶- طول نقطه انفصال تابع $y = (x-5)/(e^{2x} - 16)$ کدام است؟

- صفر (۱) $\ln 8$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\ln 4$ (۴) $\ln 4$

۴۷- در ازای کدام مقدار a تابع $f(x) = \begin{cases} e^x + e^{-x} & x \geq 0 \\ 2a - x & x < 0 \end{cases}$ در نقطه $x = 0$ پیوسته است؟

- ۱ (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) ۰ (۳) ۱ (۴) ۲

۴۸- حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^+} (2+x)/(3+3^{1/x})$ (حد راست) کدام است؟

- ۱ (۱) ۰ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{1}{2}$

۴۹- حد عبارت $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + 2/3x)^x$ کدام است؟

- ۱ (۱) e^2 (۲) $\sqrt{e^2}$ (۳) $\sqrt{e^2}$ (۴) $\sqrt{e^2}$

۵۰- طول نقطه گسستگی تابع $y = \ln(x^2 + 1)$ کدام است؟

- ۱ (۱) $x = 0$ (۲) $x \leq 0$ (۳) $x < 1$ (۴) تابعی همواره پیوسته است.

۵۱- حد عبارت $\lim_{n \rightarrow \infty} n!/(1+2+3+\dots+n)$ کدام است؟

- + ∞ (۱) ۰ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۲

۵۲- مجموعه نقطه گسستگی تابع $y = x/(e^x + 2)$ کدام است؟

- ۱ (۱) $\{-1\}$ (۲) $\{0\}$ (۳) $\{1\}$ (۴) ϕ

۵۳- به ازای کدام مقدار a تابع $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & x < 1 \\ ax^2+a & x \geq 1 \end{cases}$ در $x=1$ دارای حد است؟

- ۱) $\frac{2}{3}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) ۲

۵۴- حد عبارت $\lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}) / 2x$ کدام است؟

- ۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ۱

۵۵- حد $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - 2/2x)^x$ کدام است؟

- ۱) $e^{-2/2}$ ۲) $e^{-2/2}$ ۳) $e^{2/2}$ ۴) ۱

۵۶- حد چپ تابع $f(x) = \frac{x+2}{x^{-1/x}+1}$ در نقطه $x=0$ کدام است؟

- ۱) ۲ ۲) ۱ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) صفر

۵۷- حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} (2x-4) / (\sqrt{x^2+12}-4)$ کدام است؟

- ۱) ۲ ۲) ۱ ۳) ۰ ۴) ۴

۵۸- به ازای کدام مقدار a تابع $f(x) = \begin{cases} ax^2+1 & x \leq 1 \\ 2ax+2 & x > 1 \end{cases}$ در $x=1$ پیوسته است؟

- ۱) -۲ ۲) -۳ ۳) ۲ ۴) ۱

۵۹- نقطه گسستگی تابع $y = (x-1) / (\ln x - 2)$ کدام است؟

- ۱) ۱ ۲) ۲ ۳) e ۴) e^2

۶۰- حد عبارت $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 - 2/x)^{2x}$ کدام است؟

- ۱) ۱ ۲) e ۳) e^{-2} ۴) e^{-2}

۶۱- حد عبارت $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^5 - x^5}{h}$ کدام است؟

- ۱) $5x^4$ ۲) ۵ ۳) ۱ ۴) ۰

۶۲- طول نقطه گسستگی تابع f با ضابطه $y = x^2 / (e^x - 3)$ کدام است؟

- ۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) $\ln 3$

۶۳- حد راست تابع f با ضابطه $f(x) = (x - [x]) / (x - 3)$ در نقطه $x=3$ کدام است؟

- ۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) $+\infty$

۶۴- حد عبارت $\lim_{x \rightarrow -1} \ln(x+2) / (x + \sqrt{x})$ کدام است؟

- ۱) $\frac{3}{4}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) ۲

۶۵- مقدار حد $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 2 + 3 + \dots + n) / C_n^r$ کدام است؟ $(C_n^r = \binom{n}{r})$

- ۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ∞

۶۶- اگر $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + a/n)^{2n} = e^{2/2}$ باشد، مقدار a کدام است؟

- ۱) $\frac{3}{4}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) ۲ ۴) ۳

۶۷- طول نقطه گسستگی تابع f به ضابطه $f(x) = [3x] + x^2$ با شرط $0 \leq x < 1$ کدام است؟ (نماد $[]$ جزء صحیح است.)

- ۱) ۱ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) ۰

مشتق

۱-۵ آهنگ تغییرات نسبی و آهنگ تغییرات آنی

در تابع $y = f(x)$ اگر x_0 متعلق به دامنه تابع باشد، هنگامی که متغیر از x_0 به x تغییر می‌کند $\Delta x = x - x_0$ را «نمو» متغیر» نامیده و $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ را «نمو تابع» می‌نامند، در این حالت نسبت $\Delta y / \Delta x$ را «آهنگ تغییرات نسبی» یا «نرخ متوسط تغییرات تابع» می‌خوانند، یعنی (مسأله ۱):

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

حد $\Delta y / \Delta x$ را وقتی Δx به سمت صفر میل می‌کند «آهنگ تغییرات آنی» در نقطه x_0 نامیده می‌شود، یعنی:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

۲-۵ تعریف مشتق

تابع $y = f(x)$ و نقطه x_0 از دامنه این تابع را در نظر می‌گیریم، اگر:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

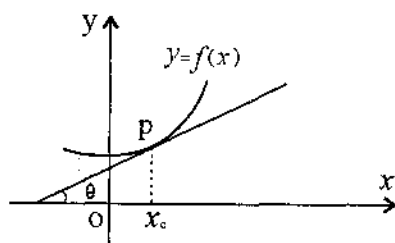
موجود باشد آن را مشتق تابع $y = f(x)$ در نقطه x_0 می‌نامند و با y' ، $f'(x_0)$ ، dy/dx ، $D_x y$ نشان می‌دهند. با توجه به برابری $x = x_0 + \Delta x$ ، مشتق تابع f در نقطه x_0 را به صورت زیر تعریف می‌کنند:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

۳-۵ تعبیر هندسی مشتق

در شکل زیر نمودار هندسی تابع $y = f(x)$ را ملاحظه می‌کنید. ضریب زاویه خط مماس در هر نقطه بر منحنی، مثلاً P ، برابر است با مشتق آن تابع به ازای طول همان نقطه تماس یعنی:

$$m = \tan \theta = f'(x_0)$$



۴-۵ مشتق پذیری تابع در یک نقطه

۱) تابع $y = f(x)$ با دامنه تعریف $[a, b]$ مفروض است، $x_0 \in (a, b)$ می گیریم، عدد Δx را چنان انتخاب می کنیم که $x_0 + \Delta x \in (a, b)$ اگر

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad \text{یا} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

موجود باشد آن را مشتق راست تابع $f(x)$ در نقطه x_0 می نامند و با علامت $f'(x_0^+)$ یا $f'_+(x_0)$ نشان می دهند، به طور مشابه:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad \text{یا} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

موجود باشد آن را مشتق چپ تابع $f(x)$ در نقطه x_0 می نامند و با علامت $f'(x_0^-)$ یا $f'_-(x_0)$ نشان می دهند. اگر داشته باشیم:

$$f'(x_0^+) = f'(x_0^-)$$

آن گاه تابع $f(x)$ در نقطه x_0 مشتق پذیر است و $f'(x_0^+) = f'(x_0^-) = f'(x_0)$ ولی اگر:

$$f'(x_0^+) \neq f'(x_0^-)$$

تابع $f(x)$ در نقطه x_0 مشتق پذیر نخواهد بود (مسئله ۲).

۲) تابع $y = f(x)$ در نقطه به طول x_0 وقتی مشتق پذیر است که $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ مساوی یک عدد مشخص و معین شود. در این صورت اگر حد فوق برابر عدد معلوم L شود، را مشتق تابع در نقطه به طول x_0 گوئیم و آن را با نماد $f'(x_0)$ نشان می دهیم.

۳) تابع $y = f(x)$ مفروض است اگر $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ برابر $+\infty$ یا $-\infty$ شود، در این حالت راستای خط مماس در نقطه ای به طول x_0 بر محور x عمود است و می گوئیم تابع f در نقطه ای به طول x_0 مشتق پذیر نیست.

۴) تابع $y = f(x)$ مفروض است اگر $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ برابر عدد نامعلومی شود می گوئیم تابع f در نقطه ای به طول x_0 مشتق پذیر نیست (مسئله ۳).

قضیه: اگر تابع $y = f(x)$ در نقطه x_0 مشتق پذیر باشد در x_0 پیوسته است ولی عکس این قضیه در حالت کلی برقرار نیست یعنی از پیوستگی تابع x_0 نمی توان مشتق پذیری f در x_0 را نتیجه گرفت (مسئله ۴).

۵-۵ مشتق پذیری تابع در یک فاصله

اگر تابع $y = f(x)$ در هر نقطه از فاصله (a, b) مشتق پذیر باشد می گوئیم تابع f روی فاصله (a, b) مشتق پذیر است. به بیان دیگر تابع f را روی فاصله (a, b) مشتق پذیر می گویند، هرگاه اولاً: f روی فاصله (a, b) مشتق پذیر باشد. ثانیاً: f در a از راست، $f'_+(a)$ و در b از چپ $f'_-(b)$ مشتق پذیر باشد.

۶-۵ قواعد مشتق گیری

در فرمول های زیر u و v توابعی از x می باشند و a, b, m و n اعداد ثابت هستند.

۱-۶-۵ مشتق عبارتهای جبری

$$۱) f(x) = a \Rightarrow f'(x) = 0 \quad ۶) f(x) = \frac{u}{v} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

$$۲) f(x) = ax^m \Rightarrow f'(x) = amx^{m-1} \quad ۷) f(x) = \frac{a}{v} \Rightarrow f'(x) = \frac{-av'}{v^2}$$

$$۳) f(x) = au^m \Rightarrow f'(x) = am u' u^{m-1}$$

$$۸) f(x) = \sqrt{u} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

$$۴) f(x) = u + v + \dots \Rightarrow f'(x) = u' + v' + \dots$$

$$۹) f(x) = \sqrt[n]{u^m} \Rightarrow f'(x) = \frac{mu'}{n \sqrt[n]{u^{n-m}}}$$

$$۵) f(x) = u.v \Rightarrow f'(x) = u'v + v'u$$

(مسئله ۵)

۵-۶-۲ مشتق توابع مثلثاتی

$$۱) f(x) = \sin x \Rightarrow f'(x) = \cos x$$

$$۲) f(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = -\sin x$$

$$۳) f(x) = \tan x \Rightarrow f'(x) = (1 + \tan^2 x)$$

$$۴) f(x) = \cot x \Rightarrow f'(x) = -(1 + \cot^2 x)$$

$$۵) f(x) = \sec x \Rightarrow f'(x) = \sin x \cdot \sec^2 x$$

$$۶) f(x) = \csc x \Rightarrow f'(x) = -\cos x \cdot \csc^2 x$$

$$۷) f(x) = \sin u \Rightarrow f'(x) = u' \cos u$$

$$۸) f(x) = \cos u \Rightarrow f'(x) = -u' \sin u$$

$$۹) f(x) = \tan u \Rightarrow f'(x) = u'(1 + \tan^2 u)$$

$$۱۰) f(x) = \cot u \Rightarrow f'(x) = -u'(1 + \cot^2 u)$$

$$۱۱) f(x) = \sec u \Rightarrow f'(x) = u' \sin u \cdot \sec^2 u$$

$$۱۲) f(x) = \csc u \Rightarrow f'(x) = -u' \cos u \cdot \csc^2 u$$

تذکره: تمام فرمول‌های مشتق‌گیری در توابع مثلثاتی وقتی معتبر است که قوس یا کمان x برحسب رادیان باشد. بنابراین اگر در توابعی قوس‌ها برحسب درجه یا گراد باشد، ابتدا قوس را به رادیان تبدیل می‌کنیم و سپس مشتق می‌گیریم (مسئله ۶).

۵-۶-۳ مشتق توابع معکوس مثلثاتی

$$۱) f(x) = \sin^{-1} x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$۲) f(x) = \cos^{-1} x \Rightarrow f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$۳) f(x) = \tan^{-1} x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$۴) f(x) = \cot^{-1} x \Rightarrow f'(x) = \frac{-1}{1+x^2}$$

$$۵) f(x) = \sec^{-1} x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$۶) f(x) = \csc^{-1} x \Rightarrow f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$۷) f(x) = \sin^{-1} u \Rightarrow f'(x) = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$۸) f(x) = \cos^{-1} u \Rightarrow f'(x) = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$۹) f(x) = \tan^{-1} u \Rightarrow f'(x) = \frac{u'}{1+u^2}$$

$$۱۰) f(x) = \cot^{-1} u \Rightarrow f'(x) = \frac{-u'}{1+u^2}$$

$$۱۱) f(x) = \sec^{-1} u \Rightarrow f'(x) = \frac{u'}{|u|\sqrt{u^2-1}}$$

$$۱۲) f(x) = \csc^{-1} u \Rightarrow f'(x) = \frac{-u'}{|u|\sqrt{u^2-1}}$$

۵-۶-۴ مشتق توابع لگاریتمی

$$۱) f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$۲) f(x) = \log_a^x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$$

$$۳) f(x) = \ln u \Rightarrow f'(x) = \frac{u'}{u}$$

$$۴) f(x) = \log_a^u \Rightarrow f'(x) = \frac{u'}{u \ln a}$$

(مسئله ۷)

۵-۶-۵ مشتق توابع نمایی

$$۱) f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x \quad ۳) f(x) = a^x \Rightarrow f'(x) = a^x \cdot \ln a$$

$$۲) f(x) = c^u \Rightarrow f'(x) = u' e^u \quad ۴) f(x) = a^u \Rightarrow f'(x) = u' a^u \cdot \ln a$$

۶-۶-۵ مشتق توابع قدر مطلق

$$f(x) = |u| \Rightarrow f'(x) = \frac{u \cdot u'}{|u|}$$

۷-۶-۵ مشتق تابع $f(x) = u^v$

$$f(x) = u^v \Rightarrow f'(x) = u^v \left(v' \ln u + v \frac{u'}{u} \right)$$

(مسئله ۸)

۸-۶-۵ مشتق توابع هذلولی

$$۱) f(x) = \sin hx \Rightarrow f'(x) = \cos hx$$

$$۲) f(x) = \cos hx \Rightarrow f'(x) = -\sin hx$$

$$۳) f(x) = \tan hx \Rightarrow f'(x) = 1 + \tan^2 hx$$

$$۴) f(x) = \cot hx \Rightarrow f'(x) = -1 - \cot^2 hx$$

$$۵) f(x) = \sin hu \Rightarrow f'(x) = u' \cdot \cos hu$$

$$۶) f(x) = \cos hu \Rightarrow f'(x) = -u' \cdot \sin hu$$

$$۷) f(x) = \tan hu \Rightarrow f'(x) = u' (1 + \tan^2 hu)$$

$$۸) f(x) = \cot hu \Rightarrow f'(x) = -u' (1 + \cot^2 hu)$$

۹-۶-۵ مشتق $f(u)$

$$y = f(u) \Rightarrow y' = u' \times f'(u)$$

(مسئله ۹)

۷-۵ مشتق مراتب بالاتر

اگر تابع $y = f(x)$ در ناحیه‌ای مشتق‌پذیر باشد، مشتق آن یعنی $f'(x)$ یا y' خود تابعی از x می‌باشد که می‌توان مشتق آن را به دست آورد و آن را مشتق مرتبه دوم تابع $y = f(x)$ می‌نامیم، که به صورت $f''(x)$ یا y'' یا d^2y/dx^2 نشان داده می‌شود. اگر به همین ترتیب این مشتق‌ها خود تابعی از x باشند، می‌توان عمل مشتق‌گیری را ادامه داد. اگر این عمل را n مرتبه ادامه دهیم آن را مشتق مرتبه n ام می‌نامیم و با نماد $f^{(n)}(x)$ یا $y^{(n)}$ یا $d^n y/dx^n$ نشان می‌دهیم. در برخی از توابع از مرتبه‌ای به بعد مشتق صفر می‌شود، اما در برخی دیگر تا هر مرتبه که مشتق گرفته شود، مشتق صفر نخواهد شد (مسائل ۱۰ و ۱۱).

نکات مهم:

$$y = \frac{ax+b}{cx+d}, c \neq 0 \Rightarrow y^{(n)} = \frac{(-c)^{n-1} n! (ad-bc)}{(cx+d)^{n+1}} \quad ۱-$$

$$y = u \cdot v \Rightarrow y^{(n)} = \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} u^{n-i} \cdot v^{(i)} \quad ۲-$$

$$y = \ln x \Rightarrow y^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n} \quad -۳$$

$$y = \sin ax \Rightarrow y^{(n)} = a^n \sin \left(x + \frac{n\pi}{2} \right) \quad -۴$$

$$y = \cos ax \Rightarrow y^{(n)} = a^n \cos \left(x + \frac{n\pi}{2} \right) \quad -۵$$

۸-۵ مشتق‌گیری ضمنی

با فرض اینکه معادله $f(x, y) = 0$ ، y را به صورت یک یا چند تابع مشتق‌پذیر از x تعریف کند، می‌توانیم مشتق y را نسبت به x (y'_x)، با روشی بنام مشتق‌گیری ضمنی پیدا کنیم. در این روش یک بار x را متغیر و y را عددی ثابت فرض می‌کنیم و نسبت به x مشتق می‌گیریم، این مشتق را با نماد f'_x یعنی مشتق نسبت به x نشان می‌دهیم. بار دوم y را متغیر و x را عددی ثابت فرض می‌کنیم و نسبت به y مشتق می‌گیریم، این مشتق را با نماد f'_y یعنی مشتق نسبت به y نمایش می‌دهیم. بنابراین داریم (مسئله ۱۲):

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = -\frac{f'_x}{f'_y}, \quad x'_y = \frac{dx}{dy} = -\frac{f'_y}{f'_x}$$

۹-۵ مشتق تابع مرکب (تابع تابع)

اگر y تابعی از u و u تابعی از x باشد، یعنی $y = f(u)$ و $u = g(x)$ باشد، در آن صورت:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \quad \text{یا} \quad y'_x = y'_u \cdot u'_x$$

قاعده فوق را می‌توان به بیش از دو تابع هم تعمیم داد. یعنی اگر $y = f(u)$ و $u = g(v)$ و $v = h(w)$ و $w = k(x)$ باشد، داریم (مسئله ۱۳):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dw} \cdot \frac{dw}{dx}$$

نکات مهم:

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) \quad -۱$$

برای محاسبه $f'(g(x))$ می‌بایست ابتدا $f'(x)$ را پیدا نمود و سپس در آن به جای x ، $g(x)$ را قرار دهیم.

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) \quad -۲$$

برای محاسبه $g'(f(x))$ می‌بایست ابتدا $g'(x)$ را پیدا نمود و سپس در آن به جای x ، $f(x)$ را قرار دهیم.

۱۰-۵ مشتق منحنی‌های پارامتری

اگر $x = f(t)$ و $y = g(t)$ توابعی مشتق‌پذیر برحسب t باشند، خواهیم داشت (مسئله ۱۴):

$$Y'_x = \frac{g'(t)}{f'(t)} = \frac{y'_t}{x'_t}$$

۱۱-۵ مشتق نسبت به u

اگر $y = f(x)$ و $u = g(x)$ توابعی مشتق‌پذیر برحسب x باشند، $y' = f'(x)$ و $u' = g'(x)$ و بنا به مشتق توابع پارامتری مشتق y نسبت به تابع u عبارت است از (مسئله ۱۵):

$$y'_u = y'_{g(x)} = \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

(۱) $y'_{g(x)}$ یعنی مشتق y نسبت به $g(x)$.

۱۲-۵ مشتق توابع معکوس

مشتق معکوس یک تابع برآبر است با عکس مشتق آن تابع اگر f در فاصله $[a, b]$ و f^{-1} در فاصله $[f(a), f(b)]$ دارای مشتق ناصفر باشند، آنگاه (مسئله ۱۶):

$$(f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(y)} \quad \text{یا} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx/dy}$$

۱۳-۵ کاربردهای مشتق

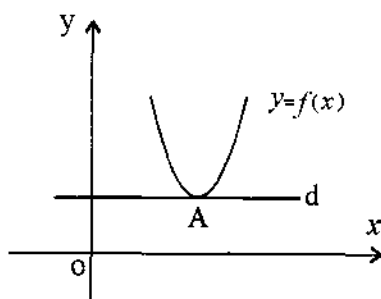
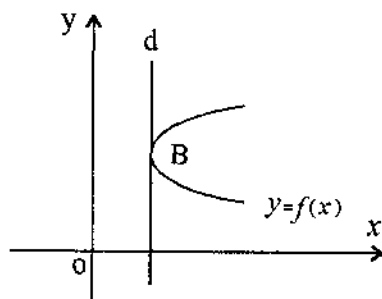
۱-۱۳-۵ معادله خط مماس بر منحنی

تعریف: خط مماس بر منحنی تابع خطی است که منحنی تابع را در دو نقطه متطبق بر هم قطع کند. با توجه به این تعریف، روشن است که معادله تقاطع خط و منحنی باید دو ریشه مساوی داشته باشد. اگر نقطه $A(x_0, y_0 = f(x_0))$ در روی منحنی $y = f(x)$ قرار داشته باشد، معادله مماس بر منحنی به صورت زیر خواهد بود (مسئله ۱۷):

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \quad \text{ضریب زاویه خط مماس،}$$

نکات مهم:

- ۱- اگر مماس بر منحنی $y = f(x)$ در یک نقطه، مانند A ، موازی محور x ها باشد، در آن صورت مشتق در آن نقطه از منحنی صفر است و برعکس اگر مشتق در یک نقطه از منحنی صفر باشد، مماس در آن نقطه موازی محور x هاست.
- ۲- اگر مماس بر منحنی $y = f(x)$ در یک نقطه، مانند B ، موازی محور y ها باشد، در آن صورت مشتق در آن نقطه از منحنی بی نهایت است و برعکس اگر مشتق در یک نقطه از منحنی بی نهایت باشد، مماس در آن نقطه موازی محور y هاست.



۲-۱۳-۵ معادله خط قائم (عمود) بر منحنی

تعریف: خط قائم بر منحنی، خطی است که در نقطه تماس بر خط مماس عمود باشد. اگر نقطه $A(x_0, y_0 = f(x_0))$ در روی منحنی $y = f(x)$ قرار داشته باشد، معادله خط قائم بر منحنی به صورت زیر خواهد بود (مسئله ۱۸):

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) \quad \text{ضریب زاویه خط قائم،}$$

تذکره: ضریب زاویه خط قائم بر منحنی برابر است با $-1/f'(x_0)$ مشروط بر آنکه $f'(x_0) \neq 0$ باشد. اگر $f'(x_0) = 0$ باشد خط مماس افقی است و در نتیجه خط قائم بر منحنی عمود بر محور x ها و معادله آن $x = x_0$ است.

۳-۱۳-۵ توابع صعودی و نزولی (جهت تغییرات تابع)

تعریف: تابع $f(x)$ در فاصله $[a, b]$ صعودی است اگر:

$$\forall x_1, x_2 \in [a, b], \begin{cases} x_1 \geq x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2) \\ x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \end{cases}$$

یعنی در تابع صعودی جهت تغییرات تابع و متغیر یکی است. اگر نامساوی‌های فوق علامت تساوی نداشته باشد، تابع را در فاصله $[a, b]$ موکداً صعودی نامند.

تعریف: تابع $f(x)$ در فاصله $[a, b]$ نزولی است اگر:

$$\forall x_1, x_2 \in [a, b], \begin{cases} x_1 \geq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \\ x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2) \end{cases}$$

یعنی در تابع نزولی جهت تغییرات تابع و متغیر یکی نیست. اگر نامساوی‌های فوق علامت تساوی نداشته باشد، تابع را در فاصله $[a, b]$ موکداً نزولی نامند.

برای اینکه تشخیص دهیم یک تابع در چه فاصله‌هایی صعودی و در چه فاصله‌هایی نزولی است به قضیه زیر توجه بکنید (مسئله ۱۹).

قضیه: فرض کنید تابع f در فاصله بسته $[a, b]$ پیوسته و در فاصله باز (a, b) مشتق‌پذیر باشد:

۱- اگر به ازای هر $x \in (a, b)$, $f'(x) > 0$ ، آن‌گاه f در فاصله $[a, b]$ صعودی است.

۲- اگر به ازای هر $x \in (a, b)$, $f'(x) < 0$ ، آن‌گاه f در فاصله $[a, b]$ نزولی است.

۳- اگر به ازای هر $x \in (a, b)$, $f'(x) = 0$ ، آن‌گاه f در فاصله $[a, b]$ ثابت است.

نکات مهم:

۱- برای بررسی صعودی یا نزولی بودن یک تابع در یک فاصله باید از تابع مشتق گرفت و مشتق را تعیین علامت نمود.

۲- اگر مشتق تابعی در یک فاصله یک علامت داشته باشد و تابع در آن فاصله پیوسته باشد، تابع در آن فاصله اکیداً یکنواست. عکس این مطلب همواره صحیح نیست.

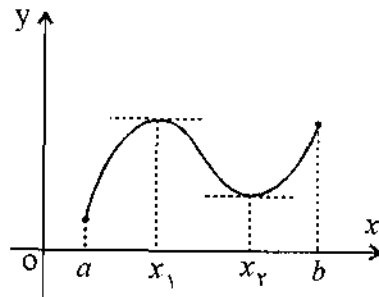
۳- اگر تابعی در دامنه‌اش اکیداً یکنوا باشد، آن تابع یک به یک است. عکس این مطلب همواره صحیح نیست.

۴-۱۳-۵ ماکزیمم و می‌نیمم نسبی

تعریف: اگر تابع حقیقی f در فاصله $[a, b]$ تعریف شده باشد و نقطه‌ای به طول x_0 در فاصله (a, b) وجود داشته باشد، به طوری که $f(x_0)$ در یک همسایگی از x_0 از تمام عرض‌های نقاط همسایگی بزرگ‌تر باشد، آن‌گاه تابع f در نقطه‌ای به طول x_0 دارای یک ماکزیمم نسبی است (مانند نقطه به طول x_1 در شکل ۴-۵).

تعریف: اگر تابع حقیقی f در فاصله $[a, b]$ تعریف شده باشد و نقطه‌ای به طول x_0 در فاصله (a, b) وجود داشته باشد، به طوری که $f(x_0)$ در یک همسایگی از x_0 از تمام عرض‌های نقاط همسایگی کوچک‌تر باشد، آن‌گاه تابع f در نقطه به طول x_0 دارای یک می‌نیمم نسبی است (مانند نقطه به طول x_2 در شکل ۴-۵).

تذکره: اگر تابع f در نقطه‌ای به طول x_0 دارای ماکزیمم نسبی یا می‌نیمم نسبی باشد، می‌گویند تابع f در نقطه به طول x_0 دارای اکسترمم نسبی است.



قضیه: اگر تابع f در نقطه x_0 اکسترم نسبی باشد، آنگاه یا $f'(x_0) = 0$ است یا f در نقطه x_0 مشتق‌پذیر نیست. به عبارت دیگر، اگر تابع f در نقطه اکسترم نسبی مشتق‌پذیر باشد، مقدار مشتق آن در این نقطه صفر است (عکس این قضیه همواره صحیح نیست).

نقطه بحرانی: نقاط اکسترم نسبی نمودار یک تابع را نقاط بحرانی تابع می‌گویند. به بیان دیگر، نقطه بحرانی تابع f به نقطه‌ای اطلاق می‌شود که در آن نقطه مشتق صفر گردد^۱ یعنی $f'(x) = 0$ و یا آنکه مشتق وجود نداشته باشد. بنابراین شرط لازم برای آنکه نقطه $M(x_0, f(x_0))$ نقطه ماکزیم نسبی یا می‌نیم نسبی باشد، آن است که نقطه M نقطه بحرانی تابع باشد، ولی شرط کافی نیست. پس اگر یک منحنی دارای ماکزیم نسبی یا می‌نیم نسبی باشد حتماً ماکزیم نسبی یا می‌نیم نسبی در نقاط بحرانی اتفاق می‌افتد ولی عکس این موضوع صحیح نیست، یعنی ممکن است یک تابع نقاط بحرانی داشته باشد ولی ماکزیم نسبی یا می‌نیم نسبی نداشته باشد (مسئله ۲۱).

برای تشخیص نقاط اکسترم نسبی یک تابع از قضایای زیر استفاده می‌کنیم.

قضیه (استفاده از مشتق اول): اگر تابع f در فاصله $[a, b]$ پیوسته و $f'(x)$ در فاصله (a, b) وجود داشته باشد، $a < x < b$ و $a < x_0 < b$ (مسئله ۲۰):

۱- اگر به ازای هر $x < x_0$ ، $f'(x) > 0$ و به ازای هر $x > x_0$ ، $f'(x) < 0$ آنگاه f در x_0 ماکزیم نسبی است.

۲- اگر به ازای هر $x < x_0$ ، $f'(x) < 0$ و به ازای هر $x > x_0$ ، $f'(x) > 0$ آنگاه f در x_0 می‌نیم نسبی است.

نتیجه ۱: اگر $x_0 \in D_f$ و علامت $f'(x)$ در طرفین x_0 مختلف باشد، x_0 طول نقطه اکسترم نسبی تابع است.

نتیجه ۲: برای تعیین مختصات نقاط اکسترم نسبی تابع، از تابع مشتق گرفته و معادله $f'(x) = 0$ را حل کرده، طول‌های نقاط اکسترم تابع را یافته یا قرار دادن این طول‌ها در معادله منحنی عرض نقاط را یافته و با تعیین علامت مشتق بنا به مطالب فوق ماکزیم یا می‌نیم بودن آن‌ها را مشخص می‌کنیم.

قضیه (استفاده از مشتق دوم): فرض می‌کنیم نقطه به طول x_0 نقطه بحرانی تابع f در فاصله (a, b) باشد و $f'(x_0) = 0$ و فرض می‌کنیم برای هر x در فاصله (a, b) ، $f'(x)$ و $f''(x)$ وجود داشته باشد (مسئله ۲۰):

۱- اگر $f''(x_0) < 0$ ، آنگاه $x = x_0$ طول نقطه ماکزیم نسبی است.

۲- اگر $f''(x_0) > 0$ ، آنگاه $x = x_0$ طول نقطه می‌نیم نسبی است.

نتیجه ۳: برای تعیین نوع نقاط اکسترم نسبی تابع به طریق زیر عمل می‌کنیم:

الف- مشتق تابع یعنی $f'(x)$ را به دست می‌آوریم.

ب- ریشه‌های معادله $f'(x) = 0$ را پیدا می‌کنیم.

ج- مشتق مرتبه دوم تابع یعنی $f''(x)$ را به دست می‌آوریم.

۱) نقطه بحرانی را که در آن $f'(x) = 0$ است، نقطه ایستای f نامند.

د. ریشه‌های مشتق اول را در مشتق دوم قرار می‌دهیم. اگر حاصل مثبت شود، آن نقطه می‌نیم نسبتی و اگر حاصل منفی شود، آن نقطه ماکزیم نسبتی است.

نکات مهم:

- ۱- اگر تابع f در نقطه به طول x_0 اکسترم نسبتی باشد، لزومی ندارد تابع f در x_0 پیوسته باشد.
- ۲- ممکن است یک تابع در یک فاصله دارای چندین ماکزیم و می‌نیم نسبتی باشد.

۵-۱۳-۵ ماکزیم و می‌نیم مطلق

تعریف: اگر تابع f در فاصله $[a, b]$ تعریف شده باشد، این تابع در این فاصله وقتی دارای ماکزیم مطلق است، که لااقل یک نقطه به طول x_0 در این فاصله وجود داشته باشد که برای هر $x \in [a, b]$ داشته باشیم $f(x_0) \geq f(x)$.

تعریف: اگر تابع f در فاصله $[a, b]$ تعریف شده باشد، این تابع در این فاصله وقتی دارای می‌نیم مطلق است، که لااقل یک نقطه به طول x_0 در این فاصله وجود داشته باشد که برای هر $x \in [a, b]$ داشته باشیم $f(x_0) \leq f(x)$.

تذکره: ماکزیم مطلق یا می‌نیم مطلق تابع f را روی یک فاصله مقدار اکسترم مطلق f روی آن فاصله نامیم.

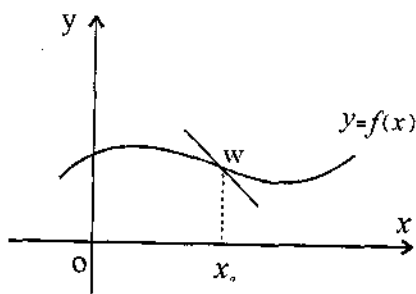
قضیه: چنان‌که تابع f در فاصله بسته $[a, b]$ پیوسته باشد، f در این فاصله دارای یک ماکزیم مطلق و یک می‌نیم مطلق خواهد بود. در این قضیه دو شرط پیوستگی و بسته بودن فاصله، اساسی است اگر یکی از این شرایط برقرار نباشد وجود ماکزیم و می‌نیم مطلق تضمین نمی‌شود.

برای یافتن ماکزیم مطلق و می‌نیم مطلق تابع f در فاصله بسته $[a, b]$ ابتدا نقاط بحرانی تابع f را به دست می‌آوریم و مقادیر تابع را به ازای این نقاط بحرانی محاسبه می‌کنیم. سپس $f(a)$ و $f(b)$ را محاسبه می‌کنیم، بین این مجموعه اعداد بزرگ‌ترین آن‌ها ماکزیم مطلق و کوچک‌ترین آن‌ها می‌نیم مطلق تابع خواهد بود (مسئله ۲۲).

۵-۱۳-۶ نقطه عطف

اگر در تابع f داشته باشیم $x = x_0 \in D_f$ و نمودار تابع f در $x = x_0$ پیوسته و یک خط مماس داشته باشد و علامت f'' در طرفین عدد x_0 مختلف باشد، آن‌گاه $x = x_0$ را طول نقطه عطف منحنی تابع f گوئیم. یعنی اگر یکی از شرایط زیر برقرار باشد، $x = x_0$ طول نقطه عطف منحنی است.

$$\begin{cases} x < x_0 \Rightarrow f''(x_0) < 0 \\ x > x_0 \Rightarrow f''(x_0) > 0 \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} x < x_0 \Rightarrow f''(x_0) > 0 \\ x > x_0 \Rightarrow f''(x_0) < 0 \end{cases}$$



برای بررسی نقاط عطف منحنی یک تابع مانند f باید f'' تابع را تشکیل داد و در جدولی تعیین علامت کنیم (مسئله ۲۳).

نکات مهم:

۱- اگر $w(x_0, f(x_0))$ یک نقطه عطف منحنی نمایش تابع $y = f(x)$ باشد، آنگاه اگر $f''(x_0)$ موجود باشد، داریم $f''(x_0) = 0$.

۲- هر چند جمله‌ای $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$ ، حداکثر دارای $n - 2$ نقطه عطف است.

۳- همه x هایی که از حل $f''(x) = 0$ به دست می‌آیند طول نقاط عطف نیستند، آن‌هایی طول نقاط عطف هستند که در آن‌ها $f''(x)$ تغییر علامت دهد.

۴- خط مماس بر منحنی در نقطه عطف از منحنی عبور می‌کند.

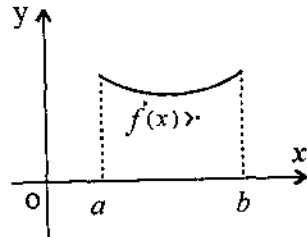
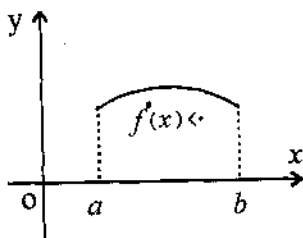
۷-۱۳-۵ تحدب و تقعر منحنی

گودی منحنی را تقعر منحنی و برآمدگی منحنی را تحدب منحنی گویند. تقعر و تحدب منحنی را با جهت محور y ها می‌سنجند. در ضمن جهت تقعر و تحدب یک منحنی عکس یکدیگرند. برای جلوگیری از هرگونه اشتباه جهت تقعر را همیشه بررسی می‌کنیم.

تعریف: اگر تابع f در فاصله $[a, b]$ پیوسته و توابع f' و f'' در فاصله (a, b) وجود داشته باشد و برای هر $x \in (a, b)$ (مسئله ۲۴):

۱- اگر $f''(x) > 0$ ، می‌گوییم تقعر منحنی در این فاصله به طرف بالا است (جهت مثبت محور y ها).

۲- اگر $f''(x) < 0$ ، می‌گوییم تقعر منحنی در این فاصله به طرف پایین است (جهت منفی محور y ها).



تذکر: اگر $M(x_0, y_0)$ یک نقطه از منحنی تابع به معادله $y = f(x)$ باشد، چنانچه $f''(x_0) > 0$ آنگاه تقعر منحنی در نقطه M به طرف بالاست و اگر $f''(x_0) < 0$ آنگاه تقعر منحنی در نقطه M به طرف پایین است.

۱۴-۵ نقاط مهم روی منحنی‌ها

(۱) ریشه ساده معادله $y' = 0$ طول نقطه اکسترم نسبی تابع است.

(۲) ریشه ساده معادله $y'' = 0$ طول نقطه عطف معمولی منحنی تابع است.

(۳) ریشه مضاعف معادله $y' = 0$ طول نقطه عطف است، در این نقطه خط مماس بر منحنی تابع موازی محور x هاست.

(۴) اگر $x = x_0$ ریشه مضاعف معادله $y'' = 0$ باشد ولی ریشه ساده معادله $y' = 0$ نباشد، آنگاه $x = x_0$ طول نقطه میلاست.

(۵) اگر $x = x_0$ ریشه مضاعف معادله $y'' = 0$ باشد و ریشه ساده معادله $y' = 0$ باشد، آنگاه $x = x_0$ طول نقطه اکسترم است (مسئله ۲۵).

۱۵-۵ خواص نقاط روی منحنی‌ها

(۱) هرگاه، مختصات نقطه معمولی را بدهند، مختصات این نقطه در معادله منحنی صدق می‌کند. یعنی در معادله منحنی به جای x و y طول و عرض این نقطه را قرار می‌دهیم.

(۲) هرگاه مختصات نقاط $\max$ یا $\min$ را بدهند، دو نوع معادله می‌توان تشکیل داد. اولاً: مختصات نقاط $\max$ یا $\min$ در معادله منحنی صدق می‌کند. ثانیاً: در مشتق به جای x طول نقطه $\max$ یا $\min$ و به جای y' عدد صفر را قرار می‌دهیم.

(۳) هرگاه مختصات نقطه عطف منحنی را بدهند، دو نوع معادله می‌توان تشکیل داد. اولاً: مختصات نقطه عطف در معادله منحنی صدق می‌کند. ثانیاً: در مشتق مرتبه دوم به جای x طول نقطه عطف و به جای y'' عدد صفر را قرار می‌دهیم.

(۴) هرگاه ضریب زاویه خط مماس و مختصات نقطه تماس را بدهند، دو نوع معادله می‌توان تشکیل داد. اولاً: مختصات نقطه تماس در معادله منحنی صدق می‌کند. ثانیاً: به جای y' مقدار ضریب زاویه خط مماس و به جای x طول نقطه تماس را قرار می‌دهیم.

(۵) هرگاه مختصات نقطه عطف و ضریب زاویه خط مماس در نقطه عطف را بدهند، سه نوع معادله می‌توان تشکیل داد. اولاً: مختصات نقطه عطف در معادله منحنی صدق می‌کند. ثانیاً: در مشتق به جای y' مقدار ضریب زاویه خط مماس و به جای x طول نقطه تماس را قرار می‌دهیم. ثالثاً: در مشتق مرتبه دوم به جای x طول نقطه تماس و به جای y'' عدد صفر را قرار می‌دهیم (مسئله ۲۶).

۱۶-۵ بررسی رفتار چند تابع جبری

۱-۱۶-۵ تابع درجه دوم

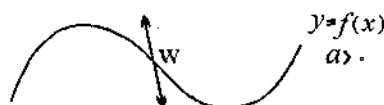
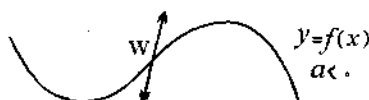
این تابع به صورت کلی $y = ax^2 + bx + c$ می‌باشد که نمودار آن یک سهمی قائم است.

- (۱) این تابع همواره دارای یک $\max$ و یک $\min$ است.
- (۲) اگر $a > 0$ باشد، تابع دارای $\min$ است و سهمی رو به بالا است.
- (۳) اگر $a < 0$ باشد، تابع دارای $\max$ است و سهمی رو به پایین است.
- (۴) ماکزیمم یا می‌نیمم تابع از رابطه $y = (4ac - b^2)/4a$ به دست می‌آید.
- (۵) نقطه $s(-b/2a, (4ac - b^2)/4a)$ رأس سهمی است که مرکز تقارن منحنی است.

۲-۱۶-۵ تابع درجه سوم

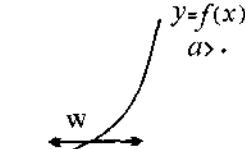
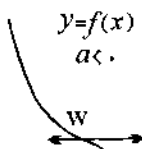
این تابع به صورت کلی $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ می‌باشد.

- (۱) از حل $y'' = 0$ طول نقطه عطف $x = -b/3a$ به دست می‌آید، بنابراین $w(-b/3a, f(-b/3a))$ نقطه عطف منحنی (مرکز تقارن منحنی) است.
- (۲) نقاط $\max$ و $\min$ قرینه یکدیگر نسبت به نقطه عطف‌اند و نقطه عطف تابع در وسط پاره خط واصل نقاط اکسترمم است. یعنی: $w(x_{\max} + x_{\min}/2, y_{\max} + y_{\min}/2)$
- (۳) اگر $y' = 0$ دو ریشه متمایز داشته باشد، یعنی $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ در این حالت تابع یک $\max$ و یک $\min$ دارد و نمودار تابع به یکی از دو صورت زیر است:

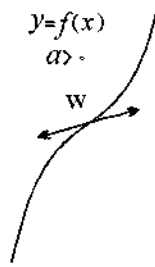
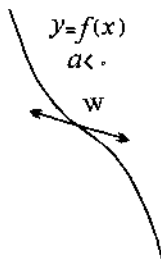


- نکته: در این حالت اگر y_1 ماکزیمم و y_2 می‌نیمم تابع باشند داریم:
- (الف) به ازای $a > 0$ ریشه کوچک‌تر مشتق طول y_1 و ریشه دیگر طول y_2 است.
 - (ب) به ازای $a < 0$ ریشه کوچک‌تر مشتق طول y_2 و ریشه دیگر طول y_1 است.
 - (پ) اگر $y_1, y_2 > 0$ باشد منحنی محور x ها را در یک نقطه قطع می‌کند.

- ت) اگر $y_1 y_2 = 0$ باشد منحنی در یک نقطه بر محور x مماس و در نقطه دیگر آن محور را قطع می‌کند.
- ث) اگر $y_1 y_2 < 0$ باشد منحنی محور x را در سه نقطه قطع می‌کند.
- ۴) اگر $y' = 0$ ریشه مضاعف داشته باشد، یعنی $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ ، در این حالت تابع نقطه اکسترم ندارد و مماس بر منحنی در نقطه عطف تابع موازی محور x ها است. ریشه مضاعف معادله $y' = 0$ طول نقطه عطف تابع و نمودار تابع به یکی از دو صورت زیر است:



- ۵) اگر $y' = 0$ ریشه نداشته باشد، یعنی $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ ، در این حالت تابع نقطه اکسترم ندارد و نمودار آن به یکی از دو صورت است:



۳-۱۶-۵ تابع هموگرافیک

- این تابع به صورت کلی $y = (ax + b)/(cx + d)$ می‌باشد که نمودار آن یک هذلولی است.
- (۱) دامنه آن $D_f = \mathbb{R} - \{-d/c\}$ و برد آن $R_f = \mathbb{R} - \{a/c\}$ می‌باشد.
 - (۲) خط $x = -d/c$ مجانب قائم و $y = a/c$ مجانب افقی تابع است.
 - (۳) این تابع نقطه اکسترم ندارد.
 - (۴) این تابع اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی است.
 - (۵) اگر $ad - bc > 0$ باشد، تابع اکیداً صعودی و اگر $ad - bc < 0$ باشد، تابع اکیداً نزولی است.
 - (۶) در این تابع اگر $ad - bc = 0$ باشد، نمودار آن به خطی راست موازی محور x ها تبدیل می‌شود و تابع نیز به یک تابع ثابت تبدیل می‌گردد.

۱۷-۵ تعیین ماکزیمم و می‌نیم در حالات خاص

۱-۱۷-۵ ماکزیمم یک حاصل ضرب

- قضیه ۱: اگر مجموع چند متغیر مثبت مقداری ثابت باشد، حاصل ضرب آن‌ها وقتی ماکزیمم است که این متغیرها با هم برابر باشند.
- قضیه ۲: اگر مجموع متغیرهای مثبت x و y و z و $\dots$ و t ثابت باشد، حاصل ضرب $x^m \cdot y^n \cdot z^p \cdot \dots \cdot t^q$ وقتی ماکزیمم است که داشته باشیم $x/m = y/n = z/p = \dots = t/q$ (مسئله ۲۸).

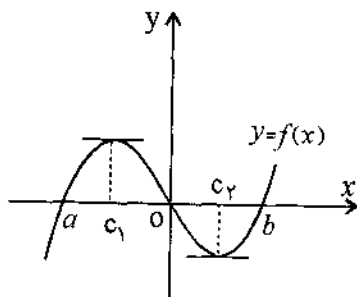
۵-۱۷-۲ می نیم یک مجموع

قضیه ۱: اگر حاصل ضرب چند متغیر مثبت مقداری ثابت باشند، مجموع آن‌ها وقتی می نیم است که این متغیرها با هم برابر باشند.

قضیه ۲: اگر برای متغیرهای مثبت x و y و z و $\dots$ و t حاصل ضرب $x^p \cdot y^q \cdot z^r \cdot \dots \cdot t^s$ مقدار ثابتی باشد، مجموع آن‌ها وقتی می نیم است که داشته باشیم $x/p = y/q = z/r = \dots = t/s$ (مسئله ۲۷).

۵-۱۸ قضیه رول

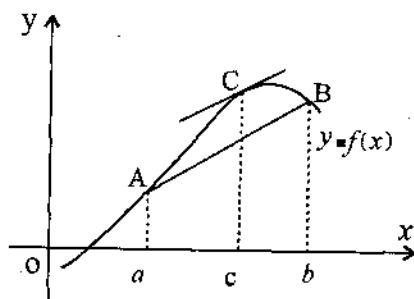
اگر منحنی همواری محور x را در دو نقطه قطع کند، نقطه‌ای روی منحنی بین آن دو نقطه وجود دارد که در آن مماس بر منحنی افقی است. همان‌طور که در شکل زیر مشاهده می‌شود، منحنی $y = f(x)$ محور x را در نقاطی به طول a و b قطع می‌کند، هرگاه از نقاط c_1 و c_2 عمودی بر منحنی رسم کنیم، در نقاط تقاطع مماس بر منحنی افقی است.



قضیه رول: فرض کنید که $y = f(x)$ در هر نقطه از بازه بسته $[a, b]$ پیوسته و در هر نقطه از بازه باز (a, b) مشتق پذیر باشد. اگر $f(a) = f(b)$ ، آنگاه دست کم یک نقطه مانند c بین a و b وجود دارد که در آن $f'(c) = 0$ است.

۵-۱۹ قضیه مقدار میانگین

قضیه مقدار میانگین همان قضیه رول است که در آن وتر به جای بازه قرار می‌گیرد، تعبیر هندسی قضیه مقدار میانگین با توجه به شکل این است که بر بازه‌ای چون $a \leq x \leq b$ نقطه‌ای روی منحنی وجود دارد که مماس در آن نقطه با وتر AB موازی است.



قضیه مقدار میانگین: اگر $y = f(x)$ در هر نقطه از بازه بسته $[a, b]$ و در هر نقطه از بازه باز (a, b) مشتق پذیر باشد، آنگاه دست کم یک نقطه چون c بین a و b وجود دارد که (مسئله ۲۹):

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \quad \text{یا} \quad f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$$

۲۰-۵ فرمول کوشی

اگر f و g دو تابع که در بازه بسته $[a, b]$ معین باشد و ضمناً داشته باشیم:

الف) f و g در بازه $[a, b]$ پیوسته باشد.

ب) f' و g' در بازه (a, b) وجود داشته باشد.

ج) برای هر مقدار x متعلق به بازه (a, b) ، $g'(x) \neq 0$ باشد.

در این صورت عددی مانند c در بازه (a, b) وجود دارد، به طوری که (مسئله ۳۰):

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

۲۱-۵ یافتن جواب‌های معادله

قضیه رول حاکی است که بین ریشه‌های یک تابع مشتق‌پذیر همیشه می‌توان ریشه‌ای برای مشتق آن یافت، فرض کنید:

اولاً: تابع f بر $[a, b]$ پیوسته، و بر (a, b) مشتق‌پذیر باشد.

ثانیاً: $f(a)$ و $f(b)$ علامت‌های مختلف داشته باشند، یعنی $f(a).f(b) < 0$.

ثالثاً: f' هرگز در بین a و b صفر نشود.

آن‌گاه f بین a و b دقیقاً یک ریشه دارد (مسئله ۳۱).

۲۲-۵ دیفرانسیل

فرض می‌کنیم تابع $y = f(x)$ در فاصله $[a, b]$ تعریف‌شده و پیوسته و دارای مشتق باشد. دیفرانسیل x را به dx نشان می‌دهیم، که dx می‌تواند هر مقداری را اختیار کند ($dx = \Delta x$) و دیفرانسیل y برابر dy نشان می‌دهیم و برابر است با:

$$dy = f'(x).dx$$

یعنی دیفرانسیل یک تابع، برابر است با حاصل ضرب مشتق تابع در دیفرانسیل متغیر (یا نمو متغیر) با استفاده از رابطه فوق می‌توان دیفرانسیل توابع مختلف را محاسبه نمود (مسائل ۳۲ و ۳۳).

۲۳-۵ دیفرانسیل توابع مختلف

در روابط زیر اگر u و v متغیر مستقل باشد، $u' = 1$ و $v' = 1$ می‌شود.

۱-۲۳-۵ دیفرانسیل توابع جبری

$$۱) y = a, (a \in \mathbb{R}) \Rightarrow dy = 0 \quad ۴) y = u.v \Rightarrow dy = u.dv + v.du$$

$$۲) y = au^n \Rightarrow dy = anu^{n-1}.du \quad ۵) y = \frac{u}{v} \Rightarrow dy = \frac{v.du - u.dv}{v^2}$$

$$y = u + v \Rightarrow dy = du + dv$$

۲-۲۳-۵ دیفرانسیل توابع مثلثاتی

$$۱) y = \sin u \Rightarrow dy = \cos u.du \quad ۴) y = \cot u \Rightarrow dy = -(1 + \cot^2 u).du$$

$$۲) y = \cos u \Rightarrow dy = -\sin u.du \quad ۵) y = \sec u \Rightarrow dy = \sec u.\tan u.du$$

$$۳) y = \tan u \Rightarrow dy = (1 + \tan^2 u).du \quad ۶) y = \csc u \Rightarrow dy = -\csc u.\cot u.du$$

۳-۲۳-۵ دیفرانسیل توابع معکوس مثلثاتی

$$\begin{aligned} ۱) y = \sin^{-1} u &\Rightarrow dy = \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} & ۴) y = \cot^{-1} u &\Rightarrow dy = \frac{-du}{1+u^2} \\ ۲) y = \cos^{-1} u &\Rightarrow dy = \frac{-du}{\sqrt{1-u^2}} & ۵) y = \sec^{-1} u &\Rightarrow dy = \frac{du}{|u|\sqrt{u^2-1}} \\ ۳) y = \tan^{-1} u &\Rightarrow dy = \frac{du}{1+u^2} & ۶) y = \csc^{-1} u &\Rightarrow dy = \frac{-du}{|u|\sqrt{u^2-1}} \end{aligned}$$

۴-۲۳-۵ دیفرانسیل توابع نمایی و لگاریتمی

$$\begin{aligned} ۱) y = \ln u &\Rightarrow dy = \frac{du}{u} & ۴) y = \log_a u &\Rightarrow dy = \frac{du}{u \cdot \ln a} \\ ۲) y = e^u &\Rightarrow dy = e^u \cdot du & ۵) y = u^v &\Rightarrow dy = v u^{v-1} du + u^v \cdot \ln u \cdot dv \\ ۳) y = a^u &\Rightarrow dy = a^u \cdot \ln a \cdot du \end{aligned}$$

۵-۲۳-۵ دیفرانسیل توابع هیپربولیک

$$\begin{aligned} ۱) y = \sinh u &\Rightarrow dy = \cosh u \cdot du & ۲) y = \cosh u &\Rightarrow dy = \sinh u \cdot du \\ ۳) y = \tanh u &\Rightarrow dy = (1 - \tanh^2 u) \cdot du & ۴) y = \coth u &\Rightarrow dy = (1 - \coth^2 u) \cdot du \\ ۵) y = \operatorname{sech} u &\Rightarrow dy = -\operatorname{sech} u \cdot \tanh u \cdot du & ۶) y = \operatorname{csch} u &\Rightarrow dy = -\operatorname{csch} u \cdot \coth u \cdot du \end{aligned}$$

۶-۲۳-۵ دیفرانسیل توابع معکوس هیپربولیک

$$\begin{aligned} ۱) y = \sinh^{-1} u &\Rightarrow dy = \frac{du}{\sqrt{u^2+1}} & ۲) y = \cosh^{-1} u &\Rightarrow dy = \frac{du}{\sqrt{u^2-1}} \\ ۳) y = \tanh^{-1} u &\Rightarrow dy = \frac{du}{1-u^2}, |u| < 1 & ۴) y = \coth^{-1} u &\Rightarrow dy = \frac{du}{1-u^2}, |u| > 1 \\ ۶) y = \operatorname{csch}^{-1} u &\Rightarrow dy = \frac{-du}{|u|\sqrt{1+u^2}} & ۵) y = \operatorname{sech}^{-1} u &\Rightarrow dy = \frac{-du}{u\sqrt{1-u^2}} \end{aligned}$$

۲۴-۵ دیفرانسیل تابع مرکب

اگر $y = f(u)$ و u تابعی از x باشد، داریم:

$$dy = y'_u \cdot du$$

در رابطه فوق du نموده نخواهد بود بلکه $du = u'_x \cdot dx$ است.

۲۵-۵ دیفرانسیل‌های متوالی

در تابع $y = f(x)$ ، dy دیفرانسیل مرتبه اول تابع y است، حال تابع dy را در نظر گرفته، دیفرانسیل آن را به d^2y نشان می‌دهیم، آن را دیفرانسیل مرتبه دوم تابع $y = f(x)$ می‌گوییم و داریم:

$$d^2y = d(dy) = f''(x) \cdot dx^2$$

به طور کلی دیفرانسیل مرتبه n م برابر است با:

$$d^n y = f^{(n)}_{(x)} \cdot dx^n, n \in N$$

توجه داشته باشید که اگر dx ثابت نباشد، مثلاً اگر $y = f(u)$ باشد، می توان نوشت:

$$dy = f'(u) \cdot du \Rightarrow d^2 y = f''(u) \cdot du^2 + f'(u) \cdot d^2 u$$

۲۶-۵ محاسبات تقریبی به کمک دیفرانسیل

در برخی از محاسبات تقریبی می توان از دیفرانسیل استفاده نمود. رابطه تقریبی که در این مورد به کار می رود به صورت $dy \approx \Delta y$ است (مسائل ۳۴ و ۳۵):

$$\begin{cases} \Delta y \approx dy \\ f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x) \cdot dx \quad \text{یا} \quad f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x) \cdot dx \end{cases}$$

۲۷-۵ محاسبه خطا با استفاده از دیفرانسیل

اگر مقدار واقعی متغیری با u و در اندازه گیری مقدار آن u_1 باشد، آنگاه $\Delta u = u - u_1$ را خطای مطلق نامند. با توجه به این که $\Delta u \approx du$ ، لذا du را خطای مطلق تقریبی و du/u را خطای نسبی تقریبی گویند (مسئله ۳۶).

مسائل نمونه فصل ۵

۱. آهنگ تغییرات نسبی $f(x) = x^2$ را وقتی x از ۴ تا ۶ تغییر می کند، بیابید.
۲. مشتق تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 - x & x \geq 1 \\ 2x^2 - 2 & 0 \leq x < 1 \end{cases}$ را در نقطه $x = 0$ بیابید.
۳. مشتق پذیری تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{x}$ در نقطه $x = 0$ را بررسی کنید.
۴. مقدار a و b را طوری بیابید که تابع $f(x) = \begin{cases} ax + 1 & x \geq 1 \\ x^2 - b & x < 1 \end{cases}$ در نقطه $x = 1$ مشتق پذیر باشد.
۵. اگر مقدار مشتق تابع $y = ax/(x^2 - 1)$ در نقطه $x = 2$ برابر ۱۰ باشد، a را بیابید.
۶. مشتق تابع با ضابطه $y = \sin x^\circ$ را به دست آورید.
۷. مشتق تابع $y = \ln \left(\frac{x+1}{x} \right)$ را در نقطه $x = 1$ بیابید.
۸. مشتق تابع $y = x^{2x}$ را بیابید.
۹. مشتق تابع با ضابطه $y = f(\sqrt{\sin x})$ را بیابید.
- ۱۰-۱۱. مشتق مرتبه n ام توابع زیر را بیابید.

$$(10) y = 5x^x$$

$$(11) y = \frac{1}{x}$$

۱۲. در عبارت $x^2 - xy^2 + xy^2 - 3x = 0$ را بیابید.

۱۳. اگر $y = u^2/x$ و $u = 1/x$ باشد، y'_x را بیابید.

۱۴. مشتق منحنی به معادلات پارامتری $\begin{cases} x = \sin^2 t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$ را بیابید.

۱۵. مشتق تابع $f(x) = 3x^3 - x^2 + x^2$ را نسبت به متغیر x^2 بیابید.
۱۶. اگر $y = f(x) = x^5 - 3x^4 + x^2 - 1$ باشد، مشتق f^{-1} را بیابید.
۱۷. معادله خط مماس بر منحنی $y = x + \sqrt{x}$ را در نقطه $x = 1/4$ بنویسید.
۱۸. معادله خط قائم بر منحنی $y = xe^x$ را در نقطه $x = 0$ بنویسید.
۱۹. تابع $y = 2x^2 - 3x^2 + 1$ در چه فاصله‌ای صعودی و در چه فاصله‌ای نزولی است؟
۲۰. اکسترمم نسبی تابع به معادله $y = -x^3 + 27x$ را بیابید.
۲۱. در تابع $y = xe^{-x}$ طول نقطه بحرانی را بیابید.
۲۲. مقادیر ماکزیمم و می‌نیمم مطلق تابع $y = 4x^2 - 4x + 1$ را روی فاصله $[0, 5]$ پیدا کرده و مشخص کنید در کدام نقاط رخ می‌دهند.
۲۳. نقطه عطف تابع به معادله $y = x^3 + 3$ را بیابید.
۲۴. در چه فاصله‌ای تفرع تابع به معادله $y = x^2 + 3x^2$ رو به بالا و در چه فاصله‌ای رو به پایین است؟
۲۵. در تابع به معادله $y = -x^2 + 27x$ ، $x = 3$ و $x = -3$ طول‌های چه نقاطی هستند؟
۲۶. تابع به معادله $y = x^2 + ax^2 + bx + c$ مفروض است. ضرایب a و b و c را طوری تعیین کنید که منحنی تابع از نقطه $M(3, 1)$ عبور نموده و مبدأ مختصات نقطه ماکزیمم یا می‌نیمم آن باشد.
۲۷. اگر $0 < x < \pi/2$ باشد، می‌نیمم تابع $y = \tan x + \cot x$ را بیابید.
۲۸. ماکزیمم $y = (3 - 2 \sin x)(5 + 2 \sin x)$ را بیابید.
۲۹. اگر $f(x) = x^2 + 2x - 1$ باشد، نقطه‌ای را بر روی این منحنی تعیین کنید که مماس بر آن موازی با وتر باشد که از نقاط به طول‌های $x = 0$ و $x = 1$ می‌گذرد.
۳۰. اگر $f(x) = x^2$ و $g(x) = 2x - 1$ و $0 < c < 3$ باشد، با توجه به فرمول کوشی مقدار c را بیابید.
۳۱. معادله $f(x) = x^2 - x - 2 = 0$ در فاصله $(1, 4)$ چند ریشه حقیقی دارد؟
۳۲. دیرانسیل تابع $y = 1/x^2$ را به ازای $x = 1$ و $dx = 0.1$ بیابید.
۳۳. دیرانسیل تابع $xy^2 + x^2y = 0$ را بیابید.
۳۴. دیرانسیل (dy) و نمو (Δy) در تابع $y = x^2 - 1$ برای $x = 3$ و $dx = 0.1$ محاسبه کنید.
۳۵. با استفاده از دیرانسیل $\sqrt{26}$ را محاسبه کنید.
۳۶. تابع $y = x^2 + 2x + 1$ مفروض است اگر $x = 10$ با حداکثر خطای 0.2 محاسبه شود، ماکزیمم خطای تقریبی را بیابید.

پاسخ مسائل نمونه فصل ۵

۱.
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(6) - f(4)}{2} = \frac{216 - 64}{2} = 76$$
۲. تابع در همسایگی $x = 1$ پیوسته است زیرا
$$f_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0$$
- $$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - x - 0}{x - 1} = 1$$
- $$f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x^2 - 2 - 0}{x - 1} = 4$$

بنابراین تابع در $x = 1$ مشتق‌پذیر نیست.

۳. این تابع در همسایگی $x_0 = 0$ پیوسته است و $f(0) = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{\frac{x}{x^3}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{1}{0^+} = +\infty \Rightarrow f'(0) = +\infty$$

بنابراین تابع f در $x_0 = 0$ مشتق پذیر نیست.

۴. شرط پیوستگی:

۱) $f(1) = a + 1$

۲) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (ax + 1) = a + 1$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 - b) = 1 - b$

۳) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) \Rightarrow 1 - b = a + 1 \Rightarrow a = -b$

شرط مشتق پذیری:

$$\begin{cases} f'(x^+) = a & x \geq 1 \\ f'(x^-) = 2x & x < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(1^+) = a \\ f'(1^-) = 2 \end{cases} \Rightarrow f'(1^+) = f'(1^-) \Rightarrow a = 2 \Rightarrow b = -2$$

۵.

$$y' = \frac{a(x^2 - 1) - 2x(ax)}{(x^2 - 1)^2} \Rightarrow 1^0 = \frac{2a - 2a}{1} \Rightarrow a = -1/8$$

۶. متغیر با واحد درجه بیان شده است، آن را به رادیان تبدیل می‌کنیم:

$$x' = \frac{\pi}{180} x(R), y = \sin\left(\frac{\pi}{180} x\right) \Rightarrow y' = \frac{\pi}{180} \cos\left(\frac{\pi}{180} x\right) = \frac{\pi}{180} \cos x'$$

۷.

$$y' = \frac{\frac{x-x-1}{x^2}}{\frac{x+1}{x}} = \frac{-x}{x^2(x+1)} = \frac{-1}{x(x+1)} \Rightarrow y'(1) = -\frac{1}{2}$$

۸.

$$y' = x^{2x} \left(2 \ln x + 2x \cdot \frac{1}{x} \right) \Rightarrow y' = x^{2x} (2 \ln x + 2)$$

۹.

$$u = \sqrt{\sin x} \Rightarrow u' = \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}, y' = \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}} f'(\sqrt{\sin x})$$

۱۰.

$$y = \Delta x^7 \Rightarrow y' = 7 \circ x^6 \Rightarrow y'' = 6 \circ x^5 \Rightarrow y''' = 5 \circ x^4 \Rightarrow y^{(7)} = 1 \circ x^0 \Rightarrow$$

$$y^{(\Delta)} = 0 \Rightarrow \dots \Rightarrow y^{(n)} = 0, (n \in N > 7)$$

۱۱.

$$y = \frac{1}{x} = x^{-1} \Rightarrow y' = (-1)x^{-2} \Rightarrow y'' = (-1)^2 x^{-3} \Rightarrow$$

$$y''' = (-1)^3 3! x^{-4} \Rightarrow \dots \Rightarrow y^{(n)} = (-1)^n n! x^{-(n+1)}$$

$$y'_x = -\frac{f'_x}{f'_y} = \frac{-(y^2x - y^2 + y^2 - y^2)}{2xy - 2xy^2}$$

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x = 2u^2 \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2\left(\frac{1}{x}\right)^2 \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{-2}{x^4}$$

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\sin t}{2 \cos t \sin t} = \frac{1}{2 \cos t}$$

۱۵. اگر فرض کنیم $g(x) = x^2$ ، خواهیم داشت:

$$y'_{x^2} = y'_{g(x)} = \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{12x^2 - 2x^2 + 2x}{2x} = 5x^2 - \frac{2}{x} + 1$$

$$f'(x) = 6x^2 - 12x^2 + 2x \Rightarrow f'(y) = 6y^2 - 12y^2 + 2y$$

$$(f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{6y^2 - 12y^2 + 2y}$$

$$x = \frac{1}{r} \Rightarrow y = \frac{1}{r} + \sqrt{\frac{1}{r}} = \frac{r}{r} \Rightarrow A\left(\frac{1}{r}, \frac{r}{r}\right)$$

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{r\sqrt{x}} \Rightarrow f'\left(\frac{1}{r}\right) = 2$$

$$y - \frac{r}{r} = r\left(x - \frac{1}{r}\right) \Rightarrow y = rx + \frac{1}{r}$$

$$x = 0 \Rightarrow y = (0)e^0 = 0 \Rightarrow A(0, 0)$$

$$f'(x) = e^x + xe^x \Rightarrow f'(0) = e^0 + (0)e^0 = 1 \Rightarrow -\frac{1}{f'(0)} = -1$$

$$y - 0 = -1(x - 0) \Rightarrow y = -x$$

$$y' = 2x^2 - 2x = 0 \Rightarrow 2x(x - 1) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 1$$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	+
	صعودی	نزولی	صعودی	
	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	$(1, +\infty)$	

۲۰. آزمون مشتق اول:

$$f'(x) = -2x^2 + 22 = 0 \Rightarrow x = \pm 3$$

x	$-\infty$	-3	$+3$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$-$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$
		-54	54	$-\infty$

$$\begin{cases} x=3 \Rightarrow f(3)=54 \\ x=-3 \Rightarrow f(-3)=-54 \end{cases}$$

تابع در نقطه $M_1(3, 54)$ ماکزیمم نسبی و در نقطه $M_2(-3, -54)$ می‌نیمم نسبی است.
آزمون مشتق دوم:

$$f'(x) = -3x^2 + 27 = 0 \Rightarrow x = \pm 3 \Rightarrow M_1(3, 54), M_2(-3, -54)$$

$$f''(x) = -6x \Rightarrow \begin{cases} f''(3) = -18 < 0 \Rightarrow M_1 \text{ نقطه ماکزیمم نسبی است.} \\ f''(-3) = 18 > 0 \Rightarrow M_2 \text{ نقطه می‌نیمم نسبی است.} \end{cases}$$

۲۱

$$y = f(x) = xe^{-x} \Rightarrow y' = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1-x) = 0$$

$$\Rightarrow e^{-x} > 0, 1-x=0 \Rightarrow x=1 \quad \text{طول نقطه بحرانی}$$

۲۲

$$f'(x) = 8x - 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}\right) = 0, f(0) = 1, f(5) = 81$$

پس مقدار ماکزیمم مطلق مساوی ۸۱ که در نقطه $x=5$ رخ می‌دهد و مقدار می‌نیمم مطلق مساوی ۰ که در نقطه $x=1/2$ رخ می‌دهد.

۲۳

$$f'(x) = 3x^2 \Rightarrow f''(x) = 6x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$\begin{cases} x < 0 \Rightarrow f''(x) < 0 \\ x > 0 \Rightarrow f''(x) > 0 \end{cases} \Rightarrow w(0, 3) \text{ نقطه عطف است.}$$

یا:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$

چون مشتق مرتبه دوم در نقطه $w(0, 3)$ تغییر علامت داده است. بنابراین w نقطه عطف منحنی است.

۲۴

$$f'(x) = 3x^2 + 6x \Rightarrow f''(x) = 6x + 6$$

بنابراین تقعر منحنی به سمت بالا است اگر $6x + 6 > 0$ یا $x > -1$ باشد و تقعر منحنی به سمت پایین است اگر $6x + 6 < 0$ یا $x < -1$ باشد. از طریق تعیین علامت آسان‌تر است.

$$f''(x) = 6x + 6 = 0 \Rightarrow x = -1$$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
تقعر	رو به بالا	رو به پایین	تحدب
تحدب	رو به بالا	رو به پایین	

۲۵. ریشه ساده $x = -3$ و $x = 3$ بنابراین $y' = -3x^2 + 27 = 0 \Rightarrow x = 3, x = -3$ طول‌های نقاط اکسترم نسبی منحنی تابع است.

۲۶.

$$M(3, 0) \Rightarrow 3^2 + a(3)^2 + b(3) + c = 0 \Rightarrow 9a + 3b + c = -27$$

$$O(0, 0) \Rightarrow \begin{cases} 0 + a(0) + b(0) + c = 0 \Rightarrow c = 0 \\ y' = 3x^2 + 2ax + b \Rightarrow 3(0)^2 + 2a(0) + b = 0 \Rightarrow b = 0, a = -3 \end{cases}$$

۲۷. $\tan x \cdot \cot x = 1$ حاصل ضرب عوامل ثابت $\tan x$ و $\cot x$ ثابت است، حاصل جمع آن‌ها وقتی می‌نیم است که:

$$\tan x = \cot x \Rightarrow \cot^2 x = 1 \Rightarrow \cot x = 1 \Rightarrow \tan x = 1$$

$$\min : y = 1 + 1 = 2$$

۲۸.

$$y = (3 - 2 \sin x)^2 (\sin x + 2 \sin x)^2, 3 - 2 \sin x + \sin x + 2 \sin x = 8 \quad \text{ثابت}$$

$$\frac{3 - 2 \sin x}{1} = \frac{\sin x + 2 \sin x}{1} \Rightarrow \sin x = -\frac{1}{3}$$

$$\max : y = \left(3 - 2 \times \frac{-1}{3}\right) \left(\sin x + 2 \times \frac{-1}{3}\right) = 16$$

۲۹.

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c) \Rightarrow f(1) - f(0) = (1 - 0)f'(c)$$

$$\Rightarrow 2 + 1 = 2c + 2 \Rightarrow c = \frac{1}{2} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

۳۰.

$$\frac{f(3) - f(1)}{g(3) - g(1)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \Rightarrow \frac{9 - 1}{5 - 1} = \frac{2c}{2} \Rightarrow c = 2$$

۳۱. اولاً: تابع f بر $[1, 4]$ پیوسته و بر $(1, 4)$ مشتق‌پذیر است. ثانیاً: $f(1) = -2$ و $f(4) = 8$ بنابراین

$f(1) \cdot f(4) < 0$. ثالثاً: f' یعنی $2x - 1$ در بین ۱ و ۴ هرگز صفر نمی‌شود. در نتیجه معادله دقیقاً یک ریشه حقیقی دارد.

۳۲.

$$dy = -\frac{2}{x^2} dx = -\frac{2}{1^2} \cdot (0, 1) = -0,2$$

۳۳.

$$xy^2 + x^2y = 0 \Rightarrow y^2 dx + 2xy dy + 2xy dx + x^2 dy = 0$$

$$\Rightarrow (2xy + x^2) dy = -(2xy + y^2) dx \Rightarrow dy = -\frac{2xy + y^2}{2xy + x^2} dx$$

۳۴.

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = f(3 + 0,1) - f(3) = 0,61$$

$$dy = 2x dx = 2(3) \cdot (0,1) = 0,6$$

۳۵

$$f(x) = \sqrt{x}, f(x + \Delta x) = \sqrt{x + \Delta x} \Rightarrow f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x) \cdot \Delta x$$

$$\Rightarrow \sqrt{x + \Delta x} \approx x + \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \Delta x \xrightarrow{x=25, \Delta x=1} \sqrt{26} \approx \sqrt{25} + \frac{1}{2\sqrt{25}} \times 1$$

$$= 5 + \frac{1}{10} \Rightarrow \sqrt{26} \approx \frac{51}{10}$$

۳۶. داریم $x = 10$ و $\Delta x = 0.2$ ، دیفرانسیل y را محاسبه می‌کنیم.

خطای مطلق تقریبی $dy = (2x + 2)dx \Rightarrow dy = (2 \times 10 + 2) \times 0.2 = 4.4$

خطای نسبی تقریبی $\frac{dy}{y} = \frac{4.4}{121} = 0.036$

سؤالات تستی فصل ۵

۱- مشتق تابع $y = (x^2 + 1)(x^2 + 1)(x + 1)(x - 1)$ کدام است؟

۱۶x¹⁰ (۴) ۱۶x⁸ (۳) ۸x⁷ (۲) ۷x⁴ (۱)

۲- مشتق تابع $f(x) = x(1-x)(2-x) \dots (10-x)$ در نقطه $x = 0$ کدام است؟

۱ (۴) ۱۰! (۳) ۲۰! (۲) ۰ (۱)

۳- اگر مقدار مشتق تابع $f(x) = \sqrt{x+m}$ به‌ازاء $x = 1$ برابر $1/2$ باشد، مقدار m کدام است؟

۰ (۴) ۲ (۳) $\frac{1}{2}$ (۲) ۱ (۱)

۴- در تابع $f(x) = \text{Arc tan}(\cos x/2)$ ، $f'(60^\circ)$ کدام است؟

-۷ (۴) ۷ (۳) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (۲) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ (۱)

۵- در تابع $f(x) = \log(\sqrt{x^2+4} - x)$ و $g(x) = \log(\sqrt{x^2+4} + x)$ مفروضند، کدام‌یک از روابط زیر بین مشتقات آن همواره برقرار است؟

$f'(x) \cdot g'(x) = 0$ (۴) $f'(x) + g'(x) = \log 4$ (۳) $f'(x) = g'(x)$ (۲) $f'(x) = -g'(x)$ (۱)

۶- اگر $y = \sqrt{u}$ و $u = v^2$ و $v = x^{-2}$ باشد، y'_x کدام است؟

$2x^{-2}$ (۴) $-2x^{-2}$ (۳) $-2x^2$ (۲) $2x^2$ (۱)

۷- اگر $m \neq 0$ و $g(x) = f(mx)$ ، $g'(0) = 2$ باشد، $f'(0)$ برابر است با:

m^{-2} (۴) $\frac{m}{2}$ (۳) $2m$ (۲) $\frac{2}{m}$ (۱)

۸- در تابع f اگر $f'(-1) = 2$ باشد، مقدار مشتق تابع با ضابطه $y = f(2/x)$ در $x = -2$ برابر است با:

$-\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{1}{2}$ (۳) -1 (۲) 1 (۱)

۹- مشتق تابع $f(x) = \begin{cases} 3x & x \geq 0 \\ 2x^2 - x & x < 0 \end{cases}$ در نقطه $x = 0$ کدام است؟

هیچ‌کدام (۴) صفر (۳) ۳ (۲) -1 (۱)

۱۰- اگر $f(0) = 0$ و $f(x) = \sin(4x - f(x))$ ، آنگاه مقدار $f'(0)$ کدام است؟

$$\begin{array}{cccc} 2(1) & -2(2) & \frac{1}{2}(3) & -\frac{1}{2}(4) \end{array}$$

۱۱- تابع f با ضابطه $y = \sin \alpha - 2 \cos \alpha$ مفروض است. حاصل $y'' + y'^2$ برابر است با:

$$\begin{array}{cccc} 2(1) & 1(2) & 5(3) & 4(4) \end{array}$$

۱۲- اگر مشتق تابع $f(x)$ برابر $5x - 2$ باشد، مشتق تابع $f(x^2)$ کدام است؟

$$\begin{array}{cccc} 5x^2 - 5(1) & 10x^2 - 2x(2) & 10x^2 - 4(3) & 5x^2 - 5(4) \end{array}$$

۱۳- با فرض $f(x) = x - [x]$ ، مقدار $f'_+(2)$ برابر است با:

$$\begin{array}{cccc} 0(1) & 1(2) & (3) \text{ وجود ندارد} & (4) \text{ هیچ کدام} \end{array}$$

۱۴- اگر $y = \ln(\text{Arc tan } x)$ باشد، dy/dx در نقطه $x = 1$ کدام است؟

$$\begin{array}{cccc} \frac{\pi}{2}(1) & \frac{2}{\pi}(2) & \pi(3) & 0(4) \end{array}$$

۱۵- اگر $xy = 1$ باشد، آنگاه $d^2y/dx^2 \cdot d^2x/dy^2$ برابر است با:

$$\begin{array}{cccc} 1(1) & 4(2) & \frac{1}{4}(3) & 4xy(4) \end{array}$$

۱۶- در معادله $e^y - xe^x = 0$ ، d^2y/dx^2 کدام است؟

$$\begin{array}{cccc} -x^{-2}(1) & -x^2(2) & y^{-2}(3) & -\frac{1}{y^2}(4) \end{array}$$

۱۷- اگر $h(x) = (f \circ g)(x)$ و $h(x) = x^2 - 4x + 5$ و $g(x) = x^2$ و $f'(2) = -1/2$ باشد، مقدار $h'(2)$ کدام است؟

$$\begin{array}{cccc} 1(1) & \frac{1}{2}(2) & 2(3) & -1(4) \end{array}$$

۱۸- اگر $f(x) = (|x+1| - |x|)^2$ باشد، $f'(a)$ برابر است با:

$$\begin{array}{cccc} 0(1) & 1(2) & 2(3) & (4) \text{ هیچ کدام} \end{array}$$

۱۹- مشتق تابع $y = 5 \sin^2 x / 15 + 3 \sin^4 x / 15$ برابر است با:

$$\begin{array}{cccc} \sin h^2 \frac{x}{15} \cdot \cos h^2 \frac{x}{15}(1) & \sin h^2 \frac{x}{15} \cdot \cos h^2 \frac{x}{15}(2) & \sin h^2 \frac{x}{15} \cdot \cos h^2 \frac{x}{15}(3) & \sin h^2 \frac{x}{15} \cdot \cos h^2 \frac{x}{15}(4) \end{array}$$

۲۰- مشتق تابع $f(x) = \sin(\cos^2 x) \cdot \cos(\sin^2 x)$ برابر است با:

$$\begin{array}{cccc} \cos^2 x \sin(\sin^2 x)(1) & \cos^2 x \sin(\sin^2 x)(2) & -\sin(\cos^2 x)(3) & -\sin^2 x \cos(\cos^2 x)(4) \end{array}$$

۲۱- مشتق تابع $y = e^x \text{Arc tan } e^x - \ln \sqrt{1 + e^{2x}}$ برابر است با:

$$\begin{array}{cccc} \frac{e^{2x}}{1 + e^{2x}}(1) & e^x \tan e^x(2) & \text{Arc tan } e^x(3) & e^x \text{Arc tan } e^x(4) \end{array}$$

۲۲- اگر $f(x) = x^2$ باشد مشتق تابع $f \circ f \circ f(x)$ کدام است؟

$$\begin{array}{cccc} 7x^4(1) & 8x^2(2) & 16x^{15}(3) & x^{-2}(4) \end{array}$$

۲۳- مشتق $y = \text{Arc sin } x^2$ نسبت به متغیر $\sqrt{x}$ کدام است؟

$$\begin{array}{cccc} \frac{x^2 \sqrt{x}}{\sqrt{1-x^2}}(1) & \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^2}}(2) & \frac{2x\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^2}}(3) & 2x\sqrt{x}(4) \end{array}$$

۲۴- در رابطه $\sin(xy) + \cos(xy) + 1 = 0$ ، x'_y برابر است با:

$$\begin{array}{cccc} \frac{x}{y}(1) & -\frac{x}{y}(2) & -\frac{y}{x}(3) & \frac{y}{x}(4) \end{array}$$

۲۵- مقدار مشتق تابع $y = \sin x \cos x \cos 2x$ به ازاء $x = \pi/8$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) ۰

۲۶- مشتق مرتبه n ام تابع $y = e^{rx}$ در نقطه $x = 0$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) r^n (۳) e^n (۴) r

۲۷- مقدار مشتق $f(x) = x(x+1)(x+2) \cdots (x+20)$ در نقطه $x = -10$ برابر است با:

- (۱) $10!$ (۲) $10!10!$ (۳) $100!$ (۴) 1

۲۸- در تابع $x^2 + y^2 = 1$ و d^2y/dx^2 کدام است؟

- (۱) $-\frac{x^2}{y^3}$ (۲) $-\frac{2x}{y^3}$ (۳) $\frac{2x}{y^3}$ (۴) $\frac{x^2}{y^3}$

۲۹- اگر $y = \sin^2 t$ و $x = \cos^2 t$ باشد، d^2y/dx^2 برابر است با:

- (۱) -1 (۲) ۰ (۳) ۱ (۴) ۲

۳۰- مشتق تابع $f(x) = e^{x^2-1} + e^{x^2-1} + e^{x^2-1} + e^{x^2-1}$ در $x = 1$ کدام است؟

- (۱) $10e$ (۲) $10e^2$ (۳) ۴ (۴) ۸

۳۱- در تابع $y = \cos x$ ، dy/dx برابر است با:

- (۱) $-\tan x$ (۲) $\tan x$ (۳) $\cot x$ (۴) $-\cot x$

۳۲- مشتق مرتبه پنجم تابع $y = 1/(x+1)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{120}{(x+1)^6}$ (۲) $\frac{-120}{(x+1)^6}$ (۳) $\frac{-120}{(x+1)^{-6}}$ (۴) $\frac{120}{(x+1)^{-6}}$

۳۳- مشتق تابع $f(x) = \ln \left\{ e^x \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^{1/2} \right\}$ در نقطه $x = 0$ کدام است؟

- (۱) ۰ (۲) ۱ (۳) -1 (۴) نامعین

۳۴- مشتق مرتبه بیستم تابع $y = \sin 5x \cdot \cos 2x$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{2} [2^{20} (\sin 5x) + 3^{20} (\sin 2x)]$ (۲) $\frac{1}{2} [2^{20} (\sin 5x) - 3^{20} (\sin 2x)]$
(۳) $\frac{1}{2} [2^{20} (\sin 5x) + 3^{20} (\sin 2x)]$ (۴) $2^{20} (\sin 5x) + 3^{20} (\sin 2x)$

۳۵- اگر $y = e^u \ln u$ و $u = (1-t)/(1+t)$ باشد، dy/dx به ازای $x = 0$ کدام است؟

- (۱) $2e$ (۲) $2e^{-1}$ (۳) $-2e$ (۴) $-2e^{-1}$

۳۶- اگر $f(x) = \begin{cases} 2x+5 & x \leq 3 \\ 2x+2 & x > 3 \end{cases}$ باشد، کدام رابطه نادرست است؟

- (۱) $f'(3) = 2$ (۲) $f'_+(3) = 3$ (۳) $f'_-(3) = 2$ (۴) $f(3) = 11$

۳۷- مشتق $f(x) = \sin^m x \cdot \cos mx$ کدام است؟

- (۱) $m(\sin x)^{m-1} \cdot \cos(m-1)x$ (۲) $m \sin x \cdot \cos^{m-1} x$
(۳) $m(\sin x)^{m-1} \cdot \cos x$ (۴) $m(\sin x)^{m-1} \cdot \cos(m+1)x$

۳۸- اگر $f(a) = 1/2$ و $f'(a) = 2$ ، مشتق تابع $f^2(x) + 1/f(x)$ در نقطه $x = a$ کدام است؟

- (۱) -6 (۲) 6 (۳) $\frac{1}{6}$ (۴) $-\frac{1}{6}$

۳۹- رابطه $x^5 + y^4 + x^2y = 1$ را به طور ضمنی بر حسب y بیان می‌کند، $x'_{(0)}$ برابر است با:

- (۱) $\frac{1}{5}$ (۲) $-\frac{1}{5}$ (۳) 0 (۴) -5

۴۰- اگر $f(x) = |x|^3$ باشد، دامنه تعریف $f'(x)$ کدام است؟

- (۱) $\mathbb{R}$ (۲) $\mathbb{R}^+$ (۳) $\mathbb{R} - \{0\}$ (۴) $\mathbb{Z}$

۴۱- تابع f با ضابطه $f(x) = x^2|x|$ در $x = 0$:

- (۱) مشتق اول دارد ولی مشتق دوم ندارد.
(۲) مشتق دوم دارد ولی مشتق اول ندارد.
(۳) مشتق اول و دوم ندارد.
(۴) مشتق اول و دوم دارد.

۴۲- اگر $f(x) = \operatorname{sgn} x$ ، مقدار $f'_-(0)$ برابر است با:

$$f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

- (۱) $-\infty$ (۲) $+\infty$ (۳) 0 (۴) وجود ندارد

۴۳- مشتق تابع $f(x) = \operatorname{Arctan}(\tan x)$ در فاصله $\pi/2 < x < 3\pi/2$ کدام است؟

- (۱) 1 (۲) -1 (۳) 0 (۴) وجود ندارد

۴۴- اگر $f(x) = \log_3 x$ ، آنگاه $f''(1)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{\ln 3}$ (۲) $\ln 3$ (۳) $-\ln 3$ (۴) $-\frac{1}{\ln 3}$

۴۵- مشتق تابع با ضابطه $y = \cos h^2 x + \sin h^2 x$ برابر است با:

- (۱) $2 \sin h x$ (۲) $\sin h 2x$ (۳) $2 \sin h^2 x$ (۴) $2 \sin h^2 x$

۴۶- مشتق مرتبه دوم تابع $f(x) = 2xe^x$ به ازای $x = 0$ برابر است با:

- (۱) 2 (۲) 0 (۳) 4 (۴) 1

۴۷- اگر $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(t - \cos t) \end{cases}$ ، dy/dx کدام است؟

- (۱) $\tan \frac{t}{2}$ (۲) $-\tan \frac{t}{2}$ (۳) $\cot \frac{t}{2}$ (۴) $-\cot \frac{t}{2}$

۴۸- مشتق مرتبه m ام تابع $y = e^{a+bx}$ کدام است؟

- (۱) $e^{n(a+bx)}$ (۲) $b^n e^{a+bx}$ (۳) $e^{(a+bx)^n}$ (۴) $b^{n-1} e^{a+bx}$

۴۹- مشتق مرتبه پنجم تابع $y = 3^{2x}$ کدام است؟

- (۱) $(2 \ln 3)^5 3^{2x}$ (۲) $(2 \ln 3)^2 3^{2x}$ (۳) $(2 \ln 3 \times 3^{2x})^5$ (۴) $22 \ln 3 \times 3^{2x}$

۵۰- مشتق تابع $y = e^{x^x}$ در نقطه $x = 1$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) 1 (۳) e (۴) $\frac{1}{e}$

۵۱- اگر $\ln(x+y) = \tan^{-1}(x/y)$ باشد، dy/dx برابر است با:

$$\frac{xy-x^2}{yx^2+xy+y^2} \quad (۴) \quad \frac{xy-x^2}{yx^2-xy-y^2} \quad (۳) \quad \frac{x^2-xy}{yx^2-xy-y^2} \quad (۲) \quad \frac{x^2-xy}{yx^2+xy+y^2} \quad (۱)$$

۵۲- مشتق چپ تابع $f(x) = |2x+1| - |x-1|$ ، $\forall x \in \mathbb{R}$ در نقطه $x = -1/2$ کدام است؟

$$\frac{1}{2} \quad (۴) \quad -1 \quad (۳) \quad 0 \quad (۲) \quad 1 \quad (۱)$$

۵۳- اگر $x > 0$ ، $f(x) = x^{\sin hx}$ ، آنگاه $f'(x)$ برابر است با:

$$x^{\sin hx-1}(x \cos hx \ln x + \sin hx) \quad (۲) \quad x^{\sin hx}(x \cos hx \ln x + \sin hx) \quad (۱) \\ x^{\sin hx-1}(\cos hx \ln x + \sin hx) \quad (۴) \quad x^{\sin hx}(\cos hx \ln x + x \sin hx) \quad (۳)$$

۵۴- اگر $y = \cos h(\ln x) + \sin h(\ln x)$ باشد، d^2y/dx^2 برابر است با:

$$-\frac{1}{x} \cos h(\ln x) \quad (۴) \quad \frac{1}{x} \sin h(\ln x) \quad (۳) \quad 1 \quad (۲) \quad \text{صفر} \quad (۱)$$

۵۵- اگر $y = x \cos h^{-1}x - \sqrt{x^2-1}$ ، آنگاه dy/dx برابر است با:

$$-\cos h^{-1}x \quad (۴) \quad \cos h^{-1}x \quad (۳) \quad -\sin h^{-1}x \quad (۲) \quad \sin h^{-1}x \quad (۱)$$

۵۶- فرض کنید اگر $x \neq 0$ ، $f(x) = \frac{1}{1+1/x}$ و $g(x) = \frac{1}{1+1/f(x)}$ باشد، $g'(x)$ کدام است؟

$$(x+1)^{-1} \quad (۴) \quad (2x+1)^{-2} \quad (۳) \quad \left(\frac{2x+1}{x+1}\right)^{-2} \quad (۲) \quad (x+1)^{-2} \quad (۱)$$

۵۷- مشتق تابع $f(x) = \begin{cases} x \cos x & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ در نقطه $x = 0$ برابر است با:

$$1 \quad (۱) \quad -1 \quad (۲) \quad 0 \quad (۳) \quad \text{مشتق وجود ندارد} \quad (۴)$$

۵۸- مشتق تابع $y = (\tan x)^{\cos x}$ در نقطه $x = \pi/4$ برابر است با:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (۱) \quad \sqrt{2} \quad (۲) \quad 0 \quad (۳) \quad 2 \quad (۴)$$

۵۹- توابع f و g مشتقپذیرند به طوری که $f(2) = 3$ و $f'(2) = -1$ و $g(2) = -5$ و $g'(2) = 2$ مقدار عددی $(g/f)'(2)$ کدام است؟

$$-\frac{3}{5} \quad (۱) \quad -\frac{6}{5} \quad (۲) \quad \text{صفر} \quad (۳) \quad \frac{1}{4} \quad (۴)$$

۶۰- اگر $y = \sqrt{\tan x + \sqrt{\tan x + \sqrt{\tan x + \dots}}}$ باشد، dy/dx برابر است با:

$$\tan x \quad (۱) \quad 1 + \tan^2 x \quad (۲) \quad -\frac{1 + \tan^2 x}{2y - 1} \quad (۳) \quad \frac{1 + \tan^2 x}{2y - 1} \quad (۴)$$

۶۱- مشتق تابع $f(x) = [x] \cos^2 \pi x$ کدام است؟ ($x \notin \mathbb{Z}$)

$$-\pi[x] \sin \pi x \quad (۱) \quad -2\pi[x] \sin \pi x \quad (۲) \quad -\pi[x] \sin 2\pi x \quad (۳) \quad \text{هیچکدام} \quad (۴)$$

۶۲- مشتق تابع $f(x) = \sin \cos \sin x$ برابر است با:

$$-\cos x(\sin \sin x)(\cos \cos \sin x) \quad (۱) \quad \cos x(\sin \sin x)(\cos \cos \sin x) \quad (۲) \\ -\sin x(\cos \cos x)(\sin \sin \cos x) \quad (۳) \quad -\cos x(\sin \sin \sin x)(\cos \cos x) \quad (۴)$$

۶۳- تابع f به معادله $|f(x) - 2x + 3| = x^2$ در $x = 1$:

(۱) مشتقپذیر است.

(۲) فقط مشتق راست دارد.

(۳) فقط مشتق چپ دارد.

(۴) مشتق راست و چپ دارد ولی مساوی نیستند.

۶۴- تابع f به معادله
$$f(x) = \begin{cases} x \cos 1/x & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$
 در $x=0$:

(۱) مشتق پذیر است. (۲) نه مشتق راست دارد و نه مشتق چپ. (۳) فقط مشتق راست دارد. (۴) فقط مشتق چپ دارد.

۶۵- اگر f تابعی یک جمله‌ای و داشته باشیم $f''(x) = f'(x) \cdot f(x)$ ، آنگاه $f'(x)$ برابر است با:

(۱) $3x^2$ (۲) $\frac{1}{3}x^2$ (۳) $\frac{1}{6}x^2$ (۴) $\frac{1}{3}x^2$

۶۶- مشتق مرتبه سوم در تابع به معادله $y = (x^2 - 4x)/(x - 2)^2$ کدام است؟

(۱) $\frac{96}{(x-2)^4}$ (۲) $\frac{96}{(x-2)^5}$ (۳) $\frac{96}{(x-2)^6}$ (۴) $\frac{96}{(x-2)^8}$

۶۷- اگر $f(x) = 4x^2 - 1$ و $g(x) = x - 1$ باشد، $(fog)'(x)$ کدام است؟

(۱) $x - 1$ (۲) $4(x - 1)$ (۳) $8(x + 1)$ (۴) $x + 1$

۶۸- اگر تابع $x = e^{-y^2+2y+2}$ مفروض باشد، dy/dx برابر است با:

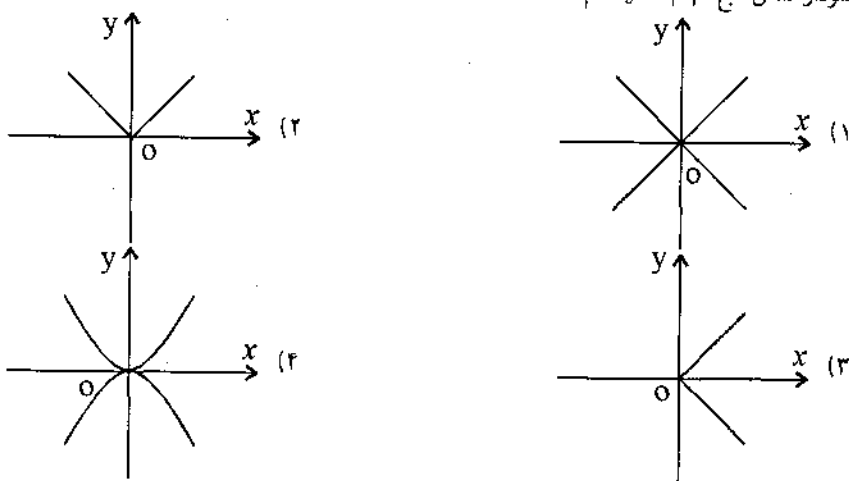
(۱) $(-2y + 4)e^{-y^2+2y+2}$ (۲) $\frac{e^{y^2-2y-2}}{4-2y}$ (۳) $\frac{e^{-y^2+2y+2}}{4-2y}$ (۴) $\frac{4-2y}{e^{-y^2+2y+2}}$

۶۹- $f''(m)$ برابر است با:

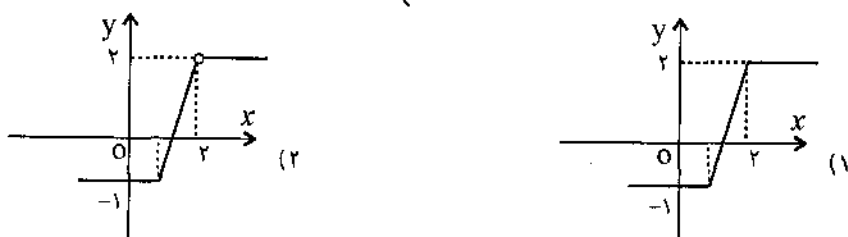
(۱) $\lim_{m \rightarrow 0} \frac{f'(m) - f'(0)}{m}$ (۲) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(m+h) - f'(m)}{h}$

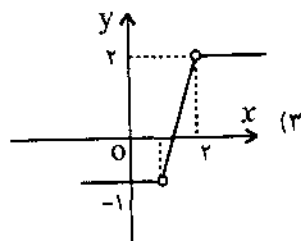
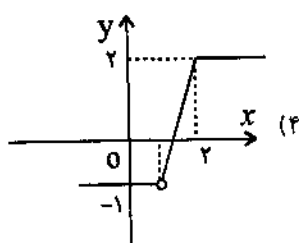
(۳) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f''(h) - f''(0)}{h}$ (۴) $\lim_{m \rightarrow 0} \frac{f''(m) - f''(0)}{m}$

۷۰- نمودار مشتق تابع $y = |x|x$ کدام است؟



۷۱- نمودار مشتق تابع $f(x) = \begin{cases} 1-x & x < 1 \\ (1-x)(2-x) & 1 \leq x \leq 2 \\ x-2 & x > 2 \end{cases}$ کدام است؟





۷۲- اگر $f(x) = \tan^{\circ} x$ ، آنگاه $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\pi/2 + 2h) - f(\pi/2 - 2h)}{h}$ برابر است با:

- ۵۰ (۱) ۱۰۰ (۲) ۲۵ (۳) ۱۰ (۴)

۷۳- اگر حد عبارت $\frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$ وقتی $x \rightarrow 2$ برابر $3/2$ باشد، $[f(1/x)]$ در $x = 1/2$ کدام است؟

- ۶ (۱) -۶ (۲) -۳ (۳) ۳ (۴)

۷۴- در تابع به معادله $f(x) = \begin{cases} 9 - x^2 & x \geq 2 \\ x^2 - 9 & x < 2 \end{cases}$ برابر است با:

- ۶ (۱) -۶ (۲) ۸ (۳) -۸ (۴)

۷۵- تابع به معادله $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq m \\ ax + b & x \geq m \end{cases}$ به ازای چه مقادیری از a و b در نقطه $x = m$ پیوسته و مشتق پذیر است؟

- $b = m^2, a = 2m$ (۱) $b = m^2, a = m$ (۲)
 $b = -m^2, a = 2m$ (۳) $b = -m^2, a = m$ (۴)

۷۶- در تابع به معادله $f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 1 \\ ax + b & x \geq 1 \end{cases}$ و a, b چه قدر باشند تا $f'(1)$ وجود داشته باشد؟

- $a = b = 1$ (۱) $a = b = 2$ (۲) $b = -1, a = 2$ (۳) $b = 1, a = -2$ (۴)

۷۷- تابع f به معادله $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x^2 + a & x \geq 0 \\ bx^2 + cx - 1 & x < 0 \end{cases}$ مفروض است. اگر $f''(0)$ وجود داشته باشد، $a + b + c$ چه قدر است؟

- ۳ (۱) -۳ (۲) ۴ (۳) -۴ (۴)

۷۸- معادله خط قائم بر منحنی $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 1 & x \geq 0 \\ 4x & x < 0 \end{cases}$ در نقطه $(1, 3)$ کدام است؟

- $y = -\frac{1}{4}x + \frac{13}{4}$ (۴) $y = 4x - 4$ (۳) $y = -2x + 3$ (۲) $y = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$ (۱)

۷۹- اگر مماس بر منحنی نمایش تابع $y = mx^2 - 2x^2 + x$ در نقطه $x = 2$ از منحنی عبور کند، m چه قدر است؟

- $-\frac{1}{4}$ (۱) ۲ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) -۲ (۴)

۸۰- معادله خط مماس بر منحنی $(y - x)^2 = 2x + 2$ در نقطه $A(6, 2)$ کدام است؟

- $4y + 3x - 10 = 0$ (۲) $4y - 3x + 10 = 0$ (۱)
 $4y + 3x + 10 = 0$ (۴) $4y - 3x - 10 = 0$ (۳)

۸۱- مماس بر منحنی $y = \ln(x - 1)$ در نقطه $x = 2$ محور عرض ها را در چه عرضی قطع می کند؟

- ۲ (۱) ۱ (۲) -۲ (۳) -۱ (۴)

۸۲- معادله خط قائم بر منحنی $y = 3 \cos x + 2 \sin x$ در نقطه $(0, 3)$ کدام است؟

$y = \frac{1}{3}x + 3$ (۴)
 $y = -2x + 3$ (۳)
 $y = -\frac{1}{3}x + 3$ (۲)
 $y = 2x + 3$ (۱)

۸۳- ضریب زاویه خط قائم بر منحنی تابع $\begin{cases} x = 1 - 2 \sin \theta \\ y = \cos \theta - 2 \end{cases}$ در نقطه‌ای که $\theta = \pi/4$ می‌باشد، کدام است؟

-2 (۴)
 -1 (۳)
 $\frac{1}{3}$ (۲)
 2 (۱)

۸۴- معادله خط مماس بر تابع $y = \cos hx$ در نقطه $x = 0$ کدام است؟

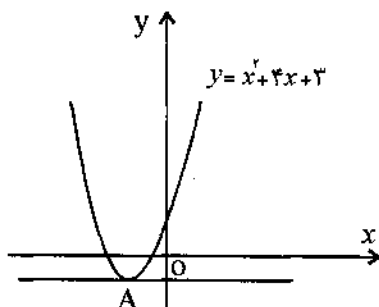
$x = -1$ (۴)
 $y = -1$ (۳)
 $y = 1$ (۲)
 $x = 1$ (۱)

۸۵- معادله خط قائم بر منحنی به معادله $4(y-2)^2 + (x-1)^2 = 37$ در نقطه تلاقی آن با محور عرض‌ها (آنکه عرضش مثبت است) کدام است؟

$y = -\frac{1}{13}x + 5$ (۴)
 $y = -12x + 5$ (۳)
 $y = \frac{1}{13}x + 5$ (۲)
 $y = 12x + 5$ (۱)

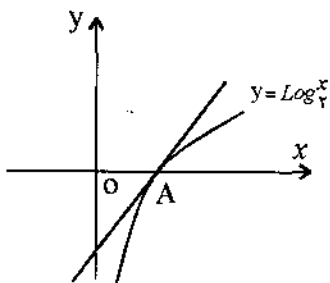
۸۶- از نقطه عطف منحنی تابع $y = x^3 - 3x^2 + 5x - 1$ مماسی بر این منحنی رسم کرده‌ایم، معادله این مماس کدام است؟

$y = -\frac{1}{3}x$ (۴)
 $y = \frac{1}{3}x$ (۳)
 $y = -2x$ (۲)
 $y = 2x$ (۱)



۸۷- با توجه به شکل مقابل، معادله خط مماس در نقطه A کدام است؟

$x = -3$ (۱)
 $x = -1$ (۲)
 $x = -\frac{1}{3}$ (۳)
 $x = -2$ (۴)



۸۸- معادله خط مماس در نقطه A، در شکل مقابل کدام است؟

$y = \frac{x-1}{\ln 2}$ (۱)
 $y = \frac{x+1}{\ln 2}$ (۲)
 $y = \frac{1}{\ln 2}x - 2$ (۳)
 $y = x \ln 2 - 1$ (۴)

۸۹- معادله خط مماس بر منحنی تابع $y = \tan^{-1} x$ در نقطه $x = 0$ کدام است؟

$y = 0$ (۴)
 $y = x$ (۳)
 $y = x + 1$ (۲)
 $y = -x$ (۱)

۹۰- در کدام فاصله تابع با ضابطه $y = x + 1 + 4/x^2$ صعودی است؟

$(-\infty, +\infty)$ (۴)
 $(-\infty, 0) \cup [2, +\infty)$ (۳)
 $[0, +\infty)$ (۲)
 $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$ (۱)

۹۱- منحنی نمایش تابع $y = x^3 - 3x^2$ در نزدیکی نقطه $x = 1$ و بازای مقادیر کمتر و بیشتر از آن به ترتیب:

(۱) صعودی و نزولی است. (۲) نزولی و صعودی است. (۳) صعودی و صعودی است. (۴) نزولی و نزولی است.

۹۲- نمودار تابع $y = 2^{x-1}$:

(۱) همواره صعودی است.

(۲) همواره نزولی است.

(۳) برای $x > 1$ صعودی و برای $x < 1$ نزولی است.

(۴) برای $x > 1$ نزولی و برای $x < 1$ صعودی است.

۹۳- به ازای کدام مقدارهای a ، تابع $y = x - 2a/x + 8a$ همواره نزولی است؟

(۱) $a < 0$ (۲) $a < 2$ (۳) $a > 0$ (۴) $0 < a < 2$

۹۴- مجموع طول‌های ماکزیم و می‌نیم تابع $y = mx^2 - 3x^2 - x$ به ازای کدام مقدار m برابر یک می‌شود؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) -۱ (۴) -۲

۹۵- تابع $y = ax^2 + 6x$ مفروض است a را چنان بیابید که تابع دارای ماکزیمی برابر ۳ باشد.

(۱) $a = 3$ (۲) $a = \frac{1}{3}$ (۳) $a = -\frac{1}{3}$ (۴) $a = -3$

۹۶- طول نقطه می‌نیم تابع $y = x \ln^2 x$ برابر است با:

(۱) $e^{-1/2}$ (۲) ۱ (۳) $e^{1/2}$ (۴) -۱

۹۷- اگر $y = x^2 e^{-x}$ باشد، کدام یک از عبارات‌های زیر بیانگر مختصات و نوع نقطه بحرانی آن است؟

(۱) $\min(2, 4e^{-2})$ (۲) $\max(2, 4e^{-2})$ (۳) $\min(0, 1)$ (۴) موارد ۲ و ۳ صحیح است.

۹۸- طول نقطه اکسترم تابع $f(x) = 9/x + x^2/9$ کدام است؟

(۱) $\max: x = \frac{3\sqrt{12}}{2}$ (۲) $\min: x = \frac{3\sqrt{12}}{2}$ (۳) $\min: x = 3\sqrt{12}$ (۴) $\max: x = 3\sqrt{12}$

۹۹- مختصات اکسترم تابع $y = 2xe^x$ کدام است؟

(۱) $\max\left(-1, -\frac{2}{e}\right)$ (۲) $\min\left(-1, -\frac{2}{e}\right)$ (۳) $\max(0, e)$ (۴) $\min(0, e)$

۱۰۰- مختصات ماکزیم یا می‌نیم تابع $y = -x/(x^2 - 1)$ کدام است؟

(۱) $\max\left(\frac{\sqrt{2}}{3}, \sqrt{3}\right)$ (۲) $\min\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ (۳) $\max\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ (۴) $\max$ یا $\min$ ندارد.

۱۰۱- به ازای کدام مقدار m تابع $f(x) = x/(x^2 + m)$ در نقطه $x_0 = \sqrt{2}$ دارای اکسترم نسبی است؟

(۱) ۱ (۲) -۲ (۳) ۲ (۴) به ازای جميع مقادیر m

۱۰۲- نقطه $x = 3$ در تابع $y = (x - 3)^2(x - 4)^2$ کدام است؟

(۱) ماکزیم (۲) عطف (۳) می‌نیم (۴) هیچ کدام

۱۰۳- به ازای کدام مقدار m مجموع مجذورات ریشه‌های معادله $x^3 - (m - 2)x - m - 1 = 0$ می‌نیم است؟

(۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۲ (۴) -۲

۱۰۴- تابع $f(x) = 2x^2 - 3(m + n)x^2 + 6mnx$ چند اکسترم دارد؟ ($m = n$)

(۱) یک (۲) دو (۳) سه (۴) ندارد

۱۰۵- معادله خطی که از نقاط اکسترم تابع $y = x^2 - 3x + 1$ می‌گذرد، کدام است؟

(۱) $y = -2x - 1$ (۲) $y = 2x - 1$ (۳) $y = -2x + 1$ (۴) $y = 2x + 1$

۱۰۶- تابع $f(x) = |x^2 - 1|$ بر بازه $[-2, 2]$:

(۱) مشتق‌پذیر است و می‌نیم مطلق ندارد.

(۲) مشتق‌پذیر است و می‌نیم مطلق دارد.

(۳) مشتق‌پذیر نیست ولی می‌نیم مطلق دارد.

(۴) مشتق‌پذیر نیست و می‌نیم مطلق ندارد.

۱۰۷- نقاط بحرانی تابع $f(x) = 4/x + x/4$ کدام است؟

(۱) $\max(4, 2), \min(-4, -2)$

(۲) $\max(-4, -2), \min(4, 2)$

(۳) $\max(-4, -2), \min(-4, 2)$

(۴) $\max(-4, 2), \min(-4, -2)$

۱۰۸- می‌نیم مطلق تابع با ضابطه $f(x) = x^3 - 8x^2 + 16x$ در بازه $[-1, 4]$ کدام است؟

(۱) ۰

(۲) -۲

(۳) ۹

(۴) ۱۶

۱۰۹- تابع به معادله $f(x) = ||x| - 1|$ چند نقطه بحرانی دارد؟

(۱) ۰

(۲) ۱

(۳) ۲

(۴) ۳

۱۱۰- نقطه بحرانی در تابع $y = \cos hx$ کدام است؟

(۱) $\max(0, 1)$

(۲) $\min(0, 1)$

(۳) $\max(1, 0)$

(۴) $\min(1, 0)$

۱۱۱- در تابع $y = x^2 - 4x^2 + 1$ نقطه $(2, -6)$:

(۱) ماکزیم است

(۲) می‌نیم است

(۳) عطف است

(۴) هیچ‌کدام

۱۱۲- منحنی تابع $y = \sin hx$:

(۱) فاقد نقاط ماکزیم و عطف است.

(۲) فاقد نقاط می‌نیم و عطف است.

(۳) در مبدأ دارای نقطه عطف است.

(۴) دارای نقاط ماکزیم و می‌نیم است.

۱۱۳- حداکثر مقدار تابع $f(x) = 2^x$ در فاصله $[0, 5]$ کدام است؟

(۱) $\ln 2$

(۲) ۱

(۳) ۱۶

(۴) ۳۲

۱۱۴- منحنی تابع $y = x^{-1} + \ln x$:

(۱) یک نقطه ماکزیم دارد. (۲) یک نقطه می‌نیم دارد. (۳) یک نقطه عطف دارد. (۴) هیچ‌کدام

۱۱۵- نقطه عطف منحنی $y = \ln x - (x - 1) + (x - 1)^2/2$ کدام است؟

(۱) $(1, 1)$

(۲) $(1, 0)$

(۳) $(0, 1)$

(۴) $(1, -1)$

۱۱۶- در تابع با ضابطه $y = |x|(x + 1) + 3x$ مبدأ مختصات:

(۱) نقطه عادی است.

(۲) نقطه اکسترم است.

(۳) نقطه عطف است.

(۴) هیچ‌کدام

۱۱۷- به ازای چه مقداری از α مجموع ریشه‌های معادله $(1 + \alpha^2)x^2 - (2 + \alpha^2)x + (1 + 2\alpha^2) = 0$ ماکزیم است؟

(۱) صفر

(۲) ۱

(۳) ۲

(۴) $\frac{1}{2}$

۱۱۸- نقطه $x = 2$ در تابع $y = \sqrt[3]{x - 2}$ کدام است؟

(۱) اکسترم

(۲) عطف

(۳) میلا

(۴) بازگشت

۱۱۹- تابع $f(x) = x^{1/3} + 4x^{1/2}$ مفروض است، کدام گزاره نادرست است؟

(۱) تابع f در فاصله $0 < x < 1$ صعودی است.

(۲) تابع f در $x = 0$ ماکزیم نسبی دارد.

(۳) تابع f در $x = 0$ صعودی است.

(۴) تابع f در فاصله $x > 0$ صعودی است.

- ۱۲۰- تابع f به معادله $y = x^2 + 1$ از نظر تحدب و تقعر چگونه است؟
 (۱) ابتدا محدب و سپس مقعر (۲) ابتدا مقعر و سپس محدب (۳) همواره مقعر (۴) همواره محدب
- ۱۲۱- تابع $y = \cos^2 x - \cos x$ در فاصله $[0, 2\pi]$:
 (۱) یک max و دو min دارد. (۲) دو max و یک min دارد.
 (۳) یک max و یک min دارد. (۴) فقط دو max دارد.
- ۱۲۲- تابع $y = \sin x - \sin^2 x$ با شرط $0 \leq x \leq 2\pi$ کدام گزینه نادرست است؟
 (۱) دارای دو max و دو min است. (۲) در فاصله $(\pi, 3\pi/2)$ صعودی است.
 (۳) مقدار ماکزیمم تابع $1/4$ است. (۴) مقدار می‌نیمم تابع -2 است.
- ۱۲۳- در تابع $y = (x^2 - ax + 5)/(x^2 - ax + 5)$ مقدار a را چنان تعیین کنید که می‌نیمم تابع برابر با -9 باشد.
 (۱) ± 2 (۲) ± 1 (۳) ± 4 (۴) ± 3
- ۱۲۴- تابع به معادله $y = (x+1)/(x-1)$ در فاصله $[2, 3]$ چگونه است؟
 (۱) مقعر، صعودی (۲) مقعر، نزولی (۳) محدب، نزولی (۴) محدب، صعودی
- ۱۲۵- اگر $M(2, 1)$ نقطه ماکزیمم یا می‌نیمم منحنی تابع $y = x^2 - ax^2 + b - 2$ باشد، نقطه عطف منحنی c کدام است؟
 (۱) $\omega(1, 3)$ (۲) $\omega(1, -3)$ (۳) $\omega(-1, 3)$ (۴) $\omega(-1, -3)$
- ۱۲۶- در تابع $y = x^3 + px^2 + q$ مقادیر p و q را طوری بیابید که نقطه می‌نیمم تابع به طول 2 روی محور x' باشد.
 (۱) $q = -4, p = -3$ (۲) $q = 4, p = 3$ (۳) $q = 4, p = -3$ (۴) $q = -4, p = 3$
- ۱۲۷- اگر $f'(a) = f''(a) = 0$ باشد، آنگاه:
 (۱) تابع $y = f(x)$ در نقطه $x = a$ دارای ماکزیمم نسبی است.
 (۲) تابع $y = f(x)$ در نقطه $x = a$ دارای می‌نیمم نسبی است.
 (۳) تابع $y = f(x)$ در نقطه $x = a$ نه ماکزیمم و نه می‌نیمم دارد.
 (۴) نمی‌توان گفت که تابع در $x = a$ دقیقاً چه وضعیتی دارد.
- ۱۲۸- تابع $y = x^{2n}$ مفروض است که در آن n یک عدد صحیح و مثبت است، این تابع در $x = 0$:
 (۱) دارای یک ماکزیمم مطلق است. (۲) دارای یک می‌نیمم مطلق است.
 (۳) دارای یک ماکزیمم نسبی است. (۴) دارای نقطه عطف است.
- ۱۲۹- تابع $y = (x^2 + 3)/(ax + b)$ مفروض است، $a \neq 0$ این تابع:
 (۱) همواره دارای یک max و یک min است. (۲) min و max ندارد.
 (۳) فقط یک max دارد. (۴) فقط یک min دارد.
- ۱۳۰- منحنی تابع $y = x^3/3 - x^2 - 3x$ دارای چند مماس موازی محور x هاست؟
 (۱) هیچ (۲) یک (۳) دو (۴) سه
- ۱۳۱- نقطه بحرانی تابع $\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^2 + 2t \end{cases}$ کدام است؟
 (۱) $\min(1, -1)$ (۲) $\max(1, -1)$ (۳) $\min(-1, 1)$ (۴) $\max(-1, 1)$

۱۳۲- طول نقطه عطف در منحنی به معادله $\begin{cases} x = te^t \\ y = te^{-t} \end{cases}$ کدام است؟

- (۱) ۰ (۲) $2e^2$ (۳) $\sqrt{2}e\sqrt{2}$ (۴) $-e$

۱۳۳- نقطه بحرانی تابع $f(x) = e^x + e^{-x}$ کدام است؟

- (۱) $\max(0, 2)$ (۲) $\min(0, 2)$ (۳) $\max(0, 1)$ (۴) نقطه بحرانی ندارد.

۱۳۴- در تابع f داریم برای عدد حقیقی $f(a) = 4a$ و $f'(a) = 0$ و $f''(a) = 2$ ، برای این تابع کدام یک از احکام زیر صادق است؟

- (۱) تابع دارای ماکزیممی برابر ۴ است. (۲) نمودار تابع در نقطه به طول a بر محور x مماس است.
(۳) نمودار تابع در a دارای نقطه عطف است. (۴) تابع دارای می‌نیممی برابر $4a$ است.

۱۳۵- اگر سری تفرع منحنی نمایش تابع $y = mx^2 + x^2/2 + m$ در نقطه $x = 1/6$ عوض شود، m کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) -1 (۳) ۱ (۴) $-\frac{1}{4}$

۱۳۶- طول نقطه عطف تابع $y = x^2/2 - \ln x$ کدام است؟

- (۱) ۰ (۲) ۱ (۳) -1 (۴) هیچ کدام

۱۳۷- جهت تفرع و تحدب تابع $y = x^3 - x^2 - 9x + 9$ کدام یک از عبارت‌های زیر است؟

- (۱) تفرع f روی $(1/3, +\infty)$ به سوی پایین است. (۲) تفرع f روی $(-\infty, 1/3)$ به سوی پایین است.
(۳) تحدب f روی $(1/3, +\infty)$ به سوی بالاست. (۴) تحدب f روی $(-\infty, 1/3)$ به سوی پایین است.

۱۳۸- طول نقطه بحرانی تابع $f(x) = (x+3)/(x^2-9)$ کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) -3 (۳) $-3, 3$ (۴) هیچ کدام

۱۳۹- تابع $y = \sqrt{1+x^2}$ مفروض است، کدام گزاره درست است؟

- (۱) به ازای $x \in [0, +\infty)$ تفرع منحنی به سمت پایین است.
(۲) به ازای $x \in (-\infty, 0]$ تفرع منحنی به سمت پایین است.
(۳) به ازای $x \in (-\infty, +\infty)$ تفرع منحنی به سمت بالاست.
(۴) به ازای $x \in [-1, 1]$ تفرع منحنی به سمت پایین است.

۱۴۰- منحنی تابع $f(x) = \sin x$ در فاصله $[-2\pi, 2\pi]$ چند نقطه عطف دارد؟

- (۱) یک نقطه (۲) دو نقطه (۳) سه نقطه (۴) هیچ نقطه

۱۴۱- کم‌ترین مقدار تابع $f(x) = x^3 - 3x$ در فاصله $[-1/5, 2]$ کدام است؟

- (۱) $\frac{9}{8}$ (۲) -2 (۳) ۲ (۴) -3

۱۴۲- در تابع $f(x) = mx^3/3 - x^2 - 4x$ حدود m چگونه باشد تا تابع اکیداً نزولی گردد؟

- (۱) $m \leq -\frac{1}{4}$ (۲) $m < -\frac{1}{4}$ (۳) $-\frac{1}{4} \leq m < 0$ (۴) $-\frac{1}{4} < m < 0$

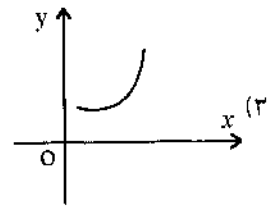
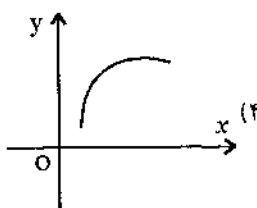
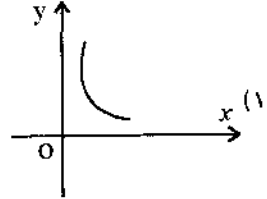
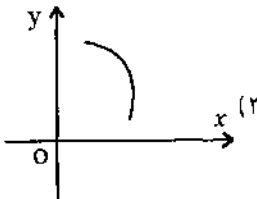
۱۴۳- تابع $f(x) = x^3 - 2x + 3$ در کدام فاصله اکیداً یکنوا می‌باشد؟

- (۱) $(-\infty, +\infty)$ (۲) $(-\infty, 1)$ (۳) $(-1, +\infty)$ (۴) $(-\infty, 2)$

۱۴۴- تابع $f(x) = (2x^2 + 4x + 3)e^{-2x}$ روی کدام فاصله نزولی است؟

- (۱) $(-\infty, +\infty)$ (۲) $(0, +\infty)$ (۳) $(-\infty, 0)$ (۴) هیچ کدام

۱۴۵- کدام نمودار در شرایط $f' < 0$ و $f'' < 0$ صدق می کند؟



۱۴۶- اگر $y^x = x^y$ باشد dy/dx در نقطه $(1, 1)$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۰ (۴) هیچ کدام

۱۴۷- مشتق مرتبه دوازدهم تابع $y = x \sin x$ به ازای $x = \pi$ کدام است؟

- (۱) -۱۲ (۲) ۱۲ (۳) $\pi - ۱۲$ (۴) $\pi + ۱۲$

۱۴۸- معادله مماس بر منحنی $y = x \ln x$ در نقطه $(1, 0)$ محور طول ها را در چه طولی قطع می کند؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۲ (۴) -۲

۱۴۹- نمودار تابع $y = x - 5x^2$ برای فاصله $x = -2/5$ تا $x = -3$ کدام است؟

- (۱) $۱۴/۲۵$ (۲) $-۱۴/۲۵$ (۳) $۲۵/۱۴$ (۴) $-۲۵/۱۴$

۱۵۰- نرخ متوسط تغییرات تابع $y = 2x + 5$ برای فاصله $\Delta x = 0.1$ و $x = 3$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۱ (۳) -۲ (۴) -۱

۱۵۱- برای تابع $f(x) = |1 - x^2|$ کدام گزاره درست است؟

- (۱) تابع $f(x)$ در نقطه $x = 1$ مشتق پذیر است.
(۲) تابع $f(x)$ در نقطه $x = 1$ پیوسته است.
(۳) تابع $f(x)$ در نقطه $x = 1$ تعریف نشده است.
(۴) موارد ۱ و ۲ درست است.

۱۵۲- تابع $f(x) = x^2 + x + 8$ مفروض است، معادله قائم بر نمودار تابع معکوس f یعنی f^{-1} در نقطه ای به عرض ۱ کدام است؟

- (۱) $y = -2x - 41$ (۲) $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ (۳) $y = -\frac{1}{2}x + 1$ (۴) $y = -2x + 41$

۱۵۳- کدام یک از توابع زیر بر روی اعداد حقیقی نزولی است؟

(۲) $f(x) = 2x - \cos x$

(۱) $f(x) = x + \cos x$

(۴) $f(x) = -x + \cos x$

(۳) $f(x) = -x + 2 \cos x$

۱۵۴- فاصله نزدیکترین نقطه منحنی $y^2 = 2x + 4$ از مبدأ مختصات کدام است؟

- (۱) $\sqrt{3}$ (۲) ۳ (۳) ۱ (۴) $\sqrt{2}$

۱۵۵- نقطه‌ای بر $y = x^2 + 1$ بیابید که به نقطه $(3, 1)$ نزدیک‌ترین نقطه باشد؟

- (۱) $(2, 5)$ (۲) $(1/4, 1/96)$ (۳) $(1, 2)$ (۴) هیچ‌کدام

۱۵۶- نقطه $w(1, 2)$ نقطه عطف منحنی تابع $y = ax^3 + bx^2 + 4$ است، مجموع طول‌های ماکزیمم و مینیمم این منحنی کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) -۳ (۴) -۲

۱۵۷- با توجه به شرایط قضیه رول مقدار c در مورد تابع $y = |x|$, $-1 \leq x \leq 1$ کدام یک از مقادیر زیر می‌تواند باشد؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۰ (۴) هیچ‌کدام

۱۵۸- با توجه به شرایط قضیه رول مقدار c در مورد تابع $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x$, $-2 \leq x \leq 2$ کدام یک از مقادیر زیر می‌تواند باشد؟

- (۱) ۲ (۲) $-\frac{2}{3}$ (۳) $-\frac{2}{3}, 2$ (۴) هیچ‌کدام

۱۵۹- معادله $x^4 + 2x^2 - 2 = 0$ در بازه $[0, 1]$ چند ریشه حقیقی دارد؟

- (۱) یک (۲) دو (۳) سه (۴) چهار

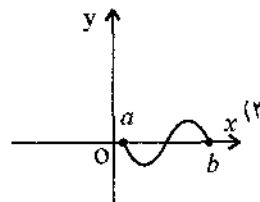
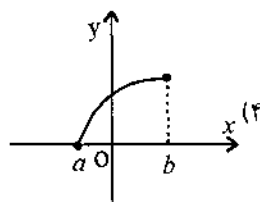
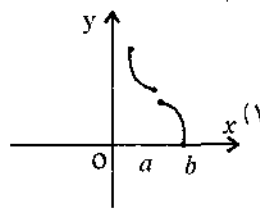
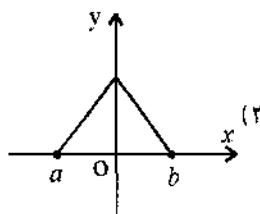
۱۶۰- قضیه رول در مورد کدام یک از توابع زیر صادق است؟

- (۱) $f(x) = x^3 - 3x$ روی فاصله $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$ (۲) $f(x) = x^3 + 2x$ روی فاصله $[-1, 2]$
(۳) $f(x) = x^3 - 2x^2$ روی فاصله $[-1, 2]$ (۴) موارد ۱ و ۳ صادق‌اند.

۱۶۱- برای تابع $f(x) = x - 1 + 1/(x-1)$ در قضیه مقدار میانگین مقدار مناسب برای c روی فاصله $[3/2, 3]$ کدام است؟

- (۱) ۰ (۲) ۲ (۳) -۲ (۴) ۱

۱۶۲- کدام یک از منحنی‌های زیر در شرایط قضیه رول صادق است؟



۱۶۳- مینیمم تابع $y = \tan^2 x + \cot^2 x$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt[3]{4}$ (۲) $\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$ (۳) $\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$ (۴) $\frac{2}{\sqrt[3]{4}}$

۱۶۴- ماکزیمم تابع $y = \sin^2 x \cdot \cos^2 x$ کدام است؟

- (۱) ۹ (۲) $\frac{4}{27}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{1}{3}$

۱۶۵- مقدار c با توجه به شرایط قضیه مقدار میانگین در مورد تابع $f(x) = x^2 - 4x + 2$ در فاصله $[-1, 4]$ کدام است؟

- (۱) $-\sqrt{\frac{13}{3}}$ (۲) $\sqrt{\frac{13}{3}}$ (۳) $\frac{\sqrt{13}}{3}$ (۴) $-\frac{\sqrt{13}}{3}$

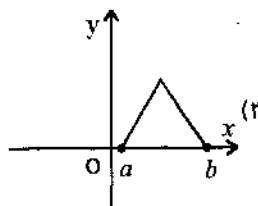
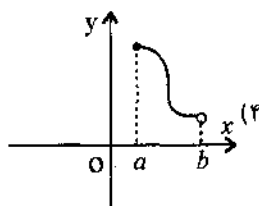
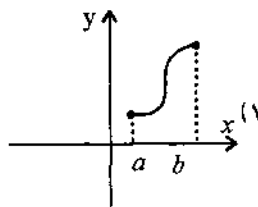
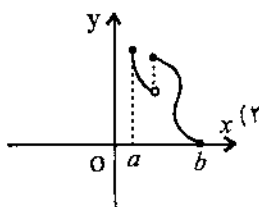
۱۶۶- در تابع با ضابطه $f(x) = \tan^{-1} x$ و $0 \leq x \leq 1$ بنابر قضیه رول مقدار $\tan^{-1} x/x$ در کدام فاصله واقع است؟

- (۱) $(0, 1)$ (۲) $(0, \frac{1}{2})$ (۳) $(\frac{1}{2}, 1)$ (۴) $(\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$

۱۶۷- هرگاه مجموع دو متغیر مثبت x و y برابر مقدار معلوم $2m$ باشد، کمترین مقدار برای مجموع معکوس‌های آن‌ها کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{m}$ (۲) $\frac{m}{2}$ (۳) $\frac{m}{4}$ (۴) $2m$

۱۶۸- قضیه مقدار میانگین در مورد کدام منحنی نمایش تابع صدق می‌کند؟



۱۶۹- اگر $f(x) = x^2 - 2x + 1$ و $g(x) = 2x + 1$ و $-2 < c < 2$ باشد، با توجه به فرمول کوشی مقدار c کدام است؟

- (۱) ۰ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) -۱

۱۷۰- اگر $0 < b < a$ باشد، ماکزیم عبارت $(\log_a^b)^{\sin x}$ کدام است؟

- (۱) $\log_b^a$ (۲) $\log_a^b$ (۳) ۱ (۴) $\frac{1}{b} \log_b^a$

۱۷۱- اگر $f(x) = \sqrt{x-1}$ و $a = 1$ و $b = 3$ باشد، در عبارت $f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$ مقدار c کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{4}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) ۳

۱۷۲- اگر x و y دو عدد مثبت و $3x + 5y = 30$ آن‌گاه ماکزیم $p = xy$ کدام است؟

- (۱) ۳۰ (۲) ۲۰ (۳) ۱۵ (۴) ۱۸

۱۷۳- دیرانسیل تابع $f(x) = \text{Arc tan } \sqrt{1-x^2}/x$ کدام است؟

- (۱) $\frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}}$ (۲) $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ (۳) $\frac{-dx}{2\sqrt{1-x^2}}$ (۴) $\frac{dx}{2\sqrt{1-x^2}}$

۱۷۴- دیرانسیل $y = xe^x + x$ به ازای $dx = 0.1$ و $x = 0$ کدام است؟

- (۱) ۰.۰۰۱ (۲) ۰.۰۱ (۳) ۰.۰۲ (۴) ۰.۲

۱۷۵- اگر $y = 2x^2 - x$ و $x = 1$ و $\Delta x = 0.1$ باشد، Δy کدام است؟

- (۱) ۰.۳۰۲ (۲) ۰.۳۰۲ (۳) ۰.۴۰۲ (۴) ۰.۴۰۲

۱۷۶- دیرانسیل تابع $y = 2x^2 - x$ به ازای تغییر از ۱- به ۰٫۹۸- کدام است؟

$$۰٫۱ (۱) \quad -۰٫۱ (۲) \quad ۰٫۰۱ (۳) \quad -۰٫۰۱ (۴)$$

۱۷۷- نمو تابع $y = x^2 - 2x + 5$ به ازای $x = 2$ و $x + \Delta x = ۲٫۰۱$ کدام است؟

$$۰٫۲۰۱ (۱) \quad ۰٫۰۲۰۱ (۲) \quad ۰٫۰۴۰۱ (۳) \quad ۰٫۴۰۱ (۴)$$

۱۷۸- دیرانسیل تابع $y = \ln x^2 + \ln \sqrt{x}$ برابر است با:

$$\frac{dx}{2x} (۱) \quad \frac{\sqrt{x}dx}{2x} (۲) \quad \frac{dx}{2} (۳) \quad \frac{\Delta dx}{2x} (۴)$$

۱۷۹- دیرانسیل مرتبه دوم $y = \ln \left(\frac{1-x^2}{1+x^2} \right)$ کدام است؟

$$\frac{-4(3x^2+1)}{(1-x^2)^2} dx^2 (۱) \quad \frac{4(3x^2+1)}{(1-x^2)^2} dx^2 (۲) \quad \frac{-4(3x^2-1)}{(1-x^2)^2} dx^2 (۳) \quad \frac{4(3x^2-1)}{(1-x^2)^2} dx^2 (۴)$$

۱۸۰- دیرانسیل مرتبه دوم $y = 4^{-x^2}$ کدام است؟

$$2 \times 4^{-x^2} \ln 4 (1 - 2x^2 \ln 4) dx^2 (۱) \quad 2 \times 4^{-x^2} \ln 4 (1 + 2x^2 \ln 4) dx^2 (۲) \quad -4^{-x^2} \ln 4 (1 + 2x^2 \ln 4) dx^2 (۳) \quad -4^{-x^2} \ln 4 (1 - 2x^2 \ln 4) dx^2 (۴)$$

۱۸۱- در تابع با ضابطه $f(y) = \sqrt{1-y}$ هرگاه Δy نمو y ، دیرانسیل dy دیرانسیل y باشد، آنگاه:

$$dy < \Delta y (۱) \quad dy > \Delta y (۲) \quad dy = \Delta y (۳) \quad \text{هیچ کدام} (۴)$$

۱۸۲- فرض کنید $y = 4x^2 - 2x + 1$ و $x = ۲$ و $\Delta x = ۰٫۱$ مقدار $\Delta y - dy$ کدام است؟

$$۰٫۰۱ (۱) \quad ۰٫۰۴ (۲) \quad ۰٫۰۲ (۳) \quad ۰٫۰۱۶ (۴)$$

۱۸۳- تابع $y = x^2 - 4x + 1$ مفروض است. اگر $x = ۱۰$ با حداکثر خطای ۰٫۱ محاسبه شود، خطای نسبی تقریبی کدام است؟

$$۱/۶ (۱) \quad ۰٫۰۲۶ (۲) \quad ۰٫۱۶ (۳) \quad ۰٫۲۶ (۴)$$

۱۸۴- دیرانسیل تابع $y = \frac{2}{3}(x+4)(\sqrt{x+1})$ کدام است؟

$$dy = \frac{x+1}{\sqrt{x+1}} dx (۱) \quad dy = \frac{x+2}{\sqrt{x+1}} dx (۲) \quad dy = \frac{x+4}{\sqrt{x+1}} dx (۳) \quad dy = \frac{x+6}{\sqrt{x+1}} dx (۴)$$

۱۸۵- با استفاده از دیرانسیل مقدار تقریبی $\sin ۴۶^\circ$ کدام است؟

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{\pi}{180} \right) (۱) \quad 1 + \frac{\pi}{180} (۲) \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\pi}{180} (۳) \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{\pi}{180} \right) (۴)$$

۱۸۶- دیرانسیل تابع $y = x/(1+x^2) + \text{Arc tan } x$ برابر است با:

$$\frac{2xdx}{(1+x^2)^2} (۱) \quad \frac{2xdx}{1+x^2} (۲) \quad \frac{2xdx}{(1+x^2)^2} (۳) \quad \frac{2xdx}{(1+x^2)^2} (۴)$$

۱۸۷- دیرانسیل تابع $y = \sin(\text{Arc sin } x)$ کدام است؟

$$-dx (۱) \quad dx (۲) \quad \frac{dx}{1+x^2} (۳) \quad \frac{-dx}{1+x^2} (۴)$$

۱۸۸- دیرانسیل تابع $y = \text{Arc sin } \sqrt{x^2/(1+x^2)}$ کدام است؟

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} (۱) \quad \frac{dx}{1+x^2} (۲) \quad \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} (۳) \quad \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} (۴)$$

۱۸۹- مقدار dy در تابع $y = x \cos^{-1} x$ کدام است؟

$$dy = \left(\cos^{-1} x + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx \quad (۲)$$

$$dy = \left(\cos^{-1} x - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx \quad (۱)$$

$$dy = \left(\cos^{-1} x - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx \quad (۴)$$

$$dy = \left(\cos^{-1} x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx \quad (۳)$$

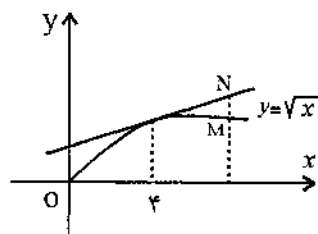
۱۹۰- در شکل مقابل $\Delta x = dx = ۰,۴۱$ فاصله MN کدام است؟

$$۰,۲۵ \quad (۱)$$

$$۰,۰۰۲۵ \quad (۲)$$

$$۰,۰۱۲۵ \quad (۳)$$

$$۰,۰۶۲۵ \quad (۴)$$



۱۹۱- می‌نیم مطلق تابع با ضابطه $f(x) = (x+1)^{1/2}$ در فاصله $[-۲, ۱]$ کدام است؟

$$\frac{1}{2} \quad (۴)$$

$$۰ \quad (۳)$$

$$۱ \quad (۲)$$

$$\sqrt{4} \quad (۱)$$

۱۹۲- مجموعه نقاط بحرانی تابع $f(x) = (x^2 - 3x^2 + 4)^{1/2}$ کدام است؟

$$\{-۱, ۲\} \quad (۴)$$

$$\{-۲, -۱, ۰, ۲\} \quad (۳)$$

$$\{-۱, ۰, ۲\} \quad (۲)$$

$$\{۰, ۲\} \quad (۱)$$

۱۹۳- طول نقطه عطف تابع با ضابطه $y = 2x/(x+1)$ کدام است؟

$$\text{هیچ کدام} \quad (۴)$$

$$۱ \quad (۳)$$

$$-۱ \quad (۲)$$

$$۰ \quad (۱)$$

۱۹۴- تابع $y = x^{n+1}$ که در آن n یک عدد صحیح و مثبت است:

(۱) همواره نزولی است. (۲) همواره صعودی است. (۳) دارای می‌نیم نسبی است. (۴) دارای ماکزیمم نسبی است.

۱۹۵- کدام یک از توابع زیر همواره محدب است؟

$$y = \frac{2x}{x+1} \quad (۴)$$

$$y = \sin x \quad (۳)$$

$$y = x^2 - 8x^2 + 24x^2 \quad (۲)$$

$$y = \ln x \quad (۱)$$

تست‌های آزمون کارشناسی ارشد

«مشتق»

• تست‌های شماره ۱ الی ۴۱ آزمون‌های کارشناسی ارشد مجموعه علوم اقتصادی

• تست‌های شماره ۴۲ الی ۸۴ آزمون‌های کارشناسی ارشد مجموعه مدیریت

• تست‌های شماره ۸۵ الی ۱۳۲ آزمون‌های کارشناسی ارشد حسابداری

۱- مشتق $y = xe^x/(x-1)$ در نقطه $x = ۰$ برابر است با:

$$-۱ \quad (۴)$$

$$۱ \quad (۳)$$

$$۰ \quad (۲)$$

$$۲ \quad (۱)$$

۲- مشتق پنجم $y = \cos x$ برابر است با:

$$-\cos x \quad (۴)$$

$$\cos x \quad (۳)$$

$$\sin x \quad (۲)$$

$$-\sin x \quad (۱)$$

۳- اگر u و v و w توابعی از x باشند، عبارت $uvdx + uvdw + uvdw$ دیرانسیل کدام عبارت است؟

$$\frac{w}{uv} \quad (۴)$$

$$u + v + w \quad (۳)$$

$$uvw \quad (۲)$$

$$\frac{uv}{w} \quad (۱)$$

۴- طول نقطه بحرانی تابع $y = xe^{-x}$ و نوع آن کدام است؟

$$-۱ \quad (۴) \text{ و می‌نیم}$$

$$۱ \quad (۳) \text{ و می‌نیم}$$

$$-۱ \quad (۲) \text{ و ماکزیمم}$$

$$۱ \quad (۱) \text{ و ماکزیمم}$$

۵- طول نقطه عطف تابع $y = xe^{-x}$ برابر است با:

- ۲ (۱) ۳ (۲) -۲ (۳) -۱ (۴)

۶- شیب خط قائم بر منحنی به معادله $y = xe^x$ در نقطه‌ای به طول صفر برابر است با:

- ۱ (۱) -۱ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) هیچ کدام

۷- مشتق y نسبت به x در معادله $y^2 + x^2 = 4$ برابر است با:

- $-\frac{x}{y}$ (۱) $-\frac{y}{x}$ (۲) $-\frac{4x}{y}$ (۳) $-\frac{2x}{y}$ (۴)

۸- مشتق تابع $y = x^{e^x}$ در نقطه $x = 1$ کدام است؟

- $e + 1$ (۱) e (۲) $-e$ (۳) $e - 1$ (۴)

۹- در تابع $\sin x = e^y$ ، dy/dx کدام است؟

- $\cot x$ (۱) $-\sin x$ (۲) $-\cot x$ (۳) $\frac{\cos x}{x}$ (۴)

۱۰- ضریب زاویه خط مماس بر منحنی $f(x) = \sqrt{1 - e^{-x}}$ در مبدأ مختصات عبارت است از:

- ۱ (۱) -۱ (۲) بی‌نهایت (۳) ۴ (۴) صفر

۱۱- دیفرانسیل مرتبه اول تابع $y = e^{\arctan x}$ به ازای $dx = 0.1$ در $x = 0$ کدام است؟

- -0.1 (۱) 0.2 (۲) 0.1 (۳) ۴ (۴) صفر

۱۲- طول نقطه بحرانی (اکسترمم) تابع $y = \ln(8x - x^2)$ و نوع آن عبارت است از:

- $x = 4$ (۱) و ماکزیمم $x = 4$ (۲) و می‌نیمم $x = 3$ (۳) و ماکزیمم $x = 2$ (۴) و می‌نیمم

۱۳- شیب وتر گذرنده بر دو نقطه $x = 2$ و $x = h + 2$ واقع بر منحنی $y = x^2 - x$ را هنگامی که h به سمت صفر میل می‌کند، کدام است؟

- ۲ (۱) ۱ (۲) ۳ (۳) ۰ (۴)

۱۴- مشتق مرتبه n ام تابع $y = (ax + b)^n$ برابر است با:

- $n! (1)$ $a^n (2)$ $a^{n+1} (3)$ $n! a^n (4)$

۱۵- مشتق تابع $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \dots}}}$ برابر است با:

- $y' = \frac{1}{2y + 2} (1)$ $y' = \frac{1}{y + 1} (2)$ $y' = \frac{1}{2y - 1} (3)$ $y' = \frac{1}{y - 1} (4)$

۱۶- مشتق تابع $y = (x)^{e^x}$ به ازای $x = 1$ برابر است با:

- $e + 1$ (۱) e (۲) $-e$ (۳) $e - 1$ (۴)

۱۷- اگر $f(x) = x^2$ و $g(x) = x^2$ باشد، با توجه به رابطه کوشی مقدار c کدام است؟

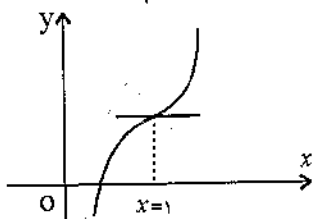
- $\frac{3}{19} (1)$ $\frac{17}{9} (2)$ $\frac{14}{9} (3)$ $\frac{19}{9} (4)$

۱۸- در تابعی به شکل مقابل که معادله آن به صورت $y = x^2 + ax^2 + bx + 2$

است، مقدار $a + b$ کدام است؟

- ۱ (۱) ۰ (۲)

- ۲ (۳) ۳ (۴)



۱۹- مشتق مرتبه اول تابع $y = a^{x^2-2x}$ در نقطه $x = 1$ برابر است با:

$$y' = -\frac{1}{a} \ln a \quad (۴) \quad y' = -a \ln a \quad (۳) \quad y' = a \ln a \quad (۲) \quad y' = \frac{1}{a} \ln a \quad (۱)$$

۲۰- اگر $y = b \sin^2 t$ و $x = a \cos^2 t$ باشد، dy/dx برابر است با:

$$-\frac{b}{a} \cot t \quad (۴) \quad \frac{a}{b} \quad (۳) \quad -\frac{b}{a} \tan t \quad (۲) \quad \frac{b}{a} \tan t \quad (۱)$$

۲۱- ضریب زاویه خط مماس بر منحنی $f(x) = \sqrt{1-e^{-x^2}}$ در نقطه $x = 0^+$ کدام یک از موارد زیر است؟

$$\infty \quad (۴) \quad +1 \quad (۳) \quad 0 \quad (۲) \quad -1 \quad (۱)$$

۲۲- اگر $f(x) = x/(x+3)$ باشد، مقدار c در رابطه $f(2) - f(1) = f'(c)$ کدام است؟

$$\sqrt{20} - 4 \quad (۴) \quad \sqrt{20} + 4 \quad (۳) \quad \sqrt{20} + 3 \quad (۲) \quad \sqrt{20} - 3 \quad (۱)$$

۲۳- اگر m و n اعدادی مثبت و $0 \leq x \leq \pi/2$ باشند، در این صورت تابع $y = \sin^n x \cdot \cos^m x$ هنگامی ماکزیمم است که:

$$\cot x = \frac{m}{n} \quad (۴) \quad \tan x = \sqrt{\frac{n}{m}} \quad (۳) \quad \cot x = \sqrt{\frac{m}{n}} \quad (۲) \quad \tan x = \frac{n}{m} \quad (۱)$$

۲۴- اگر منحنی نمایش تابع $f(x) = x^2 + 2kx^2 + k$ در نقطه $x = 1$ از تقعر به تحدب تغییر یابد، آنگاه مقدار k عبارت است از:

$$2 \quad (۴) \quad -1 \quad (۳) \quad \frac{1}{2} \quad (۲) \quad -\frac{3}{2} \quad (۱)$$

۲۵- با توجه به تابع $y = x^6 - x^4 + 1$ نقطه $A(0, 1)$ کدام است؟

$$(۱) \text{ می نیمم نسبی} \quad (۲) \text{ عطف} \quad (۳) \text{ ماکزیمم نسبی} \quad (۴) \text{ عطف می نیمم}$$

۲۶- اگر $y = (2x^2 - 1)/(x^2 + 1)$ باشد، مقدار $dx/dy = x'_y$ در نقطه $x = 1$ کدام است؟

$$\frac{3}{2} \quad (۴) \quad 1 \quad (۳) \quad \frac{2}{3} \quad (۲) \quad \frac{1}{2} \quad (۱)$$

۲۷- مقدار مشتق مرتبه پانزدهم تابع $y = (x+2)/(x+3)$ در نقطه $x = 1$ کدام است؟

$$15! \quad (۴) \quad 14! \quad (۳) \quad -15! \quad (۲) \quad -16! \quad (۱)$$

۲۸- برای نقطه بحرانی تابع با ضابطه $f(x) = x^{1/2}(x+4)^{-1/2}$ دو نقطه $x = -1$ و $x = 4$ به ترتیب کدام است؟

$$(۱) \text{ می نیمم فاقد اکسترمم} \quad (۲) \text{ ماکزیمم می نیمم} \quad (۳) \text{ می نیمم ماکزیمم} \quad (۴) \text{ فاقد اکسترمم ماکزیمم}$$

۲۹- اگر نمودار k در $y = x^2 + 2kx^2 + k$ در نقطه $x = 1$ از تقعر به تحدب تغییر یابد، آنگاه مقدار k کدام است؟

$$2 \quad (۴) \quad \frac{1}{2} \quad (۳) \quad -1 \quad (۲) \quad -\frac{3}{2} \quad (۱)$$

۳۰- در تابع f با ضابطه $y = x/(1-x)$ مشتق مرتبه نهم به ازای $x = 2$ برابر است با:

$$-(10!) \quad (۴) \quad -(9!) \quad (۳) \quad 10! \quad (۲) \quad 9! \quad (۱)$$

۳۱- در تابع پارامتری با ضابطه $\begin{cases} x = 1/t \\ y = t \end{cases}$ ، y''_{xx} کدام است؟

$$-2t^3 \quad (۴) \quad \frac{1}{t^2} \quad (۳) \quad -\frac{1}{t^2} \quad (۲) \quad 2t^3 \quad (۱)$$

۳۲- اگر $y = x/(1+x)$ باشد، حاصل $(\Delta y - dy)$ در نقطه $x = 1$ به ازای $\Delta x = 0.4$ کدام است؟

$$\frac{1}{60} \quad (۴) \quad \frac{1}{30} \quad (۳) \quad -\frac{1}{30} \quad (۲) \quad -\frac{1}{60} \quad (۱)$$

۳۳- کدام یک از توابع زیر بر روی اعداد حقیقی صعودی است؟

$$f(x) = x - \sin x \quad (۴) \quad f(x) = x + 2 \sin x \quad (۳) \quad f(x) = x + 2 \cos x \quad (۲) \quad f(x) = -x + \sin x \quad (۱)$$

۳۴- به ازای کدام مقدار a تابع $y = x \ln ax$ در نقطه $x = 1$ می نیمم است؟

$$\frac{1}{e} \quad (۴) \quad e \quad (۳) \quad 2 \quad (۲) \quad 1 \quad (۱)$$

۳۵- در تابع $y = x^2 - 2x + 1$ ، اگر x به اندازه $h = 0.1$ نمو کند، در $x = 0$ نمو y کدام است؟

$$0.21 \quad (۴) \quad 0.20 \quad (۳) \quad -0.18 \quad (۲) \quad -0.19 \quad (۱)$$

۳۶- دیرانسیل تابع $y = e^{x^2-x}$ در نقطه $x = 1$ کدام است؟

$$dx \quad (۴) \quad 2dx \quad (۳) \quad 2dx \quad (۲) \quad \text{صفر} \quad (۱)$$

۳۷- از رابطه $x \ln y + y \ln x + 2xy - x - y = 0$ مقدار y'_x در نقطه $(1, 1)$ کدام است؟

$$2 \quad (۴) \quad 1 \quad (۳) \quad -1 \quad (۲) \quad -2 \quad (۱)$$

۳۸- اگر مقدار تولید کالاهای کشاورزی سالیانه رشدی برابر ۲ درصد و قیمت ها رشدی برابر ۳ درصد داشته باشد، رشد

سالیانه درآمد کشاورزان کدام است؟

$$6 \quad (۴) \quad 5 \quad (۳) \quad \frac{3}{2} \quad (۲) \quad \frac{2}{3} \quad (۱)$$

۳۹- طول نقطه عطف تابع $y = \arctan x$ ، کدام است؟

$$\frac{\pi}{4} \quad (۲) \quad 0 \quad (۱) \quad 1 \quad (۳) \quad (۴) \text{ فاقد نقطه عطف}$$

۴۰- اگر تابع هزینه کل $TC = x^2 + 4x + 9$ باشد، مقدار می نیمم هزینه متوسط کدام است؟

$$12 \quad (۴) \quad 10 \quad (۳) \quad 8 \quad (۲) \quad 6 \quad (۱)$$

۴۱- مشتق مرتبه n ام تابع $y = e^{2x}$ در $x = 0$ کدام است؟

$$\frac{1}{e} \quad (۴) \quad e \quad (۳) \quad 2^n \quad (۲) \quad 1 \quad (۱)$$

۴۲- مشتق تابع $y = xe^{x-1}$ در نقطه $x = 1$ کدام است؟

$$3 \quad (۴) \quad 2 \quad (۳) \quad 1 \quad (۲) \quad \text{صفر} \quad (۱)$$

۴۳- مماس بر منحنی $y = \ln(x-1)$ در نقطه $x = 2$ محور عرض ها را در چه عرضی قطع می کند؟

$$-2 \quad (۴) \quad -1 \quad (۳) \quad 1 \quad (۲) \quad 0 \quad (۱)$$

۴۴- مختصات ماکزیمم یا می نیمم تابع $y = -x/(x^2 - 1)$ کدام است؟

$$\frac{2}{3} \quad (۳) \quad -\frac{2}{3} \quad (۲) \quad \text{صفر} \quad (۱) \quad (۴) \text{ فاقد ماکزیمم و می نیمم}$$

۴۵- طول نقطه عطف تابع $y = xe^{-x}$ کدام است؟

$$x = -1 \quad (۴) \quad x = 1 \quad (۳) \quad x = 2 \quad (۲) \quad x = -2 \quad (۱)$$

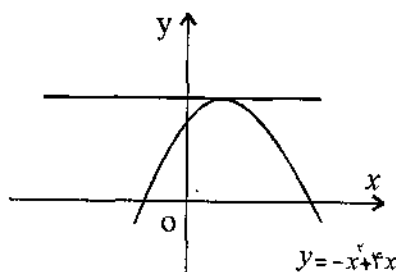
۴۶- مقدار مشتق تابع $y = \ln x/(x^2 + 1)$ در نقطه $x = 1$ کدام است؟

$$0 \quad (۴) \quad 1 \quad (۳) \quad \frac{1}{2} \quad (۲) \quad \ln \frac{1}{2} \quad (۱)$$

۴۷- مشتق تابع $y = x^x$ در نقطه $x = 2$ کدام است؟

$$2(\ln 2 + 1) \quad (۴) \quad 2(\ln 2 + 1) \quad (۳) \quad 1 \quad (۲) \quad 2 \quad (۱)$$

- ۴۸- در تابع $y = 2x^2 + 3x + 1$ در نقطه $x = 1$ به ازای $\Delta x = 0.1$ مقدار Δy کدام است؟
 ۱) ۰.۷۴ ۲) ۰.۷ ۳) ۰.۷۲ ۴) ۰.۷۶
- ۴۹- در تابع $y = 2x^2 + 3x + 1$ دیفرانسیل y در نقطه $x = 1$ به ازای $dx = 0.1$ کدام است؟
 ۱) ۰.۷۱ ۲) ۰.۷۲ ۳) ۰.۶۹ ۴) ۰.۷
- ۵۰- مقدار dy/dx در رابطه $0 = x^2 + 2y - 2x + 4y^2 - 5xy + x'$ در نقطه $x = y = 1$ کدام است؟
 ۱) $\frac{3}{4}$ ۲) $-\frac{1}{4}$ ۳) ۵ ۴) $\frac{2}{3}$
- ۵۱- معادله مماس بر منحنی $y = x \ln x$ در نقطه $(1, 0)$ محور طول‌ها را در چه طولی قطع می‌کند؟
 ۱) ۲ ۲) -1 ۳) ۱ ۴) صفر
- ۵۲- در تابع $y = x/(x+1)$ طول نقطه عطف کدام است؟
 ۱) ۱ ۲) -1 ۳) ۲ ۴) فاقد نقطه عطف
- ۵۳- طول نقطه ماکزیمم یا می‌نیم $y = e^x - 3$ کدام است؟
 ۱) فاقد نقطه بحرانی ۲) -1 ۳) صفر ۴) ۲
- ۵۴- طول نقطه بحرانی تابع $y = x^3 - 32x$ کدام است؟
 ۱) ۲ ماکزیمم ۲) می‌نیم ۳) ۴ ماکزیمم ۴) ۴ می‌نیم
- ۵۵- شیب خط مماس بر منحنی $y = e^{2x} + 2x + 5$ در نقطه $x = 0$ کدام است؟
 ۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۵ ۴) ۴
- ۵۶- مشتق تابع $y = (x+1)^x$ در نقطه $x = 1$ کدام است؟
 ۱) ۱ ۲) $\ln 2 + \frac{1}{2}$ ۳) $2 \ln 2 + 1$ ۴) ۲
- ۵۷- طول می‌نیم تابع $y = x \ln x$ برابر است با:
 ۱) $\frac{1}{e}$ ۲) $-\frac{1}{e}$ ۳) e ۴) $-e$
- ۵۸- طول نقطه عطف منحنی $y = x^2 + 5x + 2$ کدام است؟
 ۱) ۱ ۲) -1 ۳) فاقد نقطه عطف ۴) ۲
- ۵۹- دیفرانسیل تابع $y = x^2 + 2x - 1$ در نقطه $x = 0$ به ازای $dx = 0.1$ برابر است با:
 ۱) ۰ ۲) ۰.۲ ۳) -0.1 ۴) ۰.۱
- ۶۰- اگر $y = \sqrt{u^2 + 2u}$ و $u = (x^2 - 1)^2$ باشند، y''_{xx} در $x = 1$ چقدر است؟
 ۱) صفر ۲) ۱ ۳) $\sqrt{2}$ ۴) $\sqrt{3}$
- ۶۱- اگر $y = 2x^2 - 2x^3 + 1$ باشد، مشتق y' در نقطه $x = 1$ کدام است؟
 ۱) -1 ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) ۱ ۴) ۲
- ۶۲- مشتق مرتبه n ام تابع $y = e^{2x}$ در نقطه $x = 0$ کدام است؟
 ۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) 2^n



۶۳- با توجه به شکل، معادله خط مماس بر منحنی کدام است؟

$y = 4$ (۱)

$y = 3$ (۲)

$y = 2$ (۳)

$y = 1$ (۴)

۶۴- اگر $y = -x^2 + 4x$ باشد، در $x = 1$ مقدار دیفرانسیل y در صورتی که $dx = 0.1$ باشد، کدام است؟

0.4 (۴)

0.3 (۳)

0.2 (۲)

0.1 (۱)

۶۵- تابع $y = (x+1)/(x-1)$ را در نظر بگیرید، این تابع در فاصله $[1, 2]$ چگونه است؟

(۴) محدب، صعودی

(۳) محدب، نزولی

(۲) مقعر، نزولی

(۱) مقعر، صعودی

۶۶- طول نقطه عطف $y = x \ln x - 2/x$ کدام است؟

± 2 (۴)

± 1 (۳)

$\pm \frac{1}{2}$ (۲)

صفر (۱)

۶۷- از رابطه $y - x = y^2 + y' - 2xy$ مقدار y' در نقطه $x = y = 1$ کدام است؟

1 (۴)

-2 (۳)

$\frac{1}{2}$ (۲)

-1 (۱)

۶۸- تابع $y = xe^x$ در کدام فاصله صعودی است؟

$(-\infty, -1)$ (۴)

$(-1, +\infty)$ (۳)

$\mathbb{R}$ (۲)

$\mathbb{R}^+$ (۱)

۶۹- طول نقطه می‌نیم تابع $y = xe^{2x}$ کدام است؟

$\frac{1}{2}$ (۴)

1 (۳)

صفر (۲)

$-\frac{1}{2}$ (۱)

۷۰- طول نقطه ماکزیمم تابع $y = x^3 - 9x$ کدام است؟

$-\sqrt{3}$ (۴)

$\sqrt{3}$ (۳)

3 (۲)

-3 (۱)

۷۱- در تابع $y = \ln(x+1)$ مقدار y'' به ازای $x = 0$ کدام است؟

1 (۴)

$\frac{1}{2}$ (۳)

$-\frac{1}{2}$ (۲)

-1 (۱)

۷۲- مشتق تابع $y = x^{x+2}$ در نقطه $x = 1$ کدام است؟

11 (۴)

7 (۳)

5 (۲)

3 (۱)

۷۳- تابع $y = e^x - 2x$ در فاصله بسته $[0, 1]$ چگونه است؟

(۴) ابتدا مقعر و سپس محدب

(۳) ابتدا محدب و سپس مقعر

(۲) محدب

(۱) مقعر

۷۴- در باره تابع $y = x \ln x$ کدام گزاره صحیح است؟

$\max(e^{-1}, -e^{-1})$ (۴)

$\max(e, -e)$ (۳)

$\min(e^{-1}, -e^{-1})$ (۲)

$\min(e, -e)$ (۱)

۷۵- مشتق مرتبه پنجم $y = e^{1x}$ در $x = 0$ برابر است با:

32 (۴)

10 (۳)

8 (۲)

1 (۱)

۷۶- اگر $y = x/(1+x)$ باشد، مقدار dy به ازای $\Delta x = 0.4$ در $x = 1$ کدام است؟

0.4 (۴)

0.3 (۳)

0.2 (۲)

0.1 (۱)

- ۷۷- تابع f به معادله $y = x^2 + 1$ از نظر تحدب و تقعر چگونه است؟
 (۱) ابتدا محدب سپس مقعر (۲) ابتدا مقعر و سپس محدب (۳) همواره مقعر (۴) همواره محدب
- ۷۸- کدام یک از توابع زیر بر روی اعداد حقیقی نزولی است؟
 (۱) $f(x) = x \sin x$ (۲) $f(x) = x - \sin x$ (۳) $f(x) = -x + \sin x$ (۴) $f(x) = -x + 2 \sin x$
- ۷۹- طول نقطه می نیم تابع $y = xe^{2x}$ کدام است؟
 (۱) -2 (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) 2
- ۸۰- در تابعی به معادله $f(x) = 2x + 5e^{2x}$ ، در صورتی که x ، یک واحد تغییر کند، مقدار f در نقطه $x = 0$ چه مقدار تغییر خواهد کرد؟
 (۱) 0 (۲) 2 (۳) 10 (۴) 12
- ۸۱- از رابطه $0 = 3 - 2y \ln x - 2y \ln y - 2x \ln y - xy + y^2 + x^2$ ، مقدار y' به ازای $x = y = 1$ کدام است؟
 (۱) -2 (۲) -1 (۳) 1 (۴) 2
- ۸۲- اگر f به معادله $y = (x - \ln x)/e^{2x}$ باشد، مقدار dx/dy در $x = 1$ کدام است؟
 (۱) $\frac{1}{2}e^{-2}$ (۲) $2e^{-2}$ (۳) $2e^2$ (۴) $\frac{1}{2}e^2$
- ۸۳- بیشترین مقدار تابع $y = e^x + 2x$ در فاصله $[-1, 1]$ کدام است؟
 (۱) 0 (۲) 1 (۳) $-\ln 2$ (۴) $e + 2$
- ۸۴- کدام مورد برای تقعر منحنی به معادله $y = x^2 + x$ ، در فاصله $[-2, 2]$ صحیح است؟
 (۱) ابتدا مقعر سپس محدب (۲) ابتدا محدب سپس مقعر (۳) همواره محدب (۴) همواره مقعر
- ۸۵- تابع $y = 2x^2 - x + 3$ در نقطه $x = 1$ در ازای افزایش $\Delta x = 0.1$ چه مقدار افزایش خواهد داشت؟
 (۱) 0.35 (۲) 0.32 (۳) 0.34 (۴) 0.37
- ۸۶- مقدار dy/dx در تابع $y = \frac{\ln x}{x}$ به ازای $x = e^2$ کدام است؟
 (۱) e^{-2} (۲) $-e^2$ (۳) e^2 (۴) $-e^{-2}$
- ۸۷- از رابطه $5 = x^2 - y^2 + xy - 2x$ مقدار dy/dx در نقطه $(3, 1)$ چه قدر است؟
 (۱) -3 (۲) 5 (۳) -5 (۴) 3
- ۸۸- دیرانسیل تابع $y = (\text{Arc tan } 2x) + e^{-x}$ در نقطه $x = 0$ کدام است؟
 (۱) $2dx$ (۲) dx (۳) $4dx$ (۴) $3dx$
- ۸۹- اگر $y = e^{1/4}$ و $u = \sqrt{x^2 - 3}$ مقدار dy/dx به ازای $x = 2$ کدام است؟
 (۱) $\frac{1}{4}e$ (۲) $2e$ (۳) $-2e$ (۴) $-\frac{1}{4}e$
- ۹۰- معادله خط مماس بر منحنی $y = x \ln x$ در نقطه $x = 1$ کدام است؟
 (۱) $y = x + 1$ (۲) $y = x - 1$ (۳) $y = x$ (۴) $y = -x + 1$
- ۹۱- ضریب زاویه قائم بر منحنی تابع $y = (x + 1)/(x - 2)$ در نقطه $x = 5$ واقع بر آن کدام است؟
 (۱) 3 (۲) -3 (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $-\frac{1}{3}$

۹۲- طول نقطه عطف تابع $y = x \ln x - x^2$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) ۲ (۴) -۲

۹۳- طول نقطه بحرانی تابع $y = 2x^2 + x$ کدام است؟

- (۱) $\left(\frac{1}{4}\right)$ ، ماکزیمم (۲) $\left(\frac{1}{4}\right)$ ، عطف (۳) $\left(-\frac{1}{4}\right)$ ، مینیمم (۴) $\left(-\frac{1}{4}\right)$ ، ماکزیمم

۹۴- عرض نقطه بحرانی تابع $y = e^x$ کدام است؟

- (۱) e^2 (۲) e (۳) فاقد نقطه بحرانی (۴) ۱

۹۵- مشتق تابع $8 = x^2 + y^2 + xy$ در نقطه $x = 0$ ، کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{6}$ (۲) $-\frac{1}{3}$ (۳) ۰ (۴) ۲

۹۶- معادله خط مماس بر منحنی $y = e^{2x} + 1$ در نقطه $x = 0$ ، کدام است؟

- (۱) $y = x - 2$ (۲) $y = x + 2$ (۳) $y = 3x + 2$ (۴) $y = 3x - 2$

۹۷- مشتق مرتبه پنجم تابع $y = e^{2x} + x$ در نقطه $x = 0$ ، کدام است؟

- (۱) ۰ (۲) ۱ (۳) ۱۰ (۴) ۳۲

۹۸- اگر $x = \ln(\sqrt{\cos 2y})$ فرض شود، dy/dx کدام است؟

- (۱) $-\tan 2y$ (۲) $-\cot 2y$ (۳) $\frac{\sin 2y}{\sqrt{\cos 2y}}$ (۴) $\frac{-\sin 2y}{\sqrt{\cos 2y}}$

۹۹- مقدار ماکزیمم تابع $y = x^2 + 1$ در فاصله $[0, 2]$ کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) ۰

۱۰۰- مشتق تابع $y = (x + 1)^x$ در نقطه $x = 0$ ، کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۰

۱۰۱- طول نقطه عطف منحنی $y = x \ln x$ کدام است؟

- (۱) فاقد نقطه عطف (۲) صفر (۳) ۱ (۴) ۲

۱۰۲- تابع $y = xe^x$ ، در چه فاصله‌ای صعودی است؟

- (۱) $x < 1$ (۲) $x > -1$ (۳) $x > -2$ (۴) $x < 2$

۱۰۳- شیب وتر گذرنده از دو نقطه $x = 1$ و $x = h + 1$ واقع بر منحنی $y = 4x^2 - 6x$ هنگامی که h به سمت صفر میل می‌کند، کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) ۲

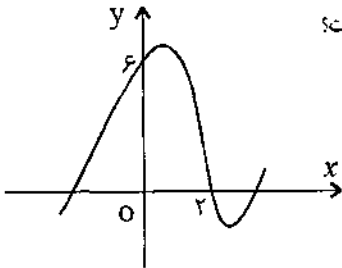
۱۰۴- اگر داشته باشیم $y = u^2 + 2u$ و $x = (\tan x - 1)^2$ مقدار y'_x بازاری $x = \pi/4$ کدام است؟

- (۱) ۰ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۱۰۵- در تابع $y = x^2 + 2x^2$ مقدار y'_x در نقطه $x = -1$ کدام است؟

- (۱) -۳ (۲) $-\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) ۲

۱۰۶- شکل مقابل نمودار $y = x^3 + ax^2 + x + c$ است، مقدار ac کدام است؟



(۱) -24

(۲) 24

(۳) 12

(۴) -12

۱۰۷- معادله منحنی توزیع نرمال استاندارد $y = \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$ است، طول نقطه عطف این تابع کدام است؟

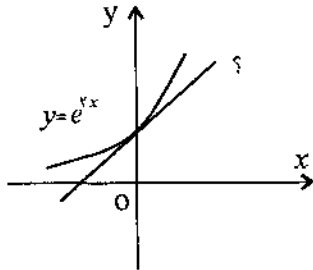
(۴) e^{-1}

(۳) $\frac{2}{e}$

(۲) 1

(۱) 2

۱۰۸- با توجه به شکل مقابل، معادله خط مماس بر منحنی کدام است؟



(۱) $y - 2x + 1 = 0$

(۲) $y + 2x + 2 = 0$

(۳) $y - 2x - 2 = 0$

(۴) $y - 2x - 1 = 0$

۱۰۹- دیفرانسیل تابع $y = e^{\arctan x}$ در نقطه $x = 1$ کدام است؟

(۴) $\frac{1}{2} e^{\pi/4} dx$

(۳) $\frac{1}{2} e dx$

(۲) $e^{\pi/4} dx$

(۱) edx

۱۱۰- در تابع $y = (x+1)/x$ اگر در نقطه $x = 1$ به x نموی به اندازه $\Delta x = 0.1$ بدهیم، Δy کدام است؟

(۴) $-\frac{1}{2}$

(۳) $-\frac{1}{10}$

(۲) $\frac{1}{10}$

(۱) $-\frac{1}{11}$

۱۱۱- در رابطه $xy + e^{xy} - 2x + y - 1 = 0$ مقدار y'_x در نقطه $x = y = 0$ کدام است؟

(۴) -2

(۳) 2

(۲) $\frac{1}{2}$

(۱) 1

۱۱۲- مقدار مشتق تابع $y = (x+1)^x$ به ازای $x = 1$ کدام است؟

(۴) $2 \ln 2 + 1$

(۳) $\frac{1}{2}$

(۲) 2

(۱) 1

۱۱۳- در کدام تابع $\Delta y / \Delta x$ همواره برابر شیب منحنی در هر نقطه آن است؟

(۴) $y = \ln x$

(۳) $y = ax + b$

(۲) $y = \frac{1}{x}$

(۱) $y = x^2$

۱۱۴- مشتق n ام تابع $y = e^{2x/4}$ در $x = 0$ کدام است؟

(۴) $\frac{1}{4} e$

(۳) 2^{n-2}

(۲) $\frac{1}{4} e^2$

(۱) 2^n

۱۱۵- طول نقاط ماکزیمم یا می‌نیمم تابع $y = x^3 - 3x$ کدام است؟

(۲) در $x = \sqrt{3}$ ماکزیمم و در $x = -\sqrt{3}$ می‌نیمم

(۱) در $x = -1$ ماکزیمم و در $x = 1$ می‌نیمم

(۴) در $x = 1$ ماکزیمم و در $x = -1$ می‌نیمم

(۳) در $x = -\sqrt{3}$ ماکزیمم و در $x = \sqrt{3}$ می‌نیمم

۱۱۶- در تابع $y = \sin x$ مقدار $y'_x \times y''_x$ در نقطه $x = \pi/4$ کدام است؟

(۴) $\sqrt{2}$

(۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(۲) 1

(۱) صفر

۱۱۷- مشتق مرتبه m تابع $y = 1/(1-x)$ در نقطه $x = 0$ کدام است؟

$$(n-1)! \quad (4) \quad n! \quad (3) \quad 1 \quad (2) \quad -1 \quad (1)$$

۱۱۸- مشتق تابع $y = (x^2 + 1)^x$ در نقطه $x = 1$ کدام است؟

$$2 + 2 \ln 2 \quad (4) \quad \ln 2 + 1 \quad (3) \quad 2 \quad (2) \quad 1 \quad (1)$$

۱۱۹- در فاصله $1 \leq x \leq 2$ تابع $y = x^2 + 1$ مقدار می‌نیم تابع کدام است؟

$$5 \quad (4) \quad 2 \quad (3) \quad 1 \quad (2) \quad 0 \quad (1)$$

۱۲۰- دیفرانسیل تابع $y = xe^x + 1/(x+1)$ در نقطه $x = 0$ کدام است؟

$$2edx \quad (4) \quad 2dx \quad (3) \quad dx \quad (2) \quad \text{صفر} \quad (1)$$

۱۲۱- مشتق y'_x برای f به ضابطه $xy + y^2 - 2 = 0$ در نقطه $(1, 1)$ کدام است؟

$$1 \quad (4) \quad \frac{1}{3} \quad (3) \quad -\frac{1}{3} \quad (2) \quad -1 \quad (1)$$

۱۲۲- مشتق مرتبه دهم $y = 1/(1-x)$ به ازای $x = 2$ کدام است؟

$$11! \quad (4) \quad 10! \quad (3) \quad -(10!) \quad (2) \quad -(11!) \quad (1)$$

۱۲۳- اگر $y = x/(x+1)$ باشد، حاصل $dy - dy$ در نقطه $x = 0$ به ازای $\Delta x = 0.2$ کدام است؟

$$\frac{1}{15} \quad (4) \quad \frac{1}{30} \quad (3) \quad -\frac{1}{30} \quad (2) \quad -\frac{1}{15} \quad (1)$$

۱۲۴- تابع f با ضابطه $y = x^2 + 1$ از نظر تحدب و تقعر چگونه است؟

$$\begin{array}{l} (1) \text{ ابتدا محدب، سپس مقعر} \\ (2) \text{ ابتدا مقعر، سپس محدب} \\ (3) \text{ همواره محدب} \\ (4) \text{ همواره مقعر} \end{array}$$

۱۲۵- کدام یک از توابع زیر بر روی اعداد حقیقی اکیداً نزولی است؟

$$f(x) = -x + 2 \cos x \quad (4) \quad f(x) = x - \sin x \quad (3) \quad f(x) = -2x + \sin x \quad (2) \quad f(x) = x + \sin x \quad (1)$$

۱۲۶- به ازای کدام مقدار a نقطه عطف تابع $y = xe^{ax}$ در $x = 1$ است؟

$$2 \quad (4) \quad 1 \quad (3) \quad -1 \quad (2) \quad -2 \quad (1)$$

۱۲۷- در تابعی به معادله $y = xe^{2x} + 5x + 1$ ، با افزایش یک واحد برای x ، در نقطه $x = 0$ تقریباً چه مقدار بر y اضافه می‌شود؟

$$6 \quad (4) \quad 5 \quad (3) \quad 3 \quad (2) \quad 1 \quad (1)$$

۱۲۸- اگر داشته باشیم $y = (e^{2x} - 2x)/(x+2)$ مقدار dx/dy در نقطه $x = 0$ کدام است؟

$$4 \quad (4) \quad \frac{1}{4} \quad (3) \quad -2 \quad (2) \quad -4 \quad (1)$$

۱۲۹- کدامین تابع همواره محدب است؟

$$y = \ln x \quad (4) \quad y = e^{2x} + x \quad (3) \quad y = \sin x \quad (2) \quad y = \cos x \quad (1)$$

۱۳۰- مقدار ماکزیمم تابع $y = \ln x + x$ در فاصله $[1, 2]$ کدام است؟

$$\ln 2 + 2 \quad (4) \quad 2 \quad (3) \quad 1 \quad (2) \quad -1 \quad (1)$$

۱۳۱- اگر درآمد کل $TR = 8x - x^2$ و هزینه کل $TC = 2x + 1$ است، به ازای کدام مقدار x ، سود بنگاه ماکزیمم است؟

$$4 \quad (4) \quad 3 \quad (3) \quad 2 \quad (2) \quad 1 \quad (1)$$

۱۳۲- از رابطه $z = (x + 2y)^x$ ، مقدار $\partial z / \partial x$ در $x = y = 1$ کدام است؟

$$3 \quad (4) \quad 1 \quad (3) \quad \ln 3 - 1 \quad (2) \quad 3 \ln 3 + 1 \quad (1)$$

انتگرال

۱-۶ انتگرال

انتگرال (تابع اولیه) عکس مشتق است. بدین معنی که مشتق تابع را داریم و از روی آن خود تابع را می‌خواهیم به دست آوریم. تابع $F(x)$ را تابع اولیه تابع $f(x)$ در فاصله $[a, b]$ خوانند، اگر به ازای جمیع نقاط این فاصله، تساوی $f(x) = F'(x)$ برقرار باشد.

۲-۶ انتگرال نامعین

اگر $F(x)$ تابع اولیه تابع $f(x)$ باشد، بنا به تعریف، این تابع اولیه را که مشتقش بر ثابت دلخواه c است انتگرال نامعین تابع $f(x)$ نامیده و آن را به صورت زیر نمایش می‌دهند.

$$\int f(x) dx = F(x) + c$$

تابع $y = F(x) + c$ نمایش یک خانواده منحنی است که به ازای هر مقدار x یک منحنی از این خانواده مشخص می‌شود. با توجه به این که به ازای هر مقدار c داریم:

$$y' = F'(x) + 0 = f(x)$$

می‌توان نتیجه گرفت که در هر نقطه دلخواهی به طول x ضریب زاویه (شیب) تمامی منحنی‌های این خانواده یکسان است. بنابراین، با معلوم بودن یک شرط می‌توان یک منحنی خاص از تابع اولیه را پیدا کرد. این شرط موسوم به شرط مرزی یا شرط اولیه است (مسئله ۱).

۳-۶ خواص انتگرال نامعین

$$\begin{aligned} ۱) \frac{d}{dx} \left[\int f(x) dx \right] &= f(x) & ۲) \int [f(x) \pm g(x)] dx &= \int f(x) dx \pm \int g(x) dx \\ ۳) \int k f(x) dx &= k \int f(x) dx \quad (k \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

۴-۶ روش‌های انتگرال‌گیری

۱-۴-۶ انتگرال‌گیری با استفاده از صورت‌های استاندارد

می‌دانیم محاسبه انتگرال نامعین یا تابع اولیه و مشتق‌گیری دو عمل عکس یکدیگرند. فرض می‌کنیم که داریم:

$$\begin{array}{ccc} \int f(x) dx = F(x) + c & & \\ \text{مشتق‌گیری} & \xrightarrow{\quad} & \\ F(x) + c & \xleftrightarrow{\quad} & f(x) \\ \text{محاسبه انتگرال نامعین} & & \end{array}$$

در این صورت می‌توان نوشت:

از خاصیت فوق برخی از فرمول‌های محاسبه انتگرال نامعین به دست می‌آید، که موسوم به صورت‌های متعارف و یا صورت‌های استاندارد می‌باشد. اهم این فرمول‌ها به شرح زیر است:

$$۱) \int dx = x + c$$

$$۲) \int adx = ax + c \quad (a \in \mathbb{R})$$

$$۳) \int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c \quad (n \neq -1)$$

$$۴) \int \frac{dx}{x} = \ln |x| + c \quad (x > 0)$$

$$۵) \int k(ax+b)^n dx = \frac{k}{(n+1)a} (ax+b)^{n+1} + c \quad (n \neq -1)$$

$$۶) \int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \ln |ax+b| + c$$

$$۷) \int ku'u^n dx = \frac{k}{n+1} u^{n+1} + c \quad (u \text{ تابعی قابل مشتق‌گیری از } x \text{ می‌باشد})$$

$$۸) \int a^{nx} dx = \frac{1}{n \ln a} a^{nx} + c \quad (a \text{ عدد دلخواهی به جز ۱ است})$$

$$۹) \int e^{nx} dx = \frac{1}{n} e^{nx} + c$$

$$۱۰) \int \frac{u'}{u} dx = \ln |u| + c$$

$$۱۱) \int u'e^u dx = e^u + c$$

$$۱۲) \int \sin mx dx = -\frac{1}{m} \cos mx + c$$

$$۱۳) \int \cos mx dx = \frac{1}{m} \sin mx + c$$

$$۱۴) \int \tan mx dx = -\frac{1}{m} \ln |\cos mx| + c$$

$$۱۵) \int \cot mx dx = \frac{1}{m} \ln |\sin mx| + c$$

$$۱۶) \int (1 + \tan^2 mx) dx = \frac{1}{m} \tan mx + c$$

$$۱۷) \int (1 + \cot^2 mx) dx = -\frac{1}{m} \cot mx + c$$

$$۱۸) \int k \cos mx \cdot \sin^n mx dx = \frac{k}{(n+1)m} \sin^{n+1} mx + c$$

$$۱۹) \int k \sin mx \cdot \cos^n mx dx = -\frac{k}{(n+1)m} \cos^{n+1} mx + c$$

$$۲۰) \int (1 + \tan^2 mx) \cdot k \tan^n mx dx = \frac{k}{(n+1)m} \tan^{n+1} mx + c$$

$$۲۱) \int (1 + \cot^2 mx) \cdot k \cot^n mx dx = -\frac{k}{(n+1)m} \cot^{n+1} mx + c$$

$$۲۲) \int \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} dx = \text{Arc sin } u + c = \sin^{-1} u + c$$

$$۲۳) \int \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}} dx = \text{Arc cos } u + c = \cos^{-1} u + c$$

$$۲۴) \int \frac{u'}{1+u^2} dx = \text{Arc tan } u + c = \tan^{-1} u + c$$

$$۲۵) \int \frac{-u'}{1+u^2} dx = \text{Arc cot } u + c = \cot^{-1} u + c$$

$$۲۶) \int \sin hmx dx = -\frac{1}{m} \cos hmx + c$$

$$۲۷) \int \cos hmx dx = \frac{1}{m} \sin hmx + c$$

$$۲۸) \int \tan hmx dx = \frac{1}{m} \ln |\cos hmx| + c$$

$$۲۹) \int \cot hmx dx = \frac{1}{m} \ln |\sin hmx| + c$$

$$۳۰) \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a} + c = -\frac{1}{a} \cot^{-1} \frac{x}{a} + c$$

$$۳۱) \int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{a} \tan h^{-1} \frac{x}{a} + c = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + c \quad (x^2 < a^2)$$

$$۳۲) \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \sin^{-1} \frac{x}{a} + c = -\cos^{-1} \frac{x}{a} + c$$

$$۳۳) \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \sin h^{-1} \frac{x}{a} + c = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + c \quad (a > 0)$$

$$۳۴) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \cos h^{-1} \frac{x}{a} + c = \ln(x + \sqrt{x^2 - a^2}) + c \quad (x > a > 0)$$

(مسائل ۲ تا ۷)

۶-۴-۲ انتگرال‌گیری به روش تغییر متغیر

فرض کنید g تابع مشتق‌پذیری از x است و حوزه مقادیر (برد) آن بازه‌ای مانند I باشد و فرض کنید f تابعی تعریف شده در I بوده و I^* تابع اولیه f در I باشد. اگر $u = g(x)$ ، آن‌گاه:

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int f(u) du = F(u) + c = f(g(x)) + c$$

بنابراین در این روش (۱) تغییر متغیر مناسب می‌دهیم (۲) از طرفین دیفرانسیل می‌گیریم (۳) در انتگرال اصلی به جای متغیر قدیم، متغیر جدید را می‌گذاریم (۴) انتگرال می‌گیریم (۵) به جای متغیر جدید همان متغیر قدیم را می‌گذاریم (مسئله ۸).

۶-۴-۳ انتگرال‌گیری به روش جزء به جزء

این روش وابسته است به فرمول دیفرانسیل حاصل ضرب:

$$d(uv) = u dv + v du$$

$$u dv = d(uv) - v du$$

و یا:

اگر از دو طرف رابطه فوق انتگرال بگیریم، خواهیم داشت:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

رابطه فوق موسوم به فرمول جزء به جزء است. انتگرال‌هایی که بیش‌تر به صورت حاصل ضرب دو تابع غیر هم‌نوع و یا نظیر $\int \ln f(x) dx$ و $\int \sin^{-1} x dx$ و ... باشند به روش جزء به جزء محاسبه می‌کنیم. گاهی برای محاسبه یک انتگرال ممکن است چند بار رابطه جزء به جزء را به کار ببریم (مسائل ۱۰ و ۱۱).

۶-۴-۴ انتگرال‌گیری با تغییر متغیرهای گویا کننده

الف) انتگرال $I = \int f(x, x^{a/b}, \dots, x^{r/s}) dx$ را در نظر می‌گیریم. این انتگرال مشتمل بر توان‌هایی از x است. تنها با تغییر متغیر $x = t^n$ می‌توان آن را به صورت گویا تبدیل کرد که در آن n مخارج مشترک توان‌های کسری $a/b, \dots, r/s$ است (مسئله ۱۱).

ب) انتگرال $I = \int f(x, (ax + b/cx + d)^{1/n}) dx$ را در نظر بگیریم. تنها با تغییر متغیر $(ax + b)/(cx + d) = t^n$ می‌توان آن را به صورت گویا تبدیل کرد (مسئله ۱۲).

۵-۴-۶ انتگرال گیری از کسرهای گویا

انتگرال کسری $\int f(x)dx/g(x)$ را که در آن $f(x)$ و $g(x)$ دو کثیرالجمله از درجه $n \in \mathbb{N}$ می باشد، در نظر گرفته، اگر درجه صورت بزرگتر از درجه مخرج باشد، صورت را بر مخرج تقسیم کرده تا کسری حاصل گردد که درجه صورت آن از درجه مخرج کم تر باشد، خواهیم داشت:

$$f(x) = \ell(x).h(x) + q(x) \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = \ell(x) + \frac{q(x)}{h(x)}$$

الف) مخرج کسر یعنی $h(x)$ را تجزیه کرده، یعنی آن را به صورت حاصل ضرب عوامل درجه اول $ax + b$ و عوامل درجه دوم فاقد ریشه $ax^2 + bx + c$ درمی آوریم.

ب) پس از تجزیه مخرج کسر حالت های زیر را در نظر می گیریم:

- ۱- اگر در مخرج عامل $ax + b$ وجود داشته باشد، به ازای آن کسر $A/(ax + b)$ را در نظر می گیریم.
- ۲- اگر در مخرج عامل $(ax + b)^n$ وجود داشته باشد، به ازای آن n کسر به صورت $A_1/(ax + b) + A_2/(ax + b)^2 + \dots + A_n/(ax + b)^n$ را در نظر می گیریم.
- ۳- اگر در مخرج عامل $ax^2 + bx + c$ وجود داشته باشد، به ازای آن کسر $Ax + B/(ax^2 + bx + c)$ را در نظر می گیریم.

۴- اگر در مخرج عامل $(ax^2 + bx + c)^n$ وجود داشته باشد، به ازای آن n کسر به صورت $(A_1x + B_1)/(ax^2 + bx + c) + (A_2x + B_2)/(ax^2 + bx + c)^2 + \dots + (A_nx + B_n)/(ax^2 + bx + c)^n$ را در نظر می گیریم.

در عبارت های فوق A ها و B ها ثابت هایی هستند که مقادیرشان باید تعیین گردد.

ج) ضرایب صورت کسرهای تجزیه شده را تعیین می کنیم. معادله حاصل یک اتحاد است. یعنی به ازای جمیع مقادیر متغیر تساوی برقرار است. نحوه تعیین ضرایب ثابت مبنی بر این قضیه است که اگر دو کثیرالجمله هم درجه، متحد یکدیگر باشند، ضرایب جمله های هم درجه در دو طرف با هم برابرند.

د) کسرهای جزئی را با استفاده از صورت های متعارف (استاندارد)، انگره می کنیم (مسأله ۳).

۶-۴-۶ انتگرال توابع مثلثاتی

برای محاسبه انتگرال توابع مثلثاتی حالت های کلی زیر را در نظر می گیریم.

۱) اگر انتگرال به صورت $I = \int f(\sin x, \cos x)dx$ باشد، به جای $\sin x$ و $\cos x$ به ترتیب مقادیر $\frac{y \tan x/2}{1 + \tan^2 x/2}$

و $\frac{1 - \tan^2 x/2}{1 + \tan^2 x/2}$ را می گذاریم. سپس تغییر متغیر $\tan x/2 = t$ داده و بنابراین خواهیم داشت (مسأله ۱۴):

$$I = \int f\left(\frac{yt}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \cdot \frac{2dt}{1+t^2}$$

۲) اگر انتگرال به صورت $I = \int f(\sin^2 x, \cos^2 x)dx$ باشد، یعنی سینوس و کسینوس دارای توان زوج باشند، تغییر

متغیر $\tan x = t$ داده و بنابراین خواهیم داشت:

$$I = \int f\left(\frac{t^2}{1+t^2}, \frac{1}{1+t^2}\right) \cdot \frac{dt}{1+t^2}$$

۳) اگر انتگرال به صورت $I = \int f(\sin x) \cdot \cos x dx$ باشد، تغییر متغیر $\sin x = t$ داده و بنابراین خواهیم داشت:

$$I = \int f(t)dt$$

(۴) اگر انتگرال به صورت $I = \int f(\cos x) \cdot \sin x dx$ باشد تا تغییر متغیر $\cos x = t$ داده و بنابراین خواهیم داشت:

$$I = - \int f(t) dt$$

(۵) اگر انتگرال به صورت $I = \int f(\tan x) dx$ باشد، تغییر متغیر $\tan x = t$ داده و بنابراین خواهیم داشت:

$$I = \int f(t) \cdot \frac{dt}{1+t^2}$$

(۶) اگر انتگرال به صورت $\int \sin^n x dx$ یا $\int \cos^n x dx$ باشد و n یک عدد صحیح فرد باشد ($n = 2k + 1$)، برای حل به طریق زیر عمل می‌کنیم (مسئله ۱۵).

$$\begin{aligned} \int \sin^n x dx &= \int \sin^{2k+1} x dx = \int \sin x \sin^{2k} x dx = \int \sin x (1 - \cos^2 x)^k dx = \dots \\ \int \cos^n x dx &= \int \cos^{2k+1} x dx = \int \cos x \cos^{2k} x dx = \int \cos x (1 - \sin^2 x)^k dx = \dots \end{aligned}$$

(۷) اگر انتگرال به صورت $\int \sin^n x dx$ یا $\int \cos^n x dx$ باشد و n یک عدد صحیح زوج باشد، برای حل از فرمول‌های $\sin^2 x = (1 - \cos 2x)/2$ و $\cos^2 x = (1 + \cos 2x)/2$ استفاده می‌کنیم (مسئله ۱۶).

(۸) اگر انتگرال به صورت $\int \sin^n x \cdot \cos^m x dx$ باشد، وقتی که حداقل یکی از توان‌ها فرد باشد، برای حل مانند حالت (۶) عمل می‌کنیم.

(۹) اگر انتگرال به صورت $\int \sin^n x \cdot \cos^m x dx$ باشد، وقتی که هر دو توان‌ها زوج باشد، برای حل مانند حالت (۷) عمل می‌کنیم.

(۱۰) انتگرال‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

$$I = \int \sin mx \cdot \sin nx dx \quad I = \int \sin mx \cdot \cos nx dx \quad I = \int \cos mx \cdot \sin nx dx$$

با تبدیل به مجموع انتگرال‌های فوق محاسبه می‌شوند، یعنی (مسئله ۱۷):

$$I = \frac{1}{2} \int [\cos(m-n)x - \cos(m+n)x] dx$$

$$I = \frac{1}{2} \int [\sin(m+n)x + \sin(m-n)x] dx$$

$$I = \frac{1}{2} \int [\cos(m+n)x + \cos(m-n)x] dx$$

(۱۱) قاعده برای جای‌گزین‌های مثلثاتی:

۱- برای $\sqrt{a^2 - u^2}$ ، بگیرد $u = a \sin t$

۲- برای $\sqrt{a^2 + u^2}$ ، بگیرد $u = a \tan t$

۳- برای $\sqrt{u^2 - a^2}$ ، بگیرد $u = a \sec t$

۴- برای $a^2 + u^2$ ، بگیرد $u = a \tan t$

۵- برای $a^2 - u^2$ ، بگیرد $u = a \sin t$

(مسئله ۱۸).

۲- برای $\sqrt{a^2 + u^2}$ ، بگیرد $u = a \tan t$

۴- برای $a^2 + u^2$ ، بگیرد $u = a \tan t$

۵-۶ انتگرال معین

اگر تابع $f(x)$ بر فاصله $[a, b]$ تعریف شده باشد، آنگاه انتگرال معین $f(x)$ از a تا b به صورت زیر نشان داده می شود:

$$S = \int_a^b f(x) dx$$

در محاسبه $\int_a^b f(x) dx$ ثابت انتگرال گیری حذف می شود و چون انتگرال دارای مقدار معینی است، بدین دلیل انتگرال موسوم به انتگرال معین $f(x)$ از a تا b می باشد. توجه کنید که عبارت «تابع f بر فاصله $[a, b]$ انتگرال پذیر است» با عبارت «انتگرال معین $f(x)$ از a تا b موجود است» مترادف می باشد. a و b را حد بالا و حد پایین انتگرال می نامند، در اینجا منظور از حد مقدار متغیر در دو انتهای فاصله است (مسئله ۲۱).

قضیه: اگر تابع f بر فاصله $[a, b]$ پیوسته باشد، آنگاه تابع f بر روی فاصله $[a, b]$ انتگرال پذیر است (مسائل ۱۹ و ۲۰).

نکات مهم:

۱- اگر $f(x)$ تابعی فرد باشد، داریم:

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0$$

۲- اگر $f(x)$ تابعی زوج باشد، داریم:

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$$

۶-۶ خواص انتگرال معین

اگر f و g توابعی انتگرال پذیر و a و b و c اعداد حقیقی ثابت باشند، خواص زیر برقرارند:

۱) $\int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$ (k ثابتی دلخواه است)

۲) $\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$

۳) $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$ ($a < c < b$)

۴) $\int_a^a f(x) dx = 0$

۵) $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$

۶) $\int_a^b c dx = c(b - a)$

۷) $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$ ($f(x) \leq g(x)$)

۸) $|\int_a^b f(x) dx| \leq \int_a^b |f(x)| dx$

۹) هرگاه f بر $[a, b]$ پیوسته و نامنفی باشد، آنگاه:

۱۰) هرگاه f بر $[a, b]$ پیوسته و نامنفی بوده و در هر نقطه از (a, b) نا صفر باشد، آنگاه:

$$\int_a^b f(x) dx > 0$$

۷-۶ انتگرال گیری از توابعی که شامل تابع جزء صحیح و یا قدر مطلق می باشند

برای انتگرال گیری از چنین توابعی، ابتدا با توجه به تعریف تابع جزء صحیح و تابع قدر مطلق، حدهای انتگرال را به فواصل مناسب تقسیم می کنیم و تابع زیر علامت انتگرال را بدون علامت جزء صحیح یا قدر مطلق بیان می کنیم، سپس از توابع به دست آمده انتگرال می گیریم (مسائل ۲۳ و ۲۴).

نکته: اگر n یک عدد صحیح و مثبت باشد، داریم:

$$\int_0^n [x] dx = \frac{n(n-1)}{2}$$

۸-۶ قضیه مقدار میانگین برای انتگرال‌ها

هرگاه تابع f بر فاصله بسته $[a, b]$ پیوسته باشد، عددی مانند c در $[a, b]$ وجود دارد. به طوری که (مسئله ۲۵):

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a)$$

تعریف: اگر تابع $f(x)$ بر فاصله بسته $[a, b]$ انتگرال پذیر باشد، مقدار میانگین (متوسط) f بر $[a, b]$ به صورت زیر است (مسئله ۲۶):

$$A.V = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

۹-۶ قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال

اگر $F'(x)$ یکی از توابع اولیه تابع پیوسته $f(x)$ بر فاصله $[a, b]$ باشد، در این صورت داریم (مسئله ۲۷):

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b$$

تذکر: در انتگرال معین می‌توان تغییر متغیر داد، برای این منظور اولاً: رابطه تغییر متغیر را می‌نویسیم، ثانیاً: حدود جدید انتگرال را پیدا می‌کنیم و ثالثاً: دیفرانسیل متغیر قدیم را پیدا کرده و انتگرال در کل بر حسب متغیر جدید محاسبه می‌شود (مسئله ۲۸).

۱۰-۶ مشتق‌گیری از انتگرال

اگر $u(x)$ و $v(x)$ دو تابع مشتق‌پذیر از x باشند، آن‌گاه (مسئله ۲۹):

$$\frac{d}{dx} \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt = f(v(x)) \frac{dv}{dx} - f(u(x)) \frac{du}{dx}$$

قضیه: اگر $f(x)$ در فاصله بسته $[a, b]$ پیوسته و انتگرال‌پذیر باشد، و x عدد دلخواهی در $[a, b]$ باشد، در این صورت تابع $F(x)$ برابر است با:

$$F(x) = \int_a^b f(t) dt$$

اگر از طرفین رابطه فوق مشتق بگیریم، داریم (مسئله ۳۰):

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt \Rightarrow F'(x) = f(x)$$

۱۱-۶ کاربردهای انتگرال معین

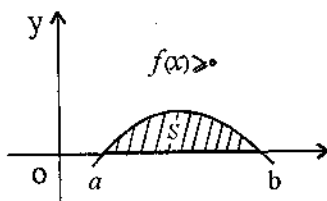
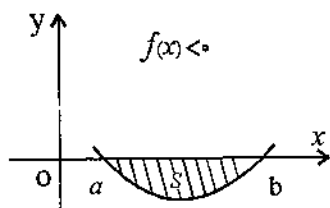
۱-۱۱-۶ محاسبه سطح محصور بین منحنی $y = f(x)$ و محور x ‌ها

الف) سطح محصور بین منحنی $y = f(x)$ و محور x ‌ها از نقطه $x = a$ تا $x = b$ از روابط زیر به دست می‌آیند (مسئله ۳۱):

$$S = \int_a^b f(x) dx, \quad f(x) \geq 0$$

$$S = - \int_a^b f(x) dx = \left| \int_a^b f(x) dx \right|, \quad f(x) < 0$$

(۱) $F(x)$ یک تابع اولیه از $f(x)$ در فاصله $[a, b]$ است.



ب) اگر منحنی $y = f(x)$ محور x ها را در بیش از دو نقطه قطع کند، سطح بین منحنی $y = f(x)$ و محور x ها که در زیر محور x ها واقع شده است، از رابطه زیر به دست می آید (مسئله ۳۲).

$$S = S_1 + S_2 = \left| \int_a^c f(x) dx \right| + \left| \int_c^b f(x) dx \right|$$

۶-۱۱-۲ محاسبه سطح محصور بین دو منحنی

فرض کنید f و g پیوسته باشند و $f(x) \geq g(x) : \forall x \in [a, b]$ ، آن گاه، سطح محصور بین منحنی $y = f(x)$ و $y = g(x)$ و خطوط عمودی $x = a$ تا $x = b$ عبارت است از (مسئله ۳۳):

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$

۶-۱۱-۳ محاسبه حجم جسم دوار

الف) اگر ناحیه محصور بین منحنی $y = f(x)$ ، محور x ها و خطوط عمودی $x = a$ تا $x = b$ حول محور x ها دوران کند، $f(x) \geq 0$ بر فاصله $[a, b]$ حجم جسم حاصل از دوران از رابطه زیر به دست می آید (مسئله ۳۴).

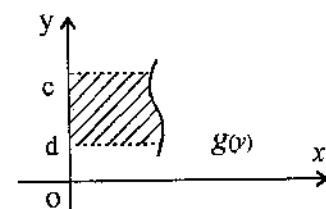
$$v = \int_a^b \pi (f(x))^2 dx$$

نکات مهم:

- ۱- حجم کره حادث از دوران دایره $x^2 + y^2 = R^2$ حول محور x ها برابر است با: $v = \frac{4}{3}\pi R^3$.
- ۲- حجم کره حادث از دوران بیضی $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ حول محور x ها برابر است با: $v = \frac{4}{3}\pi a b^2$.
- ۳- حجم کره حادث از دوران بیضی $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ حول محور y ها برابر است با: $v = \frac{4}{3}\pi a^2 b$.
- ۴- حجم کره حادث از دوران بیضی $x^2/b^2 + y^2/a^2 = 1$ حول محور x ها برابر است با: $v = \frac{4}{3}\pi a^2 b$.
- ۵- حجم کره حادث از دوران بیضی $x^2/b^2 + y^2/a^2 = 1$ حول محور y ها برابر است با: $v = \frac{4}{3}\pi a b^2$.

ب) اگر ناحیه محصور بین $x = g(y)$ ، محور y ها و خطوط افقی $y = c$ و $y = d$ حول محور y ها دوران کند، $g(y) \geq 0$ بر فاصله $[c, d]$ حجم جسم حاصل از دوران از رابطه زیر به دست می آید (مسئله ۳۵).

$$v = \int_c^d \pi (g(y))^2 dy$$



ج) اگر ناحیه محصور بین منحنی $y = f(x)$ ، محور x ها و خطوط عمودی $x = a$ و $x = b$ حول محور y ها دوران کند، (که $0 \leq a < b$ و $f(x)$ بر $[a, b]$ پیوسته و غیرمنفی است) حجم جسم حاصل از دوران از رابطه زیر به دست می آید (مسئله ۳۶).

$$v = \int_a^b 2\pi x f(x) dx$$

د) اگر ناحیه محصور بین $x = g(y)$ و محور y ها و خطوط افقی $y = c$ و $y = d$ حول محور x ها دوران کند، (که $0 \leq c < d$ و $g(y)$ بر $[c, d]$ پیوسته و غیرمنفی است) حجم جسم حاصل از دوران از رابطه زیر به دست می آید.

$$v = \int_c^d 2\pi y g(y) dy$$

۴-۱۱-۶ طول قوس منحنی در مختصات قائم

الف) اگر تابع f و مشتق آن f' روی بازه بسته $[a, b]$ پیوسته باشند، آنگاه طول قوس منحنی $y = f(x)$ از نقطه $(a, f(a))$ تا نقطه $(b, f(b))$ از رابطه زیر به دست می آید.

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

ب) اگر تابع g و مشتق آن g' روی بازه بسته $[c, d]$ پیوسته باشند، آنگاه طول قوس منحنی $x = g(y)$ از نقطه $(c, g(c))$ و $(d, g(d))$ از رابطه زیر به دست می آید:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (g'(y))^2} dy = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy$$

(مسئله ۳۷)

۱۲-۶ انتگرال‌های ناسره

انتگرال‌هایی که یک یا هر دو حد انتگرال‌گیری آن‌ها بی‌نهایت و نیز انتگرال‌هایی که تابع زیر علامت انتگرال بی‌کران است، انتگرال‌های ناسره گویند.

۱-۱۲-۶ انتگرال‌هایی که یک یا هر دو حد انتگرال‌گیری بی‌نهایت است

انتگرال‌های:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx, \quad \int_{-\infty}^b f(x) dx$$

ناسره می‌باشند، زیرا ∞ یک عدد نمی‌باشد و نمی‌تواند در $f(x)$ به جای x قرار گیرد. اما می‌توان آن‌ها را به عنوان حد تابع دیگر تعریف نمود.

تعریف: اگر تابع $f(x)$ برای هر $x \geq a$ پیوسته باشد، آنگاه:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$$

تعریف: اگر تابع $f(x)$ برای هر $x \leq b$ پیوسته باشد، آنگاه:

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx$$

در هر یک از حالت‌های فوق، اگر حد موجود و متناهی باشد، انتگرال ناسره هم‌گرا نامیده می‌شود، ولی اگر حد موجود نباشد و یا بی‌نهایت باشد، آن را واگرا می‌نامیم.

تعریف: اگر تابع $f(x)$ برای همه x ها پیوسته و c عددی حقیقی و دلخواه باشد، آن‌گاه:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^c f(x)dx + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_c^b f(x)dx$$

اگر هر دو حد بالا موجود باشند، انتگرال ناسره را هم‌گرا و در غیر این صورت آن را واگرا می‌نامیم (مسائل ۳۸ و ۳۹).

برای تحقیق در هم‌گرایی انتگرال‌های ناسره از قضایای زیر استفاده می‌کنیم.

قضیه: اگر به ازای هر $x \geq a$ ، تابع $f(x)$ و $g(x)$ معین و انتگرال‌پذیر باشند و نیز داشته باشیم $0 \leq g(x) \leq f(x)$ ، آن‌گاه هم‌گرایی انتگرال $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ هم‌گرایی $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ را نتیجه می‌دهد.^۱

قضیه: اگر به ازای هر $x \geq a$ تابع $f(x)$ معین و انتگرال $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ هم‌گرا باشد، آن‌گاه $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ نیز هم‌گراست، در این حالت می‌گوییم انتگرال $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ هم‌گرای مطلق است.^۲ (مسئله ۴۰)

۶-۱۲-۲ انتگرال‌هایی که تابع زیر علامت انتگرال بی‌کراں است

انتگرال‌های با حدود معین نیز در صورتی که تابع زیر علامت انتگرال در داخل فاصله انتگرال‌گیری نامعین گردد، می‌توانند ناسره باشند. برای محاسبه این انتگرال‌ها نیز باید از حد استفاده نمود.

تعریف: اگر تابع $f(x)$ در فاصله $[a, b]$ پیوسته و داشته باشیم $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \pm\infty$ ، آن‌گاه:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{b-\epsilon} f(x)dx$$

به شرط آنکه حد فوق موجود باشد.

تعریف: اگر تابع $f(x)$ در فاصله $[a, b]$ پیوسته و داشته باشیم $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$ ، آن‌گاه:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\epsilon}^b f(x)dx$$

به شرط آنکه حد فوق موجود باشد.

تعریف: اگر تابع $f(x)$ در تمام نقاط فاصله $[a, b]$ به جز در نقطه c از این فاصله، پیوسته و اگر $\lim_{x \rightarrow c} |f(x)| = +\infty$ ، آن‌گاه:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{c-\epsilon} f(x)dx + \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_{c+\delta}^b f(x)dx$$

به شرط آنکه هر دو حد بالا موجود باشند (مسئله ۴۱).

۶-۱۳-۱۳ انتگرال‌های چندگانه

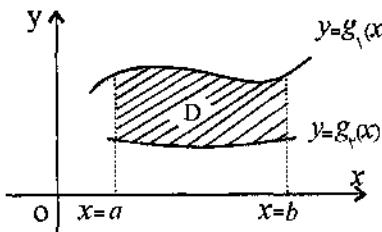
۶-۱۳-۱ نحوه محاسبه انتگرال دوگانه

الف) اگر ناحیه R محصور به منحنی‌های $y = g_1(x)$ و $y = g_2(x)$ ، خطوط $x = a$ و $x = b$ باشد به طوری که برای هر

(۱) در این قضیه، واگرایی انتگرال $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ و واگرایی $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ را نتیجه می‌دهد.

(۲) اگر انتگرال $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ هم‌گرا باشد، اما انتگرال $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ واگرا باشد می‌گوییم انتگرال $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ هم‌گرایی

مشروط است.

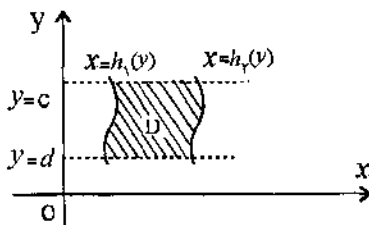


x در فاصله $[a, b]$ داشته باشیم $g_1(x) \leq g_2(x)$ و توابع g_1 و g_2 در فاصله $[a, b]$ پیوسته باشند، انتگرال دوگانه را می‌توان با فرمول زیر محاسبه نمود:

$$\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy dx$$

یعنی ابتدا در تابع $f(x, y)$ را ثابت در نظر می‌گیریم و از آن نسبت به y انتگرال می‌گیریم و آن را برحسب حدود انتگرال محاسبه می‌کنیم، حاصل تابعی برحسب x است که از آن نسبت به x انتگرال می‌گیریم و آن را برحسب حدود انتگرال محاسبه می‌کنیم.

ب) اگر ناحیه R محصور به منحنی‌های $x = h_1(y)$ و $x = h_2(y)$ و $y = a$ و $y = b$ باشد به طوری که برای هر y در فاصله $[c, d]$ داشته باشیم $h_1(y) \leq h_2(y)$ و توابع h_1 و h_2 در فاصله $[c, d]$ پیوسته باشند. انتگرال دوگانه را می‌توان با فرمول زیر محاسبه نمود (مسئله ۴۲).



$$\int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx dy$$

یعنی ابتدا در $f(x, y)$ را ثابت در نظر می‌گیریم و از آن نسبت به x انتگرال می‌گیریم و آن را برحسب حدود انتگرال محاسبه می‌کنیم. حاصل تابعی برحسب y است که از آن نسبت به y انتگرال می‌گیریم و آن را برحسب حدود انتگرال محاسبه می‌کنیم. در بسیاری موارد مجبور هستیم ترتیب انتگرال‌گیری را عوض کنیم. اگر ترتیب انتگرال‌گیری عوض شود، حدود جدید انتگرال‌گیری می‌بایست تعیین گردد، یعنی:

$$\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy dx \neq \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_a^b f(x, y) dx dy$$

حدود انتگرال‌گیری فقط باید برحسب متغیری باشد که انتگرال‌گیری باید برحسب آن به عمل آید و حدود انتگرال فوق می‌بایست بدین روش دوباره نوشته شود، یعنی:

$$\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy dx = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx dy$$

که در آن حدود انتگرال به روش گفته شده، تعیین شده است (مسئله ۴۳).

۶-۱۳-۲ نحوه محاسبه انتگرال چندگانه

برای توابعی که بیش از دو متغیر مستقل دارند، روند انتگرال‌گیری دوگانه را می‌توان تعمیم داد. به طور کلی، انتگرال‌گیری در انتگرال‌های چندگانه، از داخل به خارج است از این رو اولین علامت انتگرال مربوط به آخرین دیفرانسیل و به همین ترتیب دومین انتگرال مربوط به دیفرانسیل ماقبل آخر است، و الی آخر (مسئله ۴۴).

مسائل نمونه فصل ۶

۱. انتگرال نامعین $I = \int x dx$ را در نظر بگیرید، از میان منحنی‌های تابع اولیه این انتگرال، آن منحنی را پیدا کنید که از نقطه $(1, 2)$ بگذرد.

(۱۸-۲). انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

$$\begin{array}{lll}
 ۲) \int ۲(۳x + ۴)^5 dx & ۳) \int x^۲(۴x^۳ + ۷)^۲ dx & ۴) \int ۲^{5x} dx \\
 ۵) \int \frac{x}{x+۴} dx & ۶) \int \sin ۳x \cdot \cos^۲ ۳x dx & ۷) \int \cosh^۲ x dx \\
 ۸) \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx & ۹) \int x \ln x dx & ۱۰) \int x^۲ e^{۳x} dx \\
 ۱۱) \int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[۳]{x}} dx & ۱۲) \int \frac{x dx}{\sqrt{(1+۲x)^۳}} & ۱۳) \int \frac{x+5}{x^۲+x-۲} dx \\
 ۱۴) \int \frac{dx}{\sin x} & ۱۵) \int \cos^۳ x dx & ۱۶) \int \cos^4 x dx \\
 ۱۷) \int \sin ۴x \cdot \cos ۲x dx & ۱۸) \int \sqrt{۴-x^۲} dx &
 \end{array}$$

(۱۹-۲۰). کدام یک از انتگرال‌های زیر وجود ندارند (انتگرال‌پذیر نیست)؟

$$۱۹) \int_1^x \frac{۲}{x-۳} dx \quad ۲۰) \int_{-۲}^x \frac{۲}{\sqrt{x-1}} dx$$

(۲۱-۲۴). در عبارت‌های زیر، مقدار دقیق انتگرال معین را بیابید.

$$\begin{array}{ll}
 ۲۱) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cot x dx & ۲۲) \int_{-1}^{1^+} (xe^{x^2} + \sin x) dx \\
 ۲۳) \int_0^x \left(x - [x] + \frac{1}{x} \right) dx & ۲۴) \int_{-1}^x |x| dx
 \end{array}$$

۲۵. کدام نقطه با توجه به قضیه مقدار میانگین انتگرال‌ها برای تابع $f(x) = x^2$ در فاصله $[0, 2]$ صادق است؟

۲۶. اگر $f(x) = x^2 - x$ ، مقدار متوسط تابع f روی فاصله $[1, 2]$ را بیابید.

(۲۷-۲۸). حاصل انتگرال‌های زیر را بیابید:

$$۲۷) I = \int_0^1 (\sqrt{x} + 1)^2 dx \quad ۲۸) I = \int_1^x \frac{x dx}{x^2 + 1}$$

۲۹. حاصل $\frac{d}{dt} \int_0^{\sqrt{x}} \sin t^2 dt$ را بیابید.

۳۰. اگر $F'(x) = \int_0^x \sqrt{1+t^2} dt$ ، $F(x)$ را بیابید.

۳۱. سطح محصور بین $f(x) = -x^2 + 4$ و محور x ‌ها از $x = -2$ تا $x = 2$ را بیابید.

۳۲. سطح محصور بین $f(x) = x^3 - 4x$ و محور x ‌ها را بیابید.

۳۳. سطح محصور بین خط $y = x$ و منحنی $y = 6 - x^2$ را بیابید.

۳۴. حجم حاصل از دوران $f(x) = x^2$ را حول محور x ‌ها و خط $x = 3$ را بیابید.

۳۵. حجم حاصل از دوران $y^2 = 8x$ و $x = 2$ را بیابید.

۳۶. ناحیه محصور بین منحنی $y = x^2$ ، محور x ‌ها و خط $x = 2$ حول محور y ‌ها دوران کند، حجم جسم حاصل را بیابید.

۳۷. طول قوس منحنی $y = x^{2/3}$ از نقطه $(1, 1)$ تا نقطه $(8, 4)$ را بیابید.

(۳۸-۳۹). انتگرال‌های ناسره زیر را بیابید.

$$۳۸) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x+\delta} \quad ۳۹) \int_{-\infty}^{\delta} (\delta-x)^{-2} dx$$

(۴۰-۴۱). هم‌گرایی انتگرال‌های زیر را بررسی کنید.

$$۴۰) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^{\delta}} \quad ۴۱) \int_0^{\lambda} \frac{dx}{\sqrt{\lambda-x}}$$

(۴۲-۴۳). مقدار انتگرال‌های زیر را بیابید:

$$۴۲) I = \int_1^e \int_1^e \frac{y}{x} dx dy \quad ۴۳) I = \int_1^1 \int_y^1 e^{\frac{x}{y}} dx dy \quad ۴۴) I = \int_1^1 \int_0^{1-x} \int_{xy}^{1+y^2} x dz dy dx$$

پاسخ مسائل نمونه فصل ۶

۱.

$$I = \int x dx = \frac{x^2}{2} + c \Rightarrow y = \frac{x^2}{2} + c \stackrel{(1,1)}{\Rightarrow} 1 = 2 + c \Rightarrow c = -1 \Rightarrow y = \frac{x^2}{2} - 1$$

۲.

$$\int 2(3x+4)^{\delta} dx = \frac{2}{(\delta+1)(3)} (3x+4)^{\delta+1} + c = \frac{1}{3} (3x+4)^{\delta} + c$$

۳.

$$\int x^2 (4x^2 + 7)^2 dx = \frac{1}{12} \int 12x^2 (4x^2 + 7)^2 dx = \frac{1}{36} (4x^2 + 7)^3 + c$$

۴.

$$\int 2^{\delta x} dx = \frac{2^{\delta x}}{\delta \ln 2} + c$$

۵.

$$\int \frac{x}{x+2} dx = \int \frac{x+2-2}{x+2} dx = \int \left(1 - \frac{2}{x+2} \right) dx = x - 2 \ln |x+2| + c$$

۶.

$$\int \sin 2x \cdot \cos^2 2x dx = -\frac{1}{(2+1)(2)} \cos^{2+1} 2x + c = -\frac{1}{3} \cos^3 2x + c$$

۷.

$$\int \cos h^2 x dx = \int \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 dx = \frac{1}{2} \int (e^{2x} + e^{-2x} + 2) dx = \frac{1}{4} e^{2x} - \frac{1}{4} e^{-2x} + \frac{1}{2} x + c$$

۸.

$$u = \sqrt{x} \Rightarrow du = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \Rightarrow 2 du = \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

$$I = \int 2e^u du = 2 \int e^u du = 2e^u + c = 2e^{\sqrt{x}} + c$$

۹

$$u = \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x}, dv = x dx \Rightarrow v = \frac{1}{2}x^2$$

$$\int u dv = uv - \int v du \Rightarrow \int x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{dx}{x} \Rightarrow$$

$$\int x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x dx = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{4} x^2 + c$$

۱۰

$$u = x^2 \Rightarrow du = 2x dx, dv = e^{2x} dx \Rightarrow v = \frac{1}{2}e^{2x}$$

$$\int u dv = uv - \int v du \Rightarrow \int x^2 e^{2x} dx = x^2 \left(\frac{1}{2} e^{2x} \right) - \int \frac{1}{2} e^{2x} (2x) dx = \frac{1}{2} x^2 e^{2x} - \int x e^{2x} dx$$

با به کارگیری مجدد برای انتگرال باقی مانده خواهیم داشت:

$$u = x \Rightarrow du = dx, dv = e^{2x} dx \Rightarrow v = \frac{1}{2}e^{2x}$$

$$\int u dv = uv - \int v du \Rightarrow \int x e^{2x} dx = x \left(\frac{1}{2} e^{2x} \right) - \int \frac{1}{2} e^{2x} dx = \frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x}$$

$$\int x^2 e^{2x} dx = \frac{1}{2} x^2 e^{2x} - \frac{1}{2} x e^{2x} + \frac{1}{4} e^{2x} + c$$

و بالاخره:

۱۱

$$x = t^2 \Rightarrow dx = 2t dt$$

$$I = \int \frac{t^2 \times 2t^2}{1+t^2} dt = 2 \int \frac{t^4}{1+t^2} dt = 2 \int \left(t^2 - \frac{t^2}{1+t^2} \right) dt \Rightarrow$$

$$I = \frac{2}{3} t^3 - \frac{2}{3} \ln(t^2 + 1) + c \Rightarrow I = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} \ln(x^{\frac{3}{2}} + 1) + c$$

۱۲

$$(1 + \sqrt{x}) = t^2 \Rightarrow 2dx = 2t dt, x = \frac{t^2 - 1}{2}$$

$$I = \frac{1}{2} \int \frac{(t^2 - 1)t dt}{t^2} = \frac{1}{2} \int \frac{(t^2 - 1) dt}{t} = \frac{1}{2} \int \frac{(t^2 - 1) dt}{t^2} \Rightarrow$$

$$I = \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{t^2} \right) dt = \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{t} \right) + c = \frac{1}{2} \left(\frac{t^2 + 1}{t} \right) + c \Rightarrow$$

$$I = \frac{1}{2} \left[\frac{(1 + \sqrt{x}) + 1}{(1 + \sqrt{x})^{1/2}} \right] + c = \frac{1}{2} \left(\frac{2 + \sqrt{x}}{\sqrt{1 + \sqrt{x}}} \right) + c$$

۱۳

$$\frac{x + 5}{x^2 + x - 2} = \frac{x + 5}{(x + 2)(x - 1)} = \frac{A}{x + 2} + \frac{B}{x - 1} = \frac{Ax - A + Bx + 2B}{(x + 2)(x - 1)} \Rightarrow$$

$$\frac{x + 5}{(x + 2)(x - 1)} = \frac{(A + B)x - A + 2B}{(x + 2)(x - 1)} \Rightarrow \begin{cases} A + B = 1 \\ -A + 2B = 5 \end{cases} \Rightarrow A = -1, B = 2$$

$$\int \frac{x + 5}{x^2 + x - 2} dx = \int \left(\frac{-1}{x + 2} + \frac{2}{x - 1} \right) dx = -\ln|x + 2| + 2 \ln|x - 1| + c$$

۲۳

$$0 \leq x < 1 \Rightarrow [x] = 0, 1 \leq x < 2 \Rightarrow [x] = 1, 2 \leq x < 3 \Rightarrow [x] = 2$$

$$\begin{aligned} \int_0^3 \left(x - [x] + \frac{1}{3} \right) dx &= \int_0^1 \left(x + \frac{1}{3} \right) dx + \int_1^2 \left(x - \frac{1}{3} \right) dx + \int_2^3 \left(x - \frac{2}{3} \right) dx \\ &= \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x}{3} \right) \Big|_0^1 + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{3} \right) \Big|_1^2 + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{2x}{3} \right) \Big|_2^3 = 5 \end{aligned}$$

۲۴

$$\int_{-1}^2 |x| dx = \int_{-1}^0 -x dx + \int_0^2 x dx = -\frac{x^2}{2} \Big|_{-1}^0 + \frac{x^2}{2} \Big|_0^2 = \frac{5}{2}$$

۲۵

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^c dx &= f(c)(1 - 0) \Rightarrow \frac{1}{c+1} x^{c+1} \Big|_0^1 = 1 \Rightarrow \frac{1}{c+1} = 1 \Rightarrow c+1 = 1 \Rightarrow c = 0 \\ c^2 &= \frac{1}{c} \Rightarrow c = \pm \sqrt{\frac{1}{c}} \Rightarrow c = \frac{1}{\sqrt{c}} \in [0, 1] \quad \text{جواب قابل قبول} \end{aligned}$$

۲۶

$$A.V = \frac{1}{3-1} \int_1^3 (x^3 - x) dx = \left(\frac{1}{4} x^4 - \frac{1}{2} x^2 \right) \Big|_1^3 = \frac{5}{2}$$

۲۷

$$f(x) = (\sqrt{x} + 1)^2 = x + 2\sqrt{x} + 1 \Rightarrow F(x) = \frac{1}{3} x^{\frac{3}{2}} + \frac{4}{5} x^{\frac{5}{2}} + x + c$$

$$F(1) = \frac{11}{5} + c, F(0) = c$$

$$\int_0^1 (\sqrt{x} + 1)^2 dx = F(1) - F(0) = \frac{11}{5} + c - c = \frac{11}{5}$$

۲۸. تغییر متغیر $u = 2 + x^2$ می‌دهیم، آن‌گاه $du = 2x dx$ با تغییر دادن حدود برای محاسبه انتگرال برحسب u ، وقتی $x = 2$ ، $u = 6$ و وقتی $x = 4$ ، $u = 18$ بنابراین:

$$I = \int_2^4 \frac{x dx}{2 + x^2} = \frac{1}{2} \int_6^{18} \frac{du}{u} = \frac{1}{2} \ln u \Big|_6^{18} = \frac{1}{2} \ln(18) - \frac{1}{2} \ln(6) \Rightarrow I = \frac{1}{2} \ln 3$$

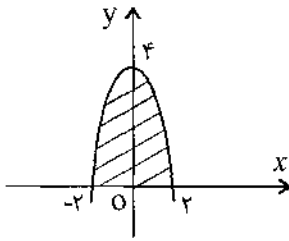
۲۹

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} \sin t^2 dt &= \sin(2\sqrt{x})^2 \cdot \frac{d(2\sqrt{x})}{dx} - \sin(\sqrt{x})^2 \cdot \frac{d(\sqrt{x})}{dx} \\ &= \sin^2 x \cdot \frac{2}{\sqrt{x}} - \sin^2 x \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\sin^2 x}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

۳۰. با استفاده از نمادهای قضیه داریم $f(t) = \sqrt{1+t^2}$ و بنابراین:

$$F'(x) = f(x) = \sqrt{1+x^2}$$

۳۱



$$-x^2 + 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

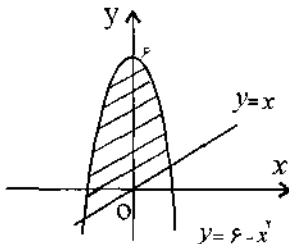
$$S = \int_{-2}^2 (-x^2 + 4) dx = \left(-\frac{x^3}{3} + 4x + c \right) \Big|_{-2}^2$$

$$S = \left(-\frac{8}{3} + 8 + c \right) - \left(\frac{8}{3} - 8 + c \right) = \frac{32}{3}$$

۳۲

$$\text{محور } x \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 2, x = -2$$

$$S = \left| \int_{-2}^0 (x^2 - 4x) dx \right| + \left| \int_0^2 (x^2 - 4x) dx \right| = \left| \left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 \right) \Big|_{-2}^0 \right| + \left| \left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 \right) \Big|_0^2 \right| = 8$$



۳۳ نقاط تقاطع خط و منحنی را به دست می آوریم:

$$4 - x^2 = x \Rightarrow x^2 + x - 4 = 0 \Rightarrow (x - 2)(x + 2) = 0 \Rightarrow x = 2, x = -2$$

$$S = \int_{-2}^2 (4 - x^2 - x) dx = \left(4x - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + c \right) \Big|_{-2}^2 = \frac{125}{6}$$

۳۴

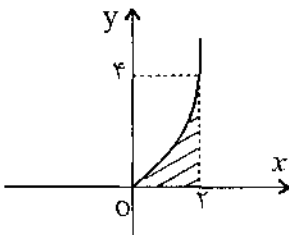
$$V = \int_0^{\pi} \pi (x^2)^2 dx = \int_0^{\pi} \pi x^4 dx = \left(\frac{\pi x^5}{5} + c \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{242}{5} \pi$$

۳۵

$$y^2 = 4x = 4 \times 1 \Rightarrow y^2 = 4 \Rightarrow y = \pm 2$$

$$V = \int_{-2}^2 \pi \left(\frac{y^2}{4} \right)^2 dy = \pi \int_{-2}^2 \frac{y^4}{16} dy = \left(\frac{\pi}{16 \times 5} y^5 + c \right) \Big|_{-2}^2 = \frac{32}{5} \pi$$

۳۶



$$V = \int_0^r \pi x (x^2) dx = \int_0^r \pi x^3 dx = \left(\frac{\pi x^4}{4} + c \right) \Big|_0^r \Rightarrow V = \frac{\pi r^4}{4}$$

۳۷

$$L = \int_1^4 \sqrt{1 + \frac{1}{4x^{2/3}}} dx = \frac{1}{4} \int_1^4 \frac{\sqrt{4x^{2/3} + 1}}{x^{1/3}} dx$$

$$u = 4x^{2/3} + 1 \Rightarrow du = \frac{2}{3} x^{-1/3} dx, x = 1 \Rightarrow u = 5, x = 4 \Rightarrow u = 17$$

$$L = \frac{1}{12} \int_5^{17} u^{-1/2} du = \frac{1}{12} \left(\frac{2}{1} u^{1/2} \right) \Big|_5^{17} \approx 1.76$$

۳۸

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x+\delta} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x+\delta} = \ln|x+\delta| \Big|_1^b = \ln|b+\delta| - \ln|1+\delta|$$

وقتی که $b \rightarrow +\infty$ و $\ln|b+\delta| \rightarrow +\infty$ در نتیجه انتگرال واگرا و فاقد معناست.

۳۹

$$\int_{-\infty}^{\delta} (\delta-x)^{-\gamma} dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^{\delta} (\delta-x)^{-\gamma} dx = (\delta-x)^{-\gamma} \Big|_a^{\delta} = \frac{1}{\delta} - \frac{1}{\delta-a}$$

وقتی که $a \rightarrow -\infty$ ، $\delta-a \rightarrow \infty$ در نتیجه انتگرال همگرا و برابر $1/\delta$ است.

۴۰

$$\forall x \geq 1, 0 < \frac{1}{1+x^\delta} < \frac{1}{x^\delta} \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\delta} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{1}{x^\delta} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{\delta x^{\delta-1}} \right) \Big|_1^b = \frac{1}{\delta}$$

در نتیجه انتگرال موردبررسی همگرا می‌باشد.

۴۱. تابع $f(x) = 1/\sqrt{\lambda-x}$ در فاصله $[0, \lambda)$ پیوسته و $\lim_{x \rightarrow \lambda^-} 1/\sqrt{\lambda-x} = +\infty$ بنابراین:

$$\begin{aligned} \int_{\epsilon}^{\lambda} \frac{dx}{\sqrt{\lambda-x}} &= \lim_{\epsilon \rightarrow +} \int_{\epsilon}^{\lambda-\epsilon} \frac{dx}{\sqrt{\lambda-x}} = \lim_{\epsilon \rightarrow +} (-2(\lambda-x)^{\frac{1}{2}}) \Big|_{\epsilon}^{\lambda-\epsilon} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow +} \left\{ -2(\lambda - (\lambda - \epsilon))^{\frac{1}{2}} - (-2(\lambda - \epsilon)^{\frac{1}{2}}) \right\} = 2\sqrt{\lambda} \Rightarrow \text{انتگرال همگرا و مقدار آن } 2\sqrt{\lambda} \text{ است.} \end{aligned}$$

راه ساده‌تر:

$$\int_{\epsilon}^{\lambda} \frac{dx}{\sqrt{\lambda-x}} = \lim_{b \rightarrow \lambda^-} \int_{\epsilon}^b (\lambda-x)^{-\frac{1}{2}} dx = -2(\lambda-x)^{\frac{1}{2}} \Big|_{\epsilon}^b = -2\sqrt{\lambda-b} + 2\sqrt{\lambda}$$

وقتی $b \rightarrow \lambda^-$ ، $-2\sqrt{\lambda-b} \rightarrow 0$. در نتیجه انتگرال همگرا و مقدار آن $2\sqrt{\lambda}$ است.

۴۲

$$I = \int_{\epsilon}^1 y(\ln x) \Big|_{\epsilon}^1 dy = \int_{\epsilon}^1 y(1-0) dy = \int_{\epsilon}^1 y dy = \frac{y^2}{2} \Big|_{\epsilon}^1 = \frac{1}{2}$$

۴۳. از آنجاکه نمی‌توان $\int e^{y/x} dx$ را محاسبه نمود، لذا ترتیب انتگرال‌گیری را عوض

می‌کنیم و ناحیه انتگرال‌گیری را به صورت $0 \leq y \leq x$ و $0 \leq x \leq 1$ داریم:

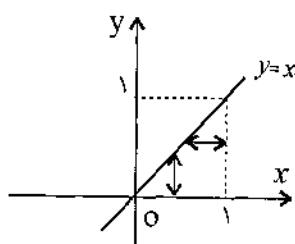
$$I = \int_{\epsilon}^1 \int_{\epsilon}^x e^{y/x} dy dx = \int_{\epsilon}^1 x e^{y/x} \Big|_{\epsilon}^x dx = \int_{\epsilon}^1 (xe) dx = \frac{e}{2} x^2 \Big|_{\epsilon}^1 = \frac{e}{2}$$

۴۴

$$I = \int_{\epsilon}^1 \int_{\epsilon}^{1-x} x(1+y^r - y^r) dy dx = \int_{\epsilon}^1 x \left(y + \frac{1}{r+1} y^{r+1} - y^r \right) \Big|_{\epsilon}^{1-x} dx \Rightarrow$$

$$I = \int_{\epsilon}^1 \left(x(1-x) + \frac{1}{r+1} x(1-x)^{r+1} - x(1-x+x^r) \right) dx \Rightarrow$$

$$I = \left(\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{r+2} x^{r+2} + \frac{1}{r+1} x^{r+1} - \frac{1}{r+1} x^{r+1} + \frac{1}{r+1} x^{r+1} - \frac{1}{r+1} x^{r+1} \right) \Big|_{\epsilon}^1 = \frac{1}{r+1}$$



سؤالات تستی فصل ۶

۱- حاصل $\int \frac{e^{2x} + 1}{e^x + 1} dx$ کدام است؟

$$e^{2x} + e^x + x + c \quad (۴) \quad \frac{1}{2}e^{2x} + e^x + x + c \quad (۳) \quad e^{2x} - e^x + x + c \quad (۲) \quad \frac{1}{2}e^{2x} - e^x + x + c \quad (۱)$$

۲- حاصل $\int \frac{(1+x)^2}{1+x^2} dx$ کدام است؟

$$x^2 - \ln(x^2 + 1) + c \quad (۴) \quad x^2 + 2x + c \quad (۳) \quad \ln(x^2 + 1) + c \quad (۲) \quad x + \ln(1 + x^2) + c \quad (۱)$$

۳- حاصل $\int \sin h^2 x dx$ کدام است؟

$$\frac{1}{\lambda} e^{2x} - \frac{1}{\lambda} e^{-2x} - \frac{1}{2} x + c \quad (۲) \quad \frac{1}{2} e^{2x} + \frac{1}{2} e^{-2x} - \frac{1}{2} x + c \quad (۱) \\ \frac{1}{\lambda} e^{2x} + \frac{1}{\lambda} e^{-2x} - \frac{1}{2} x + c \quad (۴) \quad \frac{1}{2} e^{2x} - \frac{1}{2} e^{-2x} - \frac{1}{2} x + c \quad (۳)$$

۴- حاصل $\int \frac{x^2}{1+x^2} dx$ کدام است؟

$$x - \operatorname{Arctan} x + c \quad (۴) \quad x + \operatorname{Arccot} x + c \quad (۳) \quad x - \operatorname{Arccot} x + c \quad (۲) \quad x + \operatorname{Arctan} x + c \quad (۱)$$

۵- حاصل انتگرال $\int \sin hx \cdot \sin h^2 x \cdot dx$ در صورتی که $c = 1$ فرض شود به ازای $x = 0$ کدام است؟

$$3 \quad (۴) \quad 2 \quad (۳) \quad 1 \quad (۲) \quad 0 \quad (۱)$$

۶- حاصل $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$ کدام است؟

$$\operatorname{Arccos} e^x + c \quad (۴) \quad \operatorname{Arc} \tan e^x + c \quad (۳) \quad \operatorname{Arc} \sin e^x + c \quad (۲) \quad \operatorname{Arc} \cot e^x + c \quad (۱)$$

۷- اگر حاصل انتگرال $\int x \sqrt{x} dx$ به ازاء $x = 1$ برابر ۲ باشد، عدد ثابت انتگرال گیری چه قدر است؟

$$-\frac{11}{9} \quad (۴) \quad -\frac{9}{11} \quad (۳) \quad \frac{11}{9} \quad (۲) \quad \frac{9}{11} \quad (۱)$$

۸- اگر ثابت انتگرال گیری $c = 1$ فرض شود، انتگرال $\int dx/x \ln x \ln(\ln x)$ کدام است؟

$$\frac{x}{\ln x} + 1 \quad (۴) \quad x \ln(\ln x) + 1 \quad (۳) \quad \ln \ln(\ln x) + 1 \quad (۲) \quad \ln x + 1 \quad (۱)$$

۹- اگر $I(x) = \int x e^{-x} dx$ و ثابت انتگرال گیری $c = 1$ باشد، $I(1)$ کدام است؟

$$2e^{-1} + 1 \quad (۴) \quad -2e + 1 \quad (۳) \quad \frac{2-e}{e} \quad (۲) \quad \frac{e-2}{e} \quad (۱)$$

۱۰- تابع اولیه، تابع $y = \operatorname{Arctan} x dx$ کدام است؟

$$x \operatorname{Arccot} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + c \quad (۲) \quad x \operatorname{Arctan} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + c \quad (۱) \\ x \operatorname{Arccot} x - \ln(1+x^2) + c \quad (۴) \quad x \operatorname{Arctan} x - \ln(1+x^2) + c \quad (۳)$$

۱۱- اگر حاصل انتگرال $\int \ln x dx$ به ازای $x = 1$ برابر ۱ باشد، عدد ثابت انتگرال گیری چه قدر است؟

$$3 \quad (۴) \quad 2 \quad (۳) \quad 1 \quad (۲) \quad 0 \quad (۱)$$

۱۲- حاصل $\int e^{\sqrt{x}} dx$ کدام است؟

$$2e^{\sqrt{x}} + c \quad (۴) \quad 2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1) + c \quad (۳) \quad 2\sqrt{x}e^{\sqrt{x}} + c \quad (۲) \quad 2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}+1) + c \quad (۱)$$

۱۳- حاصل $\int \sqrt{x} \ln x dx$ کدام است؟

$$\frac{2}{3} x \sqrt{x} \ln x + \frac{4}{9} x \sqrt{x} + c \quad (۲) \quad \frac{2}{3} x \sqrt{x} \ln x - \frac{4}{9} x \sqrt{x} + c \quad (۱) \\ x \sqrt{x} \ln x + x \sqrt{x} + c \quad (۴) \quad x \sqrt{x} \ln x - x \sqrt{x} + c \quad (۳)$$

$$-۱۴ \quad I = \int dx/(1+x^2) \quad \text{کدام است؟}$$

$$\frac{1}{2} \operatorname{Arctan} \left(\frac{x}{2} \right) + c \quad (2)$$

$$\frac{1}{2} \operatorname{Arcsin} \left(\frac{x}{2} \right) + c \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} \operatorname{Arccot} \left(\frac{x}{2} \right) + c \quad (4)$$

$$\frac{1}{2} \operatorname{Arccos} \left(\frac{x}{2} \right) + c \quad (3)$$

$$-۱۵ \quad \text{انتگرال نامعین} \int \sin(\ln x) dx \text{ به وسیله کدام یک از جایگزین‌های زیر قابل محاسبه است؟}$$

$$x = t \quad (2)$$

$$\ln \sin x = t \quad (3)$$

$$\sin \ln x = t \quad (2)$$

$$\ln x = t \quad (1)$$

$$-۱۶ \quad \text{تابع اولیه} f(x) = (\ln x)^2 dx \text{ کدام است؟}$$

$$F(x) = 2x(\ln x)^2 - x(\ln x) + 2x + c \quad (2)$$

$$F(x) = x(\ln x)^2 - 2x(\ln x) + 2x + c \quad (1)$$

$$F(x) = x(\ln x)^2 - x(\ln x) + 2x + c \quad (4)$$

$$F(x) = (\ln x)^2 - 2(\ln x) + 2x + c \quad (3)$$

$$-۱۷ \quad \text{حاصل} \int x^5 \ln(3x) dx \text{ کدام است؟}$$

$$\frac{1}{6} x^6 - \ln(3x) - x^6 + c \quad (2)$$

$$\frac{1}{6} x^6 \ln(3x) - \frac{1}{6} x^6 + c \quad (1)$$

$$x^6 \ln(3x) - x^7 + c \quad (4)$$

$$\frac{1}{6} x^6 \ln(3x) - \frac{1}{36} x^6 + c \quad (3)$$

$$-۱۸ \quad \text{تابع اولیه} f(x) = 2^{2-x} \text{ کدام است؟}$$

$$F(x) = -\frac{e^{2-x}}{\ln 2} + c \quad (4) \quad F(x) = \frac{e^{2-x}}{\ln 2} + c \quad (3)$$

$$F(x) = -\frac{2^{2-x}}{\ln 2} + c \quad (2) \quad F(x) = \frac{2^{2-x}}{\ln 2} + c \quad (1)$$

$$-۱۹ \quad \text{تابع اولیه} y = x \sin hx \text{ کدام است؟}$$

$$x \sin hx - \cos hx + c \quad (2)$$

$$x \cos hx - \sin hx + c \quad (1)$$

$$x \cos hx + \sin hx + c \quad (4)$$

$$\cos hx - x \sin hx + c \quad (3)$$

$$-۲۰ \quad \text{اگر} f(x) = \sin^2 x \cos x \text{ باشد، آن‌گاه} F(x) \text{ کدام است؟}$$

$$\sin^3 x + c \quad (4)$$

$$\cos^3 x + c \quad (3)$$

$$-\sin^3 x + c \quad (2)$$

$$-\cos^3 x + c \quad (1)$$

$$-۲۱ \quad \text{حاصل} \int_1^2 dx/(x^2 - x^3) \text{ کدام است؟}$$

$$1 \quad (4)$$

$$\ln 6 \quad (3)$$

$$\frac{1}{6} \ln 3 \quad (2)$$

$$\frac{1}{12} \ln 3 \quad (1)$$

$$-۲۲ \quad \text{اگر} dy/dx = (x+1)^{-2} \text{ باشد، آن‌گاه تابع} y \text{ که در آن} y(0) = 1 \text{ کدام است؟}$$

$$\frac{2x+1}{x+1} \quad (4)$$

$$\frac{x+2}{x+1} \quad (3)$$

$$\frac{2x-1}{x+1} \quad (2)$$

$$\frac{x-2}{x+1} \quad (1)$$

$$-۲۳ \quad \text{حاصل} \int \sin x \cdot \cos^{1/2} x dx \text{ کدام است؟}$$

$$\frac{2}{\delta} \cos^{3/2} x + c \quad (4)$$

$$-\frac{2}{\delta} \sin^{3/2} x + c \quad (3)$$

$$\frac{2}{\delta} \sin^{3/2} x + c \quad (2)$$

$$-\frac{2}{\delta} \cos^{3/2} x + c \quad (1)$$

$$-۲۴ \quad \text{حاصل} \int x^2 \sqrt[3]{y - 4x^2} dx \text{ کدام است؟}$$

$$\frac{\delta}{\sqrt[3]{2}} (y - 4x^2)^{2/3} + c \quad (2)$$

$$-\frac{1}{\sqrt[3]{2}} (y - 4x^2)^{2/3} + c \quad (1)$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2}} (y - 4x^2)^{2/3} + c \quad (4)$$

$$-\frac{\delta}{\sqrt[3]{2}} (y - 4x^2)^{2/3} + c \quad (3)$$

$$-۲۵ \quad \text{حاصل} \int \sin x \sqrt{1 - \cos x} dx \text{ برابر است با:}$$

$$\frac{2}{3} (1 - \cos)^{3/2} + c \quad (2)$$

$$\frac{2}{3} (1 - \sin x)^{3/2} + c \quad (1)$$

$$\frac{2}{3} (1 - \sin x)^{3/2} + c \quad (4)$$

$$\frac{2}{3} (1 - \cos x)^{3/2} + c \quad (3)$$

۲۶- اگر $I(x) = \int e^{\ln x} dx$ و ثابت انتگرال گیری $c = 1$ باشد، $I(1)$ کدام است؟

۱ (۱) $\frac{3}{4} (2) \quad 0 (3) \quad \frac{1}{4} (4)$

۲۷- اگر $f(x) = x^2 e^{-x}$ باشد، تابع اولیه $f(x)$ کدام است؟

$F(x) = -e^{-x}(x^2 - 2x - 2) + c (2) \quad F(x) = e^{-x}(x^2 + 2x + 2) + c (1)$
 $F(x) = e^{-x}(x^2 - 2x - 2) + c (4) \quad F(x) = -e^{-x}(x^2 + 2x + 2) + c (3)$

۲۸- تابع اولیه $\cos^2 x + \sin x$ کدام است؟

$\frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x + \cos x + c (2) \quad \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x - \cos x + c (1)$
 $\frac{x}{2} + \frac{1}{4} \cos 2x - \sin x + c (4) \quad \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x - \cos x + c (3)$

۲۹- $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$ و $F(x)$ تابع اولیه $f(x)$ و $F(1) = 1$ است، $F(0)$ چه قدر است؟

$-2 (4) \quad 0 (3) \quad 2 (2) \quad 4 (1)$

۳۰- حاصل $\int dx/x^2(1+x)$ کدام است؟

$\frac{1}{x} + \ln \frac{x}{x+1} + c (2) \quad \frac{1}{x} + \ln \frac{x+1}{x} + c (1)$
 $-\frac{1}{x} + \ln \frac{x+1}{x} + c (4) \quad -\frac{1}{x} + \ln \frac{x}{x+1} + c (3)$

۳۱- اگر ثابت انتگرال گیری $c = -1$ فرض شود، حاصل انتگرال $\int x e^x dx / (x+1)^2$ به ازای $x = 0$ کدام است؟

$2 (4) \quad \infty (3) \quad 1 (2) \quad 0 (1)$

۳۲- تابع اولیه $y = \sin 2x \cos 2x$ برابر است با:

$-\frac{1}{12} \cos 2x - \frac{1}{4} \sin 2x + c (2) \quad \frac{1}{12} \sin 2x + \frac{1}{4} \sin 2x + c (1)$
 $-\frac{1}{12} \cos 2x - \frac{1}{4} \cos 2x + c (4) \quad \frac{1}{12} \cos 2x + \frac{1}{4} \cos 2x + c (3)$

۳۳- اگر $f(x) = \int dx/x \ln x$ و $F(x)$ تابع اولیه $f(x)$ باشد، حاصل $F(e^2) - F(e)$ کدام است؟

$e^2 (4) \quad e (3) \quad \ln 2 (2) \quad 2e (1)$

۳۴- انتگرال $\tan^2 x$ کدام است؟

$x - \frac{1}{3} \tan^2 x + \tan x + c (2) \quad x - \frac{1}{3} \tan^2 x - \tan x + c (1)$
 $x + \frac{1}{3} \tan^2 x + \tan x + c (4) \quad x + \frac{1}{3} \tan^2 x - \tan x + c (3)$

۳۵- اگر $f(mx+n) = \int 2f(mx-1)dx + c$ آن گاه $m+n$ کدام است؟

$3 (4) \quad 2 (3) \quad 4 (2) \quad 1 (1)$

۳۶- اگر $F(x) = \int f(x)dx$ ، آنگاه $\int f(ax+b)dx$ کدام است؟

$aF(ax+b) + c (4) \quad \frac{1}{a}F(ax+b) + c (3) \quad -F(ax+b) + c (2) \quad F(ax+b) + c (1)$

۳۷- کدام تابع بر بازه $[0, 1]$ انتگرال پذیر نیست؟

$\ell(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} (4) \quad h(x) = [x] (3) \quad g(x) = \left| x - \frac{1}{2} \right| (2) \quad f(x) = \frac{1}{x+2} (1)$

- ۳۸- حاصل انتگرال $\int_0^5 [x] dx$ برابر است با: ۱ (۱) ۵ (۲) ۱۰ (۳) ۴ (نامعین)
- ۳۹- حاصل انتگرال $\int_1^2 [x-2] dx$ برابر است با: ۱ (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) ۴ (۳) $\frac{9}{2}$ (۴)
- ۴۰- حاصل $I = \int_0^2 \sqrt{2-x^2} dx$ برابر است با: π (۱) $\frac{\pi}{2}$ (۲) 2π (۳) ۰ (۴)
- ۴۱- حاصل $\int \frac{\sin x}{\sqrt{1+\tan^2 x}} dx$ ، آنگاه $f(x) = F(\pi) - F(\pi/2)$ برابر است با: ۰ (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) ۱ (۴)
- ۴۲- حاصل $\int_{\pi/2}^{\pi} \sqrt{1+\sin^2 x} dx$ برابر است با: ۰ (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) $\sqrt{2}$ (۴)
- ۴۳- حاصل $I = \int_{-\pi}^{\pi} x^{11} \sin^2 x dx$ برابر است با: ۱ (۱) -۱ (۲) π^2 (۳) ۴ (صفر)
- ۴۴- در تابع $f(x) = \begin{cases} 2x & 0 < x < 1 \\ 1 & x = 1 \\ 2x - 1 & 1 < x < 2 \end{cases}$ مقدار $\int_1^2 f(x) dx$ برابر است با: $\frac{3}{2}$ (۱) ۲ (۲) $\frac{5}{2}$ (۳) ۴ (۴)
- ۴۵- اگر $\int_0^a 2x^2 dx = 27$ مقدار a کدام است؟ ۸ (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴)
- ۴۶- مقدار انتگرال معین $\int_0^2 x f''(x) dx$ کدام است؟ $2f'(2) - f(2) + f(0)$ (۱) $2f''(2) - f'(2) + f(2)$ (۳) $2f'(2) + f(2) - f(0)$ (۲) $f'(2) - f(2) + f(0)$ (۴)
- ۴۷- حاصل انتگرال $\int_{-0.75}^{0.75} \cos \ln \frac{2+x}{2-x} dx$ کدام است؟ ۰ (۱) 0.75 (۲) 0.75 (۳) 0.75 (۴)
- ۴۸- حاصل $\int_{1/2}^1 [1/x] dx/x^2$ کدام است؟ $-\frac{1}{2}$ (۱) ۲ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) ۱ (۴)
- ۴۹- حاصل $I = \int_0^1 x dx/(x+2)$ کدام است؟ $1 + 2 \ln 2$ (۱) $1 + 2 \ln 3$ (۲) $1 + 2 \ln \frac{3}{2}$ (۴) $1 + 2 \ln \frac{2}{3}$ (۳)
- ۵۰- حاصل $\frac{d}{dx} \int_1^{\sin x} (t^2 + 1)^2 dt$ کدام است؟ $\cos x (\sin^2 x + 1)^2$ (۱) $1 - \cos x (\sin^2 x + 1)^2$ (۳) $\sin x (\cos^2 x + 1)^2$ (۲) $1 - \sin x (\cos^2 x + 1)^2$ (۴)

۵۱- انتگرال معین $I = \int_0^1 x dx / \sqrt{1+x}$ برابر است با:

۱) $\frac{3}{10}$ ۲) $\frac{10}{3}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{2}{3}$

۵۲- حاصل $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_x^{2x} dt/t$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) e^2 ۳) $\ln 2$ ۴) وجود ندارد.

۵۳- مقدار $I = \int_{\pi/4}^{\pi/2} (\tan x + \cot x)^2 dx$ برابر است با:

۱) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ۲) $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ۳) $\sqrt{3} + 1$ ۴) $-\sqrt{3} + 1$

۵۴- کدام یک از انتگرال‌های زیر وجود دارد؟

۱) $\int_0^{\pi/2} \sec x dx$ ۲) $\int_{-2}^0 \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$ ۳) $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$ ۴) $\int_0^2 \frac{x^2-1}{x-1} dx$

۵۵- اگر منحنی تابع $f(x)$ از نقاط $(0, 0)$ و $(1, 1)$ بگذرد و $f'(x)$ پیوسته باشد، مقدار $\int_0^1 f'(x) dx$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) ۲

۵۶- اگر $f(x) = \int_{27}^x t^{-2/3} dt$ ، $x > 27$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) وجود ندارد

۵۷- اگر $F(x) = \int (x^2 + x) dx + c$ مقدار $F''(2)$ کدام است؟

۱) ۱۳ ۲) ۵ ۳) ۴ ۴) ۱۵

۵۸- حاصل $\int_0^{\pi/2} (\sin x + \cos x)[\sin x + \cos x] dx$ کدام است؟ (علامت $[\dots]$ جزء صحیح است)

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) -۱

۵۹- حاصل $I, I = \int_1^{\infty} 2 dx/x$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) $2 \ln 2$ ۳) ۲ ۴) هیچ کدام

۶۰- طول قوس منحنی $y = \ln(\sec x)$ در فاصله $[0, \pi/3]$ کدام است؟

۱) $2 + \sqrt{3}$ ۲) $\ln(2 + \sqrt{3})$ ۳) $\sqrt{3} + 2$ ۴) $\ln(\sqrt{3} + 2)$

۶۱- کدام یک از گزاره‌های زیر درست است؟

۱) $\int_0^1 \sqrt{x} dx < \int_0^1 x^2 dx$ ۲) $\int_0^1 \sqrt{x} dx > \int_0^1 x^2 dx$ ۳) $\int_0^1 \sqrt{x} dx = \int_0^1 x^2 dx$ ۴) $\int_0^1 \sqrt{x} dx \leq \int_0^1 x^2 dx$

۶۲- اکسپرم‌های تابع $f(x) = \int_0^x te^{-t} dt$ در کدام نقطه اتفاق می‌افتد؟

۱) $(0, 0)$ ۲) $(0, 1)$ ۳) $(1, 0)$ ۴) $(1, 1)$

۶۳- مقدار میانگین $f(x) = \tan x$ در فاصله $[0, \pi/4]$ کدام است؟

۱) $\pi \ln 2$ ۲) $\frac{2 \ln 2}{\pi}$ ۳) $\frac{\ln 2}{\pi}$ ۴) $\frac{\ln 2}{2\pi}$

۶۴- طول نقطه عطف نمودار تابع $y = \int_0^x (t^2 - 3t + 2) dt$ کدام است؟

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) ۰ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) ۱

۶۵- اگر $0 < x < 1$ باشد، کدام یک از گزاره‌های زیر درست است؟

$$\int_1^x \frac{dt}{t} < 1 \quad (۴) \quad \int_1^x \frac{dt}{t} > 1 \quad (۳) \quad \int_1^x \frac{dt}{t} < 0 \quad (۲) \quad \int_1^x \frac{dt}{t} > 0 \quad (۱)$$

۶۶- اگر $y = \frac{1}{x} x^2 - \frac{1}{x} \ln x$ ، حاصل انتگرال معین $\int_1^x \sqrt{1 + (y')^2} dx$ کدام است؟

$$-\frac{1}{x} \ln 2 \quad (۴) \quad \ln \frac{1}{x} \quad (۳) \quad \frac{2}{x} + \frac{1}{x} \ln 2 \quad (۲) \quad \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \ln 2 \quad (۱)$$

۶۷- حاصل $\int_{-\infty}^{\infty} x e^x dx$ کدام است؟

$$-2 \quad (۱) \quad 2 \quad (۲) \quad 0 \quad (۳) \quad ۴ \quad (۴) \quad \text{نامعین} \quad (۵)$$

۶۸- حاصل انتگرال $I = \int_1^e \frac{(\ln x)^2 dx}{x}$ کدام است؟

$$\frac{1}{3} \quad (۱) \quad \frac{1}{2} \quad (۲) \quad \frac{1}{6} \quad (۳) \quad ۱ \quad (۴)$$

۶۹- حاصل انتگرال $I = \int_0^{\pi/2} \sin^3 x \cos^2 x dx$ کدام است؟

$$\frac{2}{5} \quad (۱) \quad \frac{5}{2} \quad (۲) \quad \frac{1}{3} \quad (۳) \quad \frac{2}{3} \quad (۴)$$

۷۰- اگر $f''(x) = \sin(x/2)$ باشد، $f(x)$ کدام است؟

$$-\frac{1}{x} \sin \frac{x}{2} + 2x + d \quad (۱) \quad -4 \sin \frac{x}{2} + c \quad (۲) \quad 4 \sin \frac{x}{2} + 2x \quad (۳) \quad -4 \sin \frac{x}{2} + cx + d \quad (۴)$$

۷۱- در معادله ضمنی $\int_y^x e^t dt + \int_0^x \cos t dt = 0$ مشتق تابع y نسبت به x کدام است؟

$$\frac{\sin y}{e^x} \quad (۴) \quad -\frac{\cos x}{e^y} \quad (۳) \quad \frac{\sin x}{e^y} \quad (۲) \quad -\frac{\cos y}{e^x} \quad (۱)$$

۷۲- حاصل انتگرال $\int_{-1}^1 |x| dx$ کدام است؟

$$0 \quad (۱) \quad ۹۹ \quad (۲) \quad ۹۹^2 \quad (۳) \quad \frac{۹۹}{2} \quad (۴)$$

۷۳- در انتگرال زیر که با روش تجزیه کسر انجام گرفته مقادیر A و B کدامند؟

$$\int \frac{1}{x^2 - 9} dx = \int \frac{A}{x - 3} dx + \int \frac{B}{x + 3} dx$$

$$B = -\frac{1}{3}, A = \frac{1}{3} \quad (۴) \quad B = \frac{1}{6}, A = -\frac{1}{6} \quad (۳) \quad B = -\frac{1}{6}, A = \frac{1}{6} \quad (۲) \quad B = 3, A = -3 \quad (۱)$$

۷۴- اگر $F(t) = \int_0^t \frac{\sin(tx) dx}{x}$ ، آنگاه dF/dt برابر است با:

$$t \sin t \quad (۴) \quad \frac{\sin tx}{x} \quad (۳) \quad \frac{2 \sin t^2}{t} \quad (۲) \quad \int_0^t \cos(tx) dx \quad (۱)$$

۷۵- مقدار انتگرال $\int_{-1}^1 dx/x^2$ برابر است با:

$$-2 \quad (۱) \quad 2 \quad (۲) \quad ۳ \quad (۳) \quad ۴ \quad (۴) \quad \text{صفر} \quad (۵)$$

۷۶- مقدار انتگرال $I = \int_0^1 \ln x dx$ برابر است با:

$$-1 \quad (۴) \quad 0 \quad (۳) \quad 1 \quad (۲) \quad 2 \quad (۱)$$

۷۷- مقدار انتگرال $\int_{-1}^1 dx/\sqrt{4 - x^2}$ برابر است با:

$$\frac{\pi}{2} \quad (۴) \quad \frac{1}{2} \quad (۳) \quad \frac{\pi}{4} \quad (۲) \quad \frac{1}{4} \quad (۱)$$

۷۸- مقدار انتگرال $\int_0^2 2x^2 x^x dx$ به طور تقریب کدام یک از مقادیر زیر است؟ ($\ln 2 = 0.6932$)

- (۱) ۱۲۲٫۶۳ (۲) ۱۴۷٫۸۲ (۳) ۱۰۲٫۲۱ (۴) ۱۳۹٫۱۸

۷۹- اگر $\int_1^A dx/(x^2 + x) = \ln A$ ، آنگاه عدد A کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{4}$ (۲) $\frac{4}{3}$ (۳) $\frac{5}{4}$ (۴) $\frac{4}{5}$

۸۰- در انتگرال معین $A = \int_0^1 (2x^2 + 2x + 1) dx / (x^2 + 1)$ مقدار A برابر است با:

- (۱) $\frac{\pi}{4}$ (۲) $1 + \frac{\pi}{4}$ (۳) $1 + \frac{\pi}{2}$ (۴) $\frac{\pi}{2}$

۸۱- $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_x^\infty \sin t^2 dt / x^2$ برابر است با:

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) صفر

۸۲- $I = \int \cos \sqrt{x} dx / \sqrt{x}(1 + \sin \sqrt{x})$ کدام است؟

- (۱) $2 \ln(1 + \sin \sqrt{x}) + c$ (۲) $\ln(1 + \sin \sqrt{x}) + c$
(۳) $2 \ln(1 + \cos \sqrt{x}) + c$ (۴) $\ln(1 + \cos \sqrt{x}) + c$

۸۳- انتگرال $\int \sin 2x dx / \sqrt{4 - \cos^2 x}$ برابر است با:

- (۱) $\sin^{-1} \frac{\cos^2 x}{2} + c$ (۲) $\sin^{-1} \frac{\cos^2 x}{2} + c$ (۳) $-\cos^{-1} \frac{\sin^2 x}{2} + c$ (۴) $-\sin^{-1} \frac{\cos^2 x}{2} + c$

۸۴- اگر $\int \frac{(x^2 - 1) dx}{x^3} = f(x)/x + c$ ، آنگاه $f(x)$ کدام است؟

- (۱) $x^2 + 1$ (۲) $x^2 - 2$ (۳) $2x + 1$ (۴) $x - 2$

۸۵- اگر $\int_1^x t^2 dt = f(x)$ ، آنگاه $f''(x)$ کدام است؟

- (۱) $(\ln x + 1)f'(x)$ (۲) $\ln x f'(x)$ (۳) $e^{x \ln x} f'(x)$ (۴) $x \ln x f'(x)$

۸۶- کدام نقطه با توجه به قضیه مقدار میانگین انتگرال‌ها برای تابع $f(x) = 1/x$ در فاصله $[1, 2]$ صادق است؟

- (۱) $\ln 2$ (۲) $\frac{1}{\ln 2}$ (۳) 2 (۴) 0

۸۷- معادله منحنی‌یی که شیب آن برابر $dy/dx = e^x(x + 1)$ باشد و از مبدأ مختصات بگذرد، کدام است؟

- (۱) $y = xe^x + 1$ (۲) $y = xe^x - e^x$ (۳) $y = xe^x$ (۴) $y = x + 1$

۸۸- معادله منحنی‌یی را که در آن $y''' = 4$ باشد و در نقطه $(0, 2)$ دارای شیب صفر و در $(-1, 10/3)$ نقطه عطف باشد، کدام است؟

- (۱) $y = \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 + 2$ (۲) $y = \frac{2}{3}x^3 + 2x^2$
(۳) $y = 2x^2 + 4x$ (۴) $y = \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 + 4$

۸۹- معادله منحنی‌یی که در آن $y'' = x^2 - x + 1$ و در مبدأ می‌نیمد، کدام است؟

- (۱) $y = \frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{4}x^2 + 1$ (۲) $y = \frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{4}x^2$
(۳) $y = x^3 - x^2 + x^2$ (۴) $y = \frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{6}x^2 + x^2$

۹۰- معادله منحنی‌یی که در نقطه‌ای به طول ۱، بر خط $y = x - 2$ مماس باشد و داشته باشیم $d^2y/dx^2 = 6x$ ، کدام است؟

- (۱) $y = x^2 - 2x + 1$ (۲) $y = x^2 - 2x - 2$ (۳) $y = x^2 - 2x$ (۴) $y = x^2 - 2x + 4$

۹۱- مقدار $\int_{-1}^1 |x + |x|| dx$ کدام است؟

- ۱ (۲) ۳ (۱) $\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴)

 ۹۲- سطح محصور بین منحنی $y = x^2 - 4x$ و محور x ها کدام است؟

- ۴ (۱) ۸ (۲) ۲ (۳) ۱۶ (۴)

 ۹۳- سطح محصور بین منحنی $y = \sin x$ و محور x ها در خطوط $x = -\pi/2$ و $x = \pi/2$ چقدر است؟

- ۱ (۱) ۴ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴)

 ۹۴- سطح محصور بین منحنی نیمساز ناحیه اول و سوم و محور x ها و خطوط $x = 2$ و $x = -2$ چقدر است؟

- ۴ (۱) ۸ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴)

 ۹۵- مساحت سطح محصور بین منحنی به معادله $y = x^2 - 2|x|$ و محور x ها کدام است؟

- $\frac{1}{3}$ (۱) $\frac{8}{3}$ (۲) $\frac{1}{8}$ (۳) $\frac{5}{3}$ (۴)

 ۹۶- مساحت کوچکترین ناحیه محدود به نمودارهای $y = |x|$ و $y^2 = 16 - x^2$ کدام است؟

- 2π (۱) 2π (۲) 8π (۳) 16π (۴)

 ۹۷- مساحت محدود به منحنی بسته $y^2 = x(x-1)^2$ چه قدر است؟

- $\frac{2}{5}$ (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{8}{15}$ (۳) $\frac{2}{5}$ (۴)

 ۹۸- سطح محصور بین منحنی $y = \sqrt{1-x^2}$ و محور x ها چه قدر است؟

- $\frac{\pi}{2}$ (۱) $\frac{\pi}{4}$ (۲) π (۳) $\frac{\pi}{3}$ (۴)

 ۹۹- مساحت ناحیه محصور بین نمودارهای $y = 2^x$ و $y = 2^{-x}$ و خط $x = 2$ کدام است؟ ($\ln 2 = 0.693$)

- 3.25 (۱) 2.75 (۲) 2.5 (۳) 3 (۴)

 ۱۰۰- سطح محصور بین منحنی $y = x^2$ و خط $y = 3$ و محور y ها چقدر است؟

- $\sqrt{3}$ (۱) $2\sqrt{3}$ (۲) 3 (۳) $2\sqrt{2}$ (۴)

 ۱۰۱- فرض کنید $f(x) = x - x^2$ و $g(x) = ax$ باشد، اگر ناحیه بالای نمودار g و پایین نمودار f دارای مساحتی برابر $9/2$ باشد، a کدام است؟

- ۱ (۱) -1 (۲) 2 (۳) -2 (۴)

 ۱۰۲- مساحت ناحیه محصور توسط محور x ها و $y = (x-3)(x-2)(x+1)$ و $x = 0$ و $x = 4$ کدام است؟

- $\frac{6}{11}$ (۱) $\frac{71}{6}$ (۲) $\frac{142}{3}$ (۳) $\frac{3}{142}$ (۴)

 ۱۰۳- سطح محصور بین منحنی $y = 1 + 2 \sin x \cos x$ و دو خط $x = 0$ و $x = \pi/4$ کدام است؟

- $\sqrt{2}$ (۱) $\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}$ (۲) $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$ (۳) $\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$ (۴)

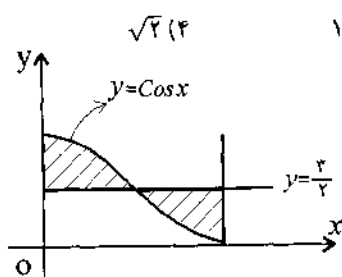
 ۱۰۴- مساحت محدود به منحنی $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ و محورهای مختصات کدام است؟

- $\frac{1}{6}$ (۱) 6 (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) 2 (۴)

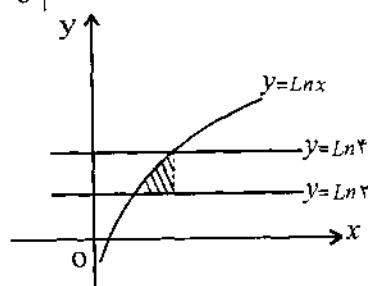
 ۱۰۵- سطح محصور بین منحنی $y = \sqrt{x/3 - 1}$ و محور عرض ها و طول های نقاط با عرض $y = 1$ و $y = 0$ چه قدر است؟

- ۱ (۱) 2 (۲) 3 (۳) 4 (۴)

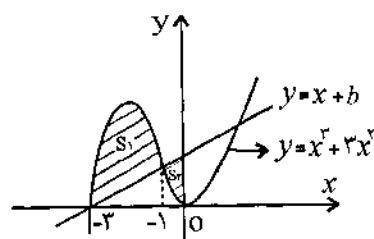
۱۰۶- مساحت ناحیه مثلث شکلی که در ربع اول بین محور y ها و منحنی های $y = \sin x$ و $y = \cos x$ محصور شده، کدام است؟



۱۰۷- سطح محصور در شکل مقابل برابر است با:



۱۰۸- در شکل مقابل مساحت قسمت هاشور خورده کدام است؟



۱۰۹- در شکل مقابل $S_1 + S_2$ کدام است؟

۱۱۰- سطح محصور بین منحنی $xy = 1$ و محور x ها و دو خط $x = a + 1$ و $x = a - 1$ چه قدر است؟ ($a > 1$)

$\ln(a-1)$ (۴) $\ln \frac{a+1}{a-1}$ (۳) $\ln(a+1)$ (۲) $\ln \frac{a-1}{a+1}$ (۱)

۱۱۱- حجم حاصل از دوران منحنی $y = \sin x$ در فاصله $(0, \pi)$ حول محور x ها کدام است؟

π^2 (۱) $\frac{\pi^2}{2}$ (۲) $\frac{\pi^2}{3}$ (۳) $\frac{\pi^2}{4}$ (۴)

۱۱۲- ناحیه محصور بین نمودار تابع $y = \frac{1}{4}\sqrt{16-x^2}$ و خط $y = \sqrt{3}$ را حول محور x ها دوران می دهیم، حجم حاصل کدام است؟

$\frac{44\pi}{3}$ (۲) $\frac{\pi}{12}$ (۳) $\frac{21\pi}{4}$ (۴) $\frac{\pi}{3}$ (۱)

۱۱۳- حجم حاصل از دوران سطح محصور بین منحنی $y = \sqrt[3]{x^2}$ و محور x ها و خط $x = 1$ برابر است با:

$\frac{11\pi}{4}$ (۱) $\frac{9\pi}{4}$ (۲) $\frac{7\pi}{4}$ (۳) $\frac{7\pi}{11}$ (۴)

۱۱۴- حجم حاصل از دوران منحنی به معادله $y = \sqrt{5-x^2}$ از نقطه $x = 1$ تا $x = 2$ حول محور x ها کدام است؟

$\frac{7}{3}\pi$ (۱) $\frac{8}{3}\pi$ (۲) 9π (۳) 10π (۴)

۱۱۵- حجم حادث از دوران بیضی به معادله $9x^2 + 4y^2 = 36$ حول محور x ها کدام است؟

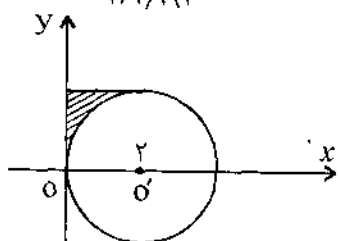
- ۳۶π (۱) ۲۴π (۲) ۱۶π (۳) هیچ کدام (۴)

۱۱۶- سطح محصور بین منحنی $y = \sin x/2$ و محور x ها و خط $x = \pi$ را حول ox دوران می دهیم، اندازه حجم حاصل از این دوران برابر است با:

- $\frac{\pi^2}{2} + \pi$ (۱) π^2 (۲) $\frac{\pi^2}{2} - \pi$ (۳) $\frac{\pi^2}{2}$ (۴)

۱۱۷- حجم کره حاصل از دوران دایره $x^2 + y^2 = 16$ حول محور x ها کدام است؟ ($\pi = 3/14$)

- ۲۵۴/۳ (۱) ۲۴۳/۲ (۲) ۱۳۴/۴ (۳) ۲۶۷/۹ (۴)



۱۱۸- در شکل مقابل حجم حاصل از دوران سطح هاشور زده، حول محور ox کدام است؟

- $\frac{7\pi}{3}$ (۲) 2π (۱) $\frac{8\pi}{3}$ (۳) 4π (۴)

۱۱۹- اگر ناحیه محصور بین منحنی $y = x^2$ و محور x ها و خط $x = 3$ حول محور y ها دوران کند، حجم حاصل کدام است؟

- 81π (۱) 24π (۲) $\frac{81}{4}\pi$ (۳) 2π (۴)

۱۲۰- $I = \int_1^{\ln 2} \int_{e^y}^2 dx dy$ کدام است؟

- $\ln 2 - 1$ (۱) $\ln 2 - 2$ (۲) $2 \ln 2 - 1$ (۳) $2 \ln 2 - 2$ (۴)

۱۲۱- حاصل $\int_0^{\pi/2} \int_0^y \sin \pi y^2 dx dy$ برابر است با:

- ۰ (۱) π (۲) 2π (۳) $\frac{1}{2\pi}$ (۴)

۱۲۲- حاصل $\int_0^1 \int_0^z \int_0^{y+z} e^x e^y e^z dx dy dz$ برابر است با:

- $\frac{1}{\lambda} e^{\frac{1}{\lambda}} - e^{\frac{1}{\lambda}} + \frac{1}{\lambda} e - 3$ (۱) $e^{\frac{1}{\lambda}} - e^{\frac{1}{\lambda}} + e - \frac{3}{\lambda}$ (۳) $e^{\frac{1}{\lambda}} - e^{\frac{1}{\lambda}} + e - \frac{3}{\lambda}$ (۴) $\frac{1}{\lambda} e^{\frac{1}{\lambda}} - e^{\frac{1}{\lambda}} + \frac{1}{\lambda} e - 3$ (۲)

۱۲۳- $I = \int_0^{\pi/4} \int_0^{\sin \theta} r \cos^2 \theta dr d\theta$ کدام است؟

- $\frac{1}{\lambda} \pi$ (۱) $\frac{1}{\lambda} \pi$ (۲) 2π (۳) 8π (۴)

۱۲۴- حاصل $I = \int_0^2 \int_{\sqrt{x+1}}^{\sqrt{x+1}} \sqrt{x+y} dy dx$ برابر است با:

- ۲ (۱) ۱ (۲) ۴ (۳) ۸ (۴)

۱۲۵- سطح محصور میان تابع $y = (x^2 + 1)/x^2$ و مجانب منبیل آن و خطوط $x = 1$ و $x = 2$ کدام است؟

- $\frac{1}{4}$ (۱) ۱ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴)

۱۲۶- معادله یک منحنی که از نقطه $(\pi/4, 1)$ گذشته و در آن $dy = y^2 dx / \sin^2 x$ می باشد، کدام است؟

- $y = \cot x$ (۱) $y = -\tan x$ (۲) $y = \tan x$ (۳) $y = -\cot x$ (۴)

۱۲۷- انتگرال $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(x^2) dx$ برابر است با:

- $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$ (۴) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ye^x}{\delta!} dx$ (۳) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$ (۲) $\int_{-\infty}^{+\infty} ye^x dx$ (۱)

۱۲۸- جواب انتگرال $I = \int_0^1 \int_{y/2}^1 (x^2 + 2y^2) dx dy$ برابر است با:

$\frac{39}{4}$ (۴) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{20}{3}$ (۲) $\frac{35}{2}$ (۱)

۱۲۹- مطلوب است محاسبه $\int_F f(x, y) dA$ وقتی $f(x, y) = xy$ و F میدانی باشد محدود به خطوط $y = 0$ و $x = 2$ و $y = 2x$

۳۲ (۴) ۴ (۳) ۸ (۲) ۱۶ (۱)

۱۳۰- مقدار انتگرال $I = \int_0^{\ln 2} \int_{e^y}^2 dx dy$ برابر است با:

$\ln 2 - 2$ (۴) $2 \ln 2 - 1$ (۳) $2 \ln 2 - 2$ (۲) $\ln 2 - 1$ (۱)

۱۳۱- مقدار $\int_0^x \int_x^\pi \frac{\sin y}{x} dy dx$ برابر است با:

۲ (۴) 2π (۳) π (۲) ۴ (۱)

۱۳۲- انتگرال $I = \int_0^1 \int_{y/2}^1 y e^{x^2} dx dy$ برابر است با:

e (۴) $\frac{2}{3}(e-1)$ (۳) $\frac{1}{3}(e-1)$ (۲) $e-1$ (۱)

۱۳۳- مقدار انتگرال $\int_R dx dy / (x+y)$ که در آن $R = \{(x, y) | y < x < 1, x+y > 1\}$ برابر است با:

$\ln 3$ (۴) $\ln 2$ (۳) $\ln 2 - \frac{1}{2}$ (۲) $2 \ln(2 + \sqrt{3})$ (۱)

۱۳۴- حاصل $I = \int_0^{\pi/2} \int_0^x \int_0^y \sin(x+y+z) dx dy dz$ کدام است؟

$\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۱)

۱۳۵- مساحت محدود بین نمودار تابع $0 = 12 - x^2 y + 4y$ و محورهای مختصات و خط $x = 2$ کدام است؟

$\frac{3\pi}{4}$ (۴) $\frac{3\pi}{2}$ (۳) $\frac{4\pi}{3}$ (۲) $\frac{2\pi}{3}$ (۱)

۱۳۶- حاصل $\int dx / (x^2 + 7x + 6)$ کدام است؟

$\frac{1}{5} \ln \left| \frac{x-1}{x+6} \right| + c$ (۴) $\frac{1}{5} \ln \left| \frac{x-1}{x+6} \right| + c$ (۳) $\ln \left| \frac{x+1}{x-6} \right| + c$ (۲) $\frac{1}{5} \ln \left| \frac{x+1}{x+6} \right| + c$ (۱)

۱۳۷- حاصل $\int dx / \sqrt{40 + 8x - x^2}$ کدام است؟

$\text{Arcsin} \frac{x+4}{6} + c$ (۲) $\text{Arc tan} \frac{x+4}{6} + c$ (۱)
 $\text{Arcsin} \frac{x-4}{6} + c$ (۴) $\text{Arc tan} \frac{x-4}{6} + c$ (۳)

۱۳۸- حاصل انتگرال $\int (x+2) \sin(x^2 + 4x - 6) dx$ کدام است؟

$\frac{1}{2} \cos(x^2 + 4x - 6) + c$ (۲) $-\frac{1}{2} \cos(x^2 + 4x - 6) + c$ (۱)
 $2 \sin(x^2 + 4x - 6) + c$ (۴) $2 \cos(x^2 + 4x - 6) + c$ (۳)

۱۳۹- حاصل انتگرال $\int_0^6 xy dx$ وقتی $x = 6 \cos \theta$ و $y = 2 \sin \theta$ باشد، کدام است؟

$2\sqrt{3}$ (۴) $3\sqrt{3}$ (۳) $9\sqrt{3}$ (۲) $6\sqrt{3}$ (۱)

۱۴۰- حاصل انتگرال $\int \text{Arc tan } x dx / (1 + x^2)$ کدام است؟

$\ln(\text{Arc tan } x) + c$ (۴) $(\text{Arc tan } x)^2 + c$ (۳) $\frac{1}{2}(\text{Arc tan } x)^2 + c$ (۲) $\ln(1 + x^2) + c$ (۱)

- ۱۴۱- اگر $I(x) = \int x dx / \sqrt{x-1}$ باشد، $I(2) - I(0)$ کدام است؟
 $\frac{3}{5} (1) \quad 3 (2) \quad \frac{3}{5} (3) \quad \frac{3}{2} (4)$
- ۱۴۲- اگر $I(x) = \int (x+1) dx / \sqrt{x-2}$ باشد، $I(3) - I(1)$ کدام است؟
 $12 (1) \quad \frac{2}{3} (2) \quad \frac{3}{2} (3) \quad \frac{4}{3} (4)$
- ۱۴۳- مقدار انتگرال $\int_0^2 (t^2 - 2t + 2) dt / (t^2 + 2t + 1)$ کدام است؟
 $3 (1) \quad \frac{1}{3} (2) \quad \frac{1}{6} (3) \quad \frac{8}{3} (4)$
- ۱۴۴- مقدار انتگرال $\int_0^1 (2x^2 + 2x + 1) dx / (x^2 + 1)$ کدام است؟
 $1 + \frac{\pi}{4} (1) \quad 1 + \frac{\pi}{2} (2) \quad 1 (3) \quad \frac{\pi}{4} (4)$
- ۱۴۵- اگر $I(x) = \int x^2 dx / \sqrt{x+1}$ باشد، $I(3) - I(0)$ کدام است؟
 $\frac{2}{5} (1) \quad \frac{1}{5} (2) \quad \frac{76}{15} (3) \quad \frac{5}{17} (4)$

تست‌های آزمون کارشناسی ارشد

«انتگرال»

- تست‌های شماره ۱ الی ۳۰ آزمون‌های کارشناسی ارشد مجموعه علوم اقتصادی
- تست‌های شماره ۳۱ الی ۵۷ آزمون‌های کارشناسی ارشد مجموعه مدیریت
- تست‌های شماره ۵۸ الی ۸۵ آزمون‌های کارشناسی ارشد حسابداری

۱- $I = \int dx / x(\ln x)$ کدام است؟

- $\sqrt{\ln x} + c (1) \quad \frac{1}{x} \ln^2 x + c (2) \quad \ln x + c (3) \quad \ln(\ln x) + c (4)$

۲- اگر $I = \int_0^1 (2x + 5) e^x dx$ کدام است؟

- $5e - 3 (1) \quad 5e + 3 (2) \quad 2e + 3 (3) \quad 2e + 5 (4)$

۳- اگر $I = \int dt / t(t+1)$ کدام است؟

- $\ln |t(t+1)| + c (1) \quad \ln \left| \frac{t+1}{t} \right| + c (2) \quad \ln \left| \frac{t}{t+1} \right| + c (3) \quad \ln |2t+1| + c (4)$

۴- اگر $y'' = 2$ و در نقطه $x = 1$ و $y = 2$ تابع می‌نیم باشد، تابع y کدام است؟

- $y = x^2 - 2x + 3 (1) \quad y = 2x^2 - x + 1 (2) \quad y = x^2 + 1 (3) \quad y = x^2 + 2x - 1 (4)$

۵- اگر $f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$ آن‌گاه، $f'(x)$ کدام است؟

- $e^{-x^2} (1) \quad e^{-x^2} (2) \quad 1 - e^{-x^2} (3) \quad e^{x^2} (4)$

۶- سطح محصور بین منحنی $y = 4x^2$ با محور x ‌ها در فاصله $[0, 2]$ کدام است؟

- $16 (1) \quad 12 (2) \quad 13 (3) \quad 18 (4)$

۷- اگر $y = \int (\ln x)^2 dx / x$ باشد، در این صورت:

- $y = \frac{1}{6} (\ln x)^6 + c (1) \quad y = \frac{1}{5} (\ln x)^5 + c (2)$

- $y = \frac{1}{6} (\ln x)^6 + \ln x + c (3) \quad y = \frac{1}{5} (\ln x)^5 \frac{dx}{x} (4)$

۸- سطح محصور بین منحنی $y = x^2 - 4x$ و محور x ها مساوی است با:

- ۱) ۸ ۲) ۴ ۳) صفر ۴) -۸

۹- جواب انتگرال زیر کدام است؟

$$\int \int_D \sin \frac{x-y}{x+y} dx dy \quad \text{میدان } D = \{(x, y) | x+y=1, x \geq 0, y \geq 0\}$$

- ۱) $\frac{1}{4} \sin 1^\circ$ ۲) $\frac{1}{4} \cos 1^\circ$ ۳) $\sin 1^\circ$ ۴) $\cos 1^\circ$

۱۰- جواب انتگرال زیر کدام است؟

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

- ۱) π ۲) $-\frac{\pi}{2}$ ۳) بی‌نهایت ۴) هیچ‌کدام

۱۱- اگر $I(x) = \int \ln x dx$ و ثابت انتگرال‌گیری $c = 2$ باشد، $I(1)$ برابر خواهد بود با:

- ۱) -۲ ۲) -۱ ۳) ۲ ۴) ۱

۱۲- اگر $G(x) = \int_1^x dt/(1+t^2)$ باشد، مقدار $G(1) - G'(1)$ برابر است با:

- ۱) ۰ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{1}{2}$

۱۳- سطح محصور بین دو منحنی $y = \sqrt{x}$ و $y = x^2$ برابر است با:

- ۱) $\frac{1}{6}$ واحد سطح ۲) $\frac{1}{4}$ واحد سطح ۳) $\frac{1}{2}$ واحد سطح ۴) $\frac{2}{3}$ واحد سطح

۱۴- مقدار انتگرال دوگانه $I = \int_{y=0}^{y=x} e^{-x^2} dy dx$ عبارت است از:

- ۱) $\frac{1}{-2} \left(\frac{2}{e} - 1 \right)$ ۲) $\frac{1}{-2} \left(\frac{1}{e} - 1 \right)$ ۳) $\frac{1}{-2} \left(\frac{3}{e} + 1 \right)$ ۴) $\frac{1}{-2} \left(\frac{1}{e} + 1 \right)$

۱۵- حاصل انتگرال $\int_1^2 (x^2 - 3x + 4) d(x^2 - 1)$ برابر است با:

- ۱) $\frac{13}{4}$ ۲) $\frac{15}{4}$ ۳) $\frac{17}{4}$ ۴) $\frac{11}{4}$

۱۶- اگر $I(x) = \int_1^x e^{-t^2} dt$ باشد، مقدار $I'(\sqrt{3}) - I'(\sqrt{2})$ برابر است با:

- ۱) $e^2 - e^3$ ۲) $e^{\sqrt{2}} - e^{\sqrt{3}}$ ۳) $e^{-\sqrt{2}} - e^{-\sqrt{3}}$ ۴) $e^{-2} - e^{-3}$

۱۷- حاصل $\int x^2 \ln(x) dx$ برای $x = 1$ با فرض $c = 0$ کدام است؟

- ۱) $\frac{1}{9}$ ۲) $\frac{2}{9}$ ۳) $-\frac{1}{9}$ ۴) $-\frac{2}{9}$

۱۸- اگر $f(x) = \int x^4 \ln(x) dx$ و ثابت انتگرال صفر باشد، $f(1)$ برابر است با:

- ۱) $\frac{1}{100}$ ۲) $-\frac{1}{100}$ ۳) $-\frac{1}{1000}$ ۴) $\frac{1}{1000}$

۱۹- جواب انتگرال $\int e^{\cos x} \cos 2x dx$ کدام است؟

- ۱) $\frac{4}{31} e^{\cos x} (\sin 2x + \frac{5}{4} \cos 2x) + c$ ۲) $\frac{4}{31} e^{\cos x} (\sin 2x - \frac{5}{4} \cos 2x) + c$
۳) $\frac{4}{31} e^{\cos x} \sin 2x + c$ ۴) $\frac{4}{31} e^{\cos x} \cos 2x + c$

۲۰- مقدار $\int_{-1}^1 x dx / \sqrt{1-x^2}$ عبارت است از:

- ۱) ۲ ۲) ۱ ۳) -۲ ۴) -۱

۲۱- سطح محصور بین منحنی $y = x^2$ و خط مماس بر آن در نقطه $x = 1$ برابر است با:

$\frac{27}{4} (1)$ $12 (2)$ $14 (3)$ $\frac{35}{4} (4)$

۲۲- اگر $I(x) = \int (x+1) dx / \sqrt{x^2+2x}$ فرض شود، به ازای $c = 0$ ، مقدار $I(-1)$ کدام است؟

$-\frac{3}{4} (1)$ $-\frac{1}{4} (2)$ $\frac{1}{4} (3)$ $\frac{3}{4} (4)$

۲۳- مقدار انتگرال $\int_{-\infty}^{\infty} dx / (1 + e^{-x})$ کدام است؟

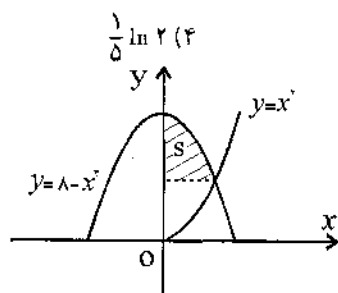
$-\ln 2 (1)$ $0 (2)$ $\ln 2 (3)$ $\ln 3 (4)$

۲۴- مساحت ناحیه محصور بین منحنی‌های $y = 2 - x^2$ و $y = -x$ برابر است با:

$\frac{3}{4} (1)$ $\frac{5}{4} (2)$ $4 (3)$ $\frac{9}{4} (4)$

۲۵- مقدار انتگرال $\int_0^2 dx / (25 - x^2)$ کدام است؟

$-\frac{1}{5} \ln 2 (1)$ $-\frac{1}{5} \ln 4 (2)$ $\frac{1}{5} \ln 4 (3)$ $\frac{1}{5} \ln 2 (4)$



۲۶- در شکل مقابل مقدار مساحت S کدام است؟

$\frac{16}{3} (1)$ $\frac{32}{3} (2)$ $12 (3)$ $18 (4)$

۲۷- مقدار انتگرال $I = \int_0^1 (x+1) dx / \sqrt{x^2+2x}$ کدام است؟

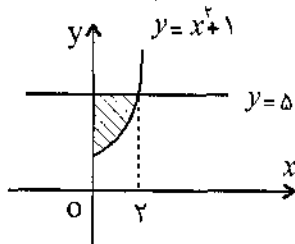
$\sqrt{3} (1)$ $1 (2)$ $\frac{\sqrt{3}}{3} (3)$ $\frac{2}{\sqrt{3}} (4)$

۲۸- اگر نرخ جریان سرمایه‌گذاری $I(t) = te^t$ باشد، مقدار موجودی سرمایه $k(t)$ کدام است؟ در صورتی که $k(0) = 0$ باشد.

$te^t (1)$ $e^t + 1 (2)$ $e^t - 1 (3)$ $te^t - e^t + 1 (4)$

۲۹- مقدار انتگرال $I = \int_0^1 t^2 dt / (t+1)$ کدام است؟

$\frac{1}{4} (1)$ $-\frac{1}{4} (2)$ $\ln 2 + \frac{1}{4} (3)$ $\ln 2 - \frac{1}{4} (4)$



۳۰- با استفاده از شکل مقابل، ماژاد عرضه‌کننده کدام است؟

$\frac{16}{3} (3)$ $\frac{20}{3} (4)$ $\frac{14}{3} (2)$ $\frac{8}{3} (1)$

۳۱- حاصل انتگرال $I = \int_0^1 dx / (x+1)$ کدام است؟

$\frac{1}{4} (1)$ $\frac{1}{2} (2)$ $\ln 2 (3)$ $\ln 2 - 1 (4)$

۳۲- حاصل انتگرال $I = \int x dx / (1+x)$ کدام است؟

$\frac{x^2}{(x+1)^2} + c (1)$ $\frac{1}{(x+1)^2} + c (2)$ $x - \ln|x+1| + c (3)$ $\frac{-1}{(x+1)^2} + c (4)$

۳۳- مساحت محصور بین منحنی $y = x^2$ و محور x ها در فاصله $x = 0$ تا $x = 1$ کدام است؟

- ۱ (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) ۱ (۴) ۲

۳۴- حاصل انتگرال $I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2x \sin x dx$ کدام است؟

- ۰ (۱) ۲ (۲) ۱ (۳) ۴ (۴) ۴

۳۵- سطح محصور بین سهمی $y = x^2$ و خط $y = 1$ و محور y ها کدام است؟

- ۱ (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{4}{3}$ (۳) $\frac{4}{3}$ (۴) $\frac{2}{3}$

۳۶- حاصل انتگرال $\int x dx / \sqrt{x+1}$ در صورتی که $c = 0$ فرض شود، به ازای $x = 0$ کدام است؟

- $\frac{1}{4}$ (۱) $-\frac{4}{3}$ (۲) $-\frac{2}{3}$ (۳) $-\frac{1}{4}$ (۴)

۳۷- انتگرال $I = \int_1^2 x dx / (x+1)$ کدام است؟

- $\ln 2 - 1$ (۱) $2 - \ln 2$ (۲) $1 - \ln 2$ (۳) $\ln 2 - 2$ (۴)

۳۸- انتگرال $I = \int_1^2 x e^x dx$ کدام است؟

- ۱ (۱) e (۲) e^{-1} (۳) $e + 1$ (۴)

۳۹- مساحت محصور بین منحنی $y = x^2$ و محور x ها در فاصله $x = 0$ تا $x = 1$ کدام است؟

- ۲ (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) ۱ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴)

۴۰- اگر $y'' = e^{2x} - x$ باشد، فرض صفر بودن مقادیر ثابت، مقدار y در نقطه $x = 0$ کدام است؟

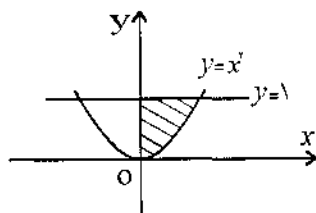
- $\frac{1}{6}$ (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{6}$ (۳) $\frac{1}{12}$ (۴)

۴۱- مقدار انتگرال $\int (x+1) dx / (x-1)$ اگر $x = 2$ و ثابت انتگرال صفر باشد، کدام است؟

- ۲ (۱) ۳ (۲) $\ln 2$ (۳) $\ln 3$ (۴)

۴۲- مقدار انتگرال $I = \int_{-1}^1 (1-x) e^{-x} dx$ کدام است؟

- $\frac{1}{4}$ (۱) $\frac{3}{4}$ (۲) e (۳) $2e$ (۴)



۴۳- با توجه به شکل مساحت قسمت سایه زده کدام است؟

- $\frac{1}{3}$ (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴)

۴۴- مقدار انتگرال $\int_1^2 x e^x dx$ کدام است؟

- $e + 1$ (۱) $e - 1$ (۲) e (۳) ۱ (۴)

۴۵- مقدار $I = \int x dx / (x+1)$ به ازای $x = 1$ کدام است؟

- $\ln 2 - 1 + c$ (۱) $1 - \ln 2 + c$ (۲) $\frac{1}{2} + c$ (۳) $-\frac{1}{2} + c$ (۴)

۴۶- حاصل انتگرال $\int_1^2 dx / \sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)$ کدام است؟

- $\frac{1}{4}$ (۱) $\ln \frac{3}{2}$ (۲) $2 \ln \frac{3}{2}$ (۳) $-\frac{1}{4}$ (۴)

۴۷- مقدار انتگرال $\int_0^{\pi} x \cos x dx$ کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) -۱ (۳) صفر (۴) π

۴۸- مقدار انتگرال $I = \int x dx / \sqrt{x+1}$ به ازای $x = 8$ و $c = 2$ کدام است؟

- (۱) ۱۲ (۲) ۱۴ (۳) ۱۵ (۴) ۱۶

۴۹- سطح محصور بین منحنی $y = x^2 + 2$ و خطوط $y = 11$ و $x = 0$ واقع در ناحیه اول کدام است؟

- (۱) ۴۸ (۲) ۳۳ (۳) ۱۸ (۴) ۱۵

۵۰- مقدار انتگرال $I = \int_1^e x e^{x^2} dx$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}(e-1)$ (۲) $e - \frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{2}e$ (۴) e

۵۱- اگر $I(x) = \int x^2 dx / (x^2 - x)$ باشد، با فرض عدد ثابت انتگرال گیری $c = 0$ مقدار $I(2)$ کدام است؟

- (۱) $2 \ln 2$ (۲) $-\ln 4$ (۳) ۱ (۴) ۲

۵۲- مقدار انتگرال $I = \int_1^2 \ln x dx$ کدام است؟

- (۱) $2 \ln 2 - 1$ (۲) $\ln 2 - 1$ (۳) $\ln 2$ (۴) $2 \ln 2$

۵۳- اگر حاصل انتگرال $\int x \sqrt{x} dx$ به ازای $x = 1$ برابر ۱ باشد، عدد ثابت انتگرال گیری چه قدر است؟

- (۱) $\frac{4}{5}$ (۲) $\frac{1}{5}$ (۳) $\frac{3}{5}$ (۴) $\frac{2}{5}$

۵۴- مقدار $\int_0^{\sqrt{e}} x dx / \sqrt{x^2+1}$ کدام است؟

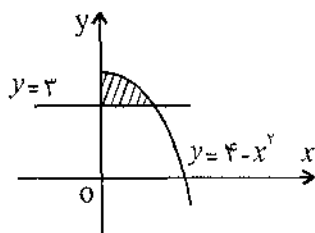
- (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۱ (۴) ۲

۵۵- مقدار انتگرال $I = \int_1^e dt / (t^2 - 1)$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۱ (۳) $\frac{1}{2} \ln \frac{2}{3}$ (۴) $\frac{1}{2} \ln 2$

۵۶- اگر $I(x) = \int x dx / \sqrt{x+1}$ باشد، مقدار $I(3) - I(0)$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) $\frac{8}{3}$ (۳) $-\frac{4}{3}$ (۴) -۲



۵۷- سطح سایه زده شده در شکل مقابل برابر کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) ۱ (۴) ۲

۵۸- حاصل $\int (\sqrt{x} + 1) dx / x$ کدام است؟ (ثابت C)

- (۱) $x\sqrt{x} - \ln x + C$ (۲) $2\sqrt{x} + \ln x + C$ (۳) $\sqrt{x} + 2 \ln x + C$ (۴) $2\sqrt{x} + \ln x + C$

۵۹- حاصل $\int x \ln x dx$ کدام است؟ (با فرض $c = 0$)

- (۱) $x^2 \ln x + \frac{1}{2} x^2$ (۲) $x^2 \ln x - \frac{1}{2} x^2$ (۳) $x^2 \ln x - x^2$ (۴) $x^2 \ln x + x^2$

۶۰- مقدار $\int_1^2 (x+2) dx / (x+1)$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $\ln 2$ (۳) $1 + \ln 2$ (۴) $1 - \ln 2$

۶۱- سطح محدود به منحنی تابع $y = 1/x^2$ و محور x ها و دو خط $x = 1/2$ و $x = 1$ چه قدر است؟

- (۱) ۲٫۵ (۲) ۱٫۵ (۳) ۲ (۴) ۱

۶۲- حاصل انتگرال $\int_1^4 x e^x dx$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) ۸

۶۳- انتگرال $\int_1^2 (x+1) dx/x$ کدام است؟

- (۱) $2 \ln 2 + 2$ (۲) $2 \ln 2 - 2$ (۳) $1 + \ln 2$ (۴) $\ln 2 - 1$

۶۴- معادله منحنی که شیب آن $y' = 3x - 5$ بوده و از نقطه $(1, 2)$ می‌گذرد در نظر می‌گیریم. به ازای $x = 0$ مقدار y کدام است؟

- (۱) $\frac{11}{3}$ (۲) $\frac{7}{3}$ (۳) $\frac{9}{3}$ (۴) $\frac{3}{3}$

۶۵- اگر $I(x) = \int x \sqrt{2x^2 + 1} dx$ و $I(0) = 1$ کدام است؟

- (۱) $-2 + c$ (۲) $\frac{1}{6} + c$ (۳) $\frac{1}{3} + c$ (۴) $1 + c$

۶۶- در انتگرال $I(x) = \int x dx / \sqrt{x+1}$ مقدار $I(0)$ کدام است؟

- (۱) $-2 + c$ (۲) $-4 + c$ (۳) $-\frac{4}{3} + c$ (۴) $-\frac{3}{4} + c$

۶۷- سطح محصور بین منحنی $y = e^x$ و محور x ها در فاصله $x = 0$ تا $x = 1$ کدام است؟

- (۱) $e + 1$ (۲) $e - 1$ (۳) e (۴) 1

۶۸- مساحت محصور بین منحنی‌های $y = x^2$ و $y = x$ واقع در ربع اول کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{1}{5}$

۶۹- مقدار $I = \int e^x x^2 dx$ در نقطه $x = 0$ با فرض (ثابت انتگرال) $c = 0$ کدام است؟

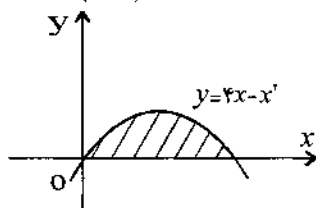
- (۱) $(\ln 4e)^{-1}$ (۲) $\ln 4e$ (۳) $(4e)^{-1}$ (۴) $4e$

۷۰- مقدار $I = \int x(1-x)^2 dx$ در $x = 2$ کدام است؟ (با فرض $c = 0$)

- (۱) $-\frac{1}{25}$ (۲) $\frac{1}{25}$ (۳) $\frac{13}{42}$ (۴) $-\frac{13}{42}$

۷۱- مقدار $\int \left(\frac{1}{x^2} \sqrt{1+1/x} \right) dx$ به ازای $x = 2$ در صورت $c = 0$ کدام است؟

- (۱) $\left(\sqrt{\frac{3}{2}} \right)^2$ (۲) $-\sqrt{\frac{3}{2}}$ (۳) $\sqrt{\frac{3}{2}}$ (۴) $-\left(\sqrt{\frac{3}{2}} \right)^2$



۷۲- سطح سایزده شکل مقابل کدام است؟

- (۱) $\frac{25}{4}$ (۲) ۸ (۳) $\frac{32}{3}$ (۴) ۱۶

۷۳- مقدار انتگرال $\int_1^2 \ln x dx$ کدام است؟

- (۱) $2 \ln 2 - 1$ (۲) $2 \ln 2 - 2$ (۳) $\ln 2 - 1$ (۴) $\ln 2 - 2$

۷۴- حاصل $\int_{-1}^1 \sqrt{3x+3} dx$ کدام است؟

- (۱) $\frac{16}{9}$ (۲) $\frac{14}{3}$ (۳) $\frac{14}{9}$ (۴) $\frac{16}{3}$

۷۵- مقدار انتگرال $\int x^{11} \ln x dx$ در $x = 1$ کدام است؟

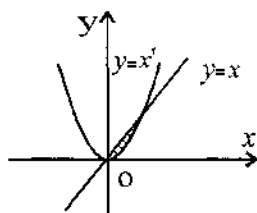
$1 + c(1)$ $\frac{1}{12} + c(2)$ $-\frac{1}{12} + c(3)$ $-\frac{1}{124} + c(4)$

۷۶- اگر $F(x) = \int (x+1) dx / \sqrt{x^2 + 2x + 1}$ ، به ازای $c = 0$ مقدار $F'(0)$ کدام است؟

$\frac{2}{3}(1)$ $\frac{3}{4}(2)$ $\frac{3}{4}(3)$ $\frac{4}{3}(4)$

۷۷- انتگرال $I = \int x \ln x dx$ در نقطه $x = 1$ کدام است؟

$-\frac{1}{2} + c(1)$ $\frac{1}{2} + c(2)$ $\frac{1}{2} + c(3)$ $-\frac{1}{2} + c(4)$



۷۸- مساحت محصور بین نمودارهای دو تابع $y = x$ و $y = x^2$ کدام است؟

$1(1)$ $\frac{1}{2}(2)$ $\frac{1}{2}(3)$ $\frac{1}{4}(4)$

۷۹- شیب تابعی $dy/dx = 2x + \frac{1}{x+1}$ است. اگر این تابع از مبدأ بگذرد مقدار تابع به ازای $x = 1$ کدام است؟

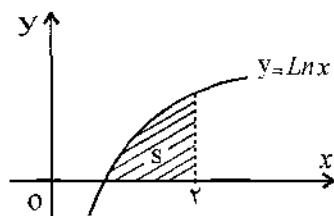
$1(1)$ $2(2)$ $1 + \ln 2(3)$ $2 + \ln 2(4)$

۸۰- اگر داشته باشیم $I(x) = \int dx / (4 - x^2)$ و ثابت انتگرال گیری $c = 0$ باشد، $I(1)$ کدام است؟

$0(1)$ $\frac{1}{3}(2)$ $\frac{1}{4} \ln 2(3)$ $\frac{1}{4} \ln 3(4)$

۸۱- اگر داشته باشیم $I(x) = \int x \cos x dx$ و ثابت انتگرال گیری $c = 0$ باشد، $I(0)$ کدام است؟

$1(1)$ $0(2)$ $\sin 1(3)$ $1 - \sin 1(4)$

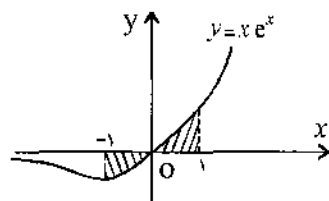


۸۲- در شکل مقابل مساحت S کدام است؟

$2 \ln 2 - 1(1)$ $\ln 2 - 1(2)$ $\ln 2(3)$ $2(4)$

۸۳- مقدار انتگرال $I = \int_1^2 t dt / (t+1)$ کدام است؟

$\frac{1}{2} \ln 2 - 1(1)$ $1 - \ln 2(2)$ $\frac{2}{3}(3)$ $\frac{2}{3}(4)$



۸۴- سطح ساییده در شکل مقابل کدام است؟

$e(1)$ $e - 1(3)$ $e + 1(4)$ $2 - \frac{2}{e}(2)$

۸۵- اگر $I(x) = \int x dx / \sqrt{2x+1}$ باشد، $I(1) - I(0)$ کدام است؟

$-\sqrt{3}(1)$ $-\frac{2}{3}(2)$ $\frac{1}{3}(3)$ $\frac{2}{3}(4)$



ماتریس

۱-۷ ماتریس

ماتریس آرایی است مستطیلی از اعداد، حروف، توابع، ... که به صورت زیر نوشته می شود:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

این ماتریس دارای m سطر و n ستون می باشد و آن را یک ماتریس از درجه (مرتبه یا اندازه) $m \times n$ می نامند. عنصر a_{ij} را در نظر بگیرید، i شماره سطر و j شماره ستونی را نشان می دهد که این عنصر در آن قرار دارد. اندیس های i و j را به صورت $m, 1, 2, 3, \dots, n$ و $i = 1, 2, 3, \dots, n$ بیان می کنیم. برای خلاصه نویسی، ماتریس فوق را به صورت $A_{m \times n}$ یا $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ می نویسند.

۲-۷ ماتریس مربع

اگر تعداد سطرها و ستون های یک ماتریس مساوی باشند، آن را «ماتریس مربع» می نامند. مثلاً اگر $A_{n \times n}$ ، می گویم A یک ماتریس مربع درجه n است. در ماتریس مربع $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ ، عناصر $a_{11}, a_{21}, \dots, a_{nn}$ را عناصر قطر اصلی ماتریس می نامیم. بنابراین a_{ii} عنصر قطری است اگر به ازای تمام مقادیر i و j داشته باشیم $i = j$. و غیرقطری است اگر $i \neq j$ باشد. اگر $i > j$ باشد عنصر زیر قطر و اگر $i < j$ باشد، عنصر بالای قطر قرار دارند.

۳-۷ اثر یک ماتریس

در ماتریس مربع $A_{n \times n}$ ، مجموع عناصر قطر اصلی A را «اثر ماتریس A » می نامند و با $tr A$ نشان می دهند. یعنی (مسئله ۱):

$$tr A = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$$

۴-۷ ماتریس صفر

ماتریسی که همه عناصر آن صفر هستند، آن را «ماتریس صفر» نامند. ماتریس صفرا از درجه $m \times n$ را با نماد $O_{m \times n}$ یا به طور خلاصه با $\bar{O}$ نمایش می دهند.

۵-۷ ماتریس ستونی

ماتریسی که فقط یک ستون دارد، «ماتریس ستونی» یا «بردار ستونی» نامند، مانند ماتریس ستونی $A_{m \times 1}$.

۶-۷ ماتریس سطری

ماتریسی که فقط یک سطر دارد، «ماتریس سطری» یا «بردار سطری» نامند. مانند ماتریس سطری $A_{1 \times n}$.

۷-۷ ماتریس همانی (واحد)

ماتریس مربع $n \times n$ که کلیه عناصر قطر اصلی آن عدد ۱ و سایر عناصر آن صفر باشند، «ماتریس همانی» نامیده می‌شود و با علامت I_n یا $I_{n \times n}$ نشان داده می‌شود.

۷-۸ قرینه یک ماتریس

اگر A یک ماتریس $m \times n$ باشد، قرینه A ماتریسی است از همان درجه که با نماد $-A$ نشان می‌دهند و اگر $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ در این صورت بنا به تعریف $-A = [-a_{ij}]_{m \times n}$ ، (مسئله ۳).

۷-۹ تساوی ماتریس‌ها

دو ماتریس $A = [a_{ij}]$ و $B = [b_{ij}]$ با هم مساویند هرگاه اولاً: هم‌درجه باشند ثانیاً: برای هر i و j داشته باشیم $a_{ij} = b_{ij}$ در این صورت می‌نویسیم $A = B$.

۷-۱۰ جمع ماتریس‌ها

اگر $A = [a_{ij}]$ و $B = [b_{ij}]$ دو ماتریس با درجه $m \times n$ باشند، در این صورت مجموع آن‌ها قابل تعریف است و حاصل یک ماتریس $m \times n$ است که به صورت زیر تعریف می‌شود (مسئله ۲):

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n}$$

۷-۱۱ خواص جمع ماتریس‌ها

- (۱) خاصیت جابه‌جایی:
 $A + B = B + A$
- (۲) خاصیت شرکت‌پذیری:
 $A + (B + C) = (A + B) + C$
- (۳) قانون حذف:
 $A + C = B + C \Rightarrow A = B$
- (۴) هر ماتریس نسبت به عمل جمع یک قرینه دارد:
 $A + (-A) = (-A) + A = \bar{O}$
- (۵) ماتریس صفر عضو بی‌اثر:
 $A + \bar{O} = \bar{O} + A = A$
- (۶) k یک اسکالر است:
 $k(A + B) = kA + kB$

۷-۱۲ تفریق ماتریس‌ها

اگر A و B دو ماتریس هم‌درجه باشند، $A - B$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A - B = A + (-B)$$

۷-۱۳ ضرب یک عدد در یک ماتریس

اگر یک عدد (اسکالر) در یک ماتریس ضرب شود، آن عدد در جمع عناصر ماتریس ضرب می‌شود (مسئله ۴):

$$k.A = A.k = k[a_{ij}]_{m \times n} = [ka_{ij}]_{m \times n}$$

۷-۱۴ خواص ضرب یک عدد در یک ماتریس

اگر A و B دو ماتریس هم‌درجه و r و s دو عدد حقیقی باشند، در این صورت:

$$r(A + B) = rA + rB \quad (۲) \quad (r + s)A = rA + sA \quad (۱) \quad r(sA) = (rs)A$$

۱۵-۷ ضرب ماتریس‌ها

برای آنکه ماتریس‌های $A = [a_{ij}]$ از درجه $m \times n$ و $B = [b_{ij}]$ از درجه $p \times q$ را بتوان درهم ضرب کرد، باید تعداد ستون‌های A با تعداد سطرهای B مساوی باشند یعنی $n = p$. در این صورت $A.B = [c_{ij}]$ ماتریسی از درجه $m \times q$ است که به صورت زیر تعریف می‌شود (مسئله ۵).

$$A.B = C = [c_{ij}] = \left[\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \right]_{m \times q} \quad i = 1, 2, \dots, m \quad j = 1, 2, \dots, n$$

۱۶-۷ خواص ضرب ماتریس‌ها

- (۱) در حالت کلی خاصیت جابه‌جایی ندارند: $AB \neq BA$
- (۲) خاصیت شرکت‌پذیری: $A(BC) = (AB)C$
- (۳) خاصیت توزیع‌پذیری: $A(B+C) = AB + AC$
- (۴) قانون حذف وجود ندارد: $AB = AC \nRightarrow B = C \quad (A \neq 0)$
- (۵) اگر داشته باشیم $AB = \bar{O}$ ، در حالت کلی نمی‌توان نتیجه گرفت $A = \bar{O}$ یا $B = \bar{O}$
- (۶) اگر A یک ماتریس مربع $n \times n$ و I_n یک ماتریس همانی باشد: $I_n \times A = A \times I_n = A$
- (۷) ماتریس $A_{m \times n}$ را زمانی در خودش می‌توان ضرب کرد که داشته باشیم $m = n$ یعنی تنها ماتریس مربع را می‌توان در خودش ضرب کرد. اگر A ماتریس مربع از درجه $m \times m$ باشد، طبق قرارداد:

$$\underbrace{A.A.\dots.A}_{n} = A^n$$

(۸) اگر A و B دو ماتریس باشند که AB تعریف شده است و r یک عدد حقیقی باشد آن‌گاه:

$$\begin{aligned} (rA)B &= A(rB) = rAB & (-A)(B) &= -AB \\ (-A)(-B) &= AB & A(-B) &= -AB \end{aligned}$$

نکات مهم:

- ۱- در حالات زیر ضرب ماتریس‌ها دارای خاصیت جابه‌جایی است.
 - الف) دو ماتریس قطری و هم‌درجه باشند.
 - ب) یکی از ماتریس‌های عامل ضرب ماتریس همانی یا اسکالر باشد.
 - ج) هر دو ماتریس به فرم $\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$ و یا هر دو به فرم $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$ باشند.
- ۲- اگر ضرب دو ماتریس دارای خاصیت جابه‌جایی باشد، اتحادهای جبری در مورد آن‌ها نیز صادق است (مسئله ۹).

۱۷-۷ توان‌های طبیعی یک ماتریس مربع

اگر A یک ماتریس مربع باشد، در این صورت توان‌های طبیعی A به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$A^1 = A, A^2 = A.A, A^3 = A^2.A, \dots, A^{n+1} = A^n.A$$

(۱) ماتریس‌های قطری و اسکالر در قسمت‌های ۷-۲۱ و ۷-۲۳ تعریف شده‌اند.

توان‌های طبیعی ماتریس‌ها در ضرب خاصیت جابه‌جایی دارند، مثلاً داریم:

$$A.A^T = A^T.A = A^T$$

و در صورتی که A یک ماتریس مربع درجه n باشد، آن‌گاه، $A^* = I_n$

نکات مهم:

۱- اگر A یک ماتریس مربع باشد، آن‌گاه:

$$AA^n = A^n A \quad (\text{الف})$$

$$A^m A^n = A^n A^m \quad (\text{ب})$$

۲- ماتریس $A = \begin{bmatrix} \circ & a \\ a & \circ \end{bmatrix}$ مفروض است:

$$A^n = \begin{bmatrix} a^n & \circ \\ \circ & a^n \end{bmatrix} \quad (\text{الف}) \text{ اگر } n \text{ زوج باشد، آن‌گاه:}$$

$$A^n = \begin{bmatrix} \circ & a^n \\ a^n & \circ \end{bmatrix} \quad (\text{ب}) \text{ اگر } n \text{ فرد باشد، آن‌گاه:}$$

۳- ماتریس $A = \begin{bmatrix} \circ & a \\ b & \circ \end{bmatrix}$ مفروض است:

$$A^n = \begin{bmatrix} (ab)^{\frac{n}{2}} & \circ \\ \circ & (ab)^{\frac{n}{2}} \end{bmatrix} \quad (\text{الف}) \text{ اگر } n \text{ زوج باشد، آن‌گاه:}$$

$$A^n = \begin{bmatrix} \circ & a^{\frac{n+1}{2}} . b^{\frac{n-1}{2}} \\ a^{\frac{n-1}{2}} . b^{\frac{n+1}{2}} & \circ \end{bmatrix} \quad (\text{ب}) \text{ اگر } n \text{ فرد باشد، آن‌گاه:}$$

۱۸-۷ ماتریس بالامثلثی

هر ماتریس مربع که همه عناصر واقع در زیر قطر اصلی آن صفر باشد، «ماتریس بالامثلثی» است. به عبارت دیگر ماتریس مربع $A = [a_{ij}]$ را بالامثلثی می‌نامند، هرگاه به‌ازای هر i و j اگر $j > i$ آن‌گاه $a_{ij} = \circ$.

۱۹-۷ ماتریس پایین‌مثلثی

هر ماتریس مربع که همه عناصر واقع در بالای قطر اصلی آن صفر باشد، «ماتریس پایین‌مثلثی» است. به عبارت دیگر ماتریس مربع $A = [a_{ij}]$ را پایین‌مثلثی می‌نامند، هرگاه به‌ازای هر i و j اگر $j < i$ آن‌گاه $a_{ij} = \circ$.

۲۰-۷ خواص ماتریس‌های مثلثی

- (۱) مجموع و تفاضل دو ماتریس بالامثلثی (پایین‌مثلثی) هم درجه، ماتریس بالامثلثی (پایین‌مثلثی) است.
- (۲) حاصل ضرب دو ماتریس بالامثلثی (پایین‌مثلثی) هم درجه، ماتریس بالامثلثی (پایین‌مثلثی) است.
- (۳) اگر A یک ماتریس بالامثلثی (پایین‌مثلثی) و r عددی حقیقی باشد، rA نیز بالامثلثی (پایین‌مثلثی) است.

۲۱-۷ ماتریس‌های قطری

اگر کلیه عناصر پایین و بالای قطر اصلی در یک ماتریس مربع برابر صفر باشد، آن را «ماتریس قطری» می‌نامند. به عبارت دیگر، ماتریس مربع $D = [d_{ij}]$ را قطری می‌نامند، هرگاه هم بالا مثلثی و هم پایین مثلثی باشد یا ماتریس D قطری است هرگاه به ازای هر i و j اگر $i \neq j$ آن‌گاه $d_{ij} = 0$.

نکات مهم:

- ۱- اگر D یک ماتریس قطری باشد، برای محاسبه D^n کافی است، عناصر قطر اصلی را به توان n برسانیم.
- ۲- برای ضرب یک ماتریس قطری از سمت راست در یک ماتریس، کافی است عناصر قطر اصلی را در ستون‌های متناظر ضرب کنیم، به عنوان مثال:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 7 & 4 & 6 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a & 3b & 1c \\ 7a & 4b & 6c \\ 3a & 1b & 2c \end{bmatrix}$$

- ۳- برای ضرب یک ماتریس قطری از سمت چپ در یک ماتریس کافی است عناصر قطر اصلی را در سطرهای متناظر ضرب کنیم، به عنوان مثال:

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 9 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a & -a & 3a \\ 5b & 6b & 7b \\ 9c & 2c & 4c \end{bmatrix}$$

۲۲-۷ خواص ماتریس‌های قطری

- ۱) مجموع و تفاضل دو ماتریس قطری هم درجه، ماتریسی قطری است.
- ۲) حاصل ضرب یک عدد در یک ماتریس قطری، ماتریسی قطری است.
- ۳) حاصل ضرب دو ماتریس قطری، ماتریسی قطری است و داریم:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & b_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22}b_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn}b_{nn} \end{bmatrix}$$

۲۳-۷ ماتریس‌های اسکالر

یک ماتریس قطری را که همه عناصر واقع بر قطر اصلی آن با هم برابر باشند، «ماتریس اسکالر» می‌نامند. در واقع هر ماتریس اسکالر، مضربی از یک ماتریس واحد است.

۲۴-۷ ماتریس‌های بی‌اثر (هیچ‌نما)

ماتریس مربع A را بی‌اثر می‌نامند هرگاه به ازای یک عدد طبیعی n داشته باشیم $A^n = O$. همه ماتریس‌های بی‌اثر 2×2 به شکل زیر است:

$$A = \begin{bmatrix} mn & n^2 \\ -m^2 & -mn \end{bmatrix}$$

۲۵-۷ ماتریس‌های خودتوان

ماتریس مربع A را خودتوان می‌نامند، هرگاه $A^T = A$. بدیهی است اگر A خودتوان باشد، آن‌گاه به‌ازای هر عدد طبیعی n داریم $A^n = A$.

۲۶-۷ ماتریس ترانهاد (ترانسپوزه)

اگر در ماتریس $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ، جای تمام سطرها و ستون‌های متناظر آن را تعویض کنیم، ماتریس حاصل را که با A' نشان می‌دهیم، «ترانهاد یا ترانسپوزه ماتریس A » خوانند و داریم (مسأله ۶):

$$A' = [a_{ji}]_{n \times m}$$

۲۷-۷ ویژگی‌های ماتریس ترانهاد

- (۱) برای هر ماتریس A داریم: $(A')' = A$
- (۲) برای هر ماتریس A و $k \in \mathbb{R}$ داریم: $(kA)' = kA'$
- (۳) برای هر دو ماتریس هم‌درجه A و B داریم: $(A \pm B)' = A' \pm B'$
- (۴) اگر ماتریس AB معنی داشته باشد، داریم: $(AB)' = B'A'$
- از ویژگی شماره (۴) می‌توان نتیجه گرفت:
- (الف) اگر $A_1, A_2, \dots, A_n$ ، ماتریس‌های قابل ضرب باشند، آن‌گاه: $(A_1 A_2 \dots A_n)' = A_n' \dots A_2' A_1'$
- (ب) اگر A ماتریس مربع $n \in \mathbb{N}$ باشد، آن‌گاه: $(A')^n = (A^n)'$
- (۵) ترانهاد هر ماتریس بالامتثلی (پایین‌متثلی) یک ماتریس پایین‌متثلی (بالامتثلی) است.
- (۶) هرگاه ضرب دو ماتریس دارای ویژگی جابه‌جایی باشد، آن‌گاه ترانهاد آن‌ها نیز دارای ویژگی جابه‌جایی است.

۲۸-۷ ماتریس متقارن

اگر A ماتریسی باشد که ترانهاد آن با خودش مساوی باشد، یعنی $A = A'$ ، آن را «ماتریس متقارن» نامند. بدیهی است که هر ماتریس متقارن حتماً یک ماتریس مربع است. به بیان دیگر ماتریس مربع $A = [a_{ij}]$ متقارن است، اگر به‌ازای جمیع مقادیر i, j داشته باشیم $a_{ij} = a_{ji}$.

نکات مهم:

- ۱- در هر ماتریس متقارن، عناصر قرینه نسبت به قطر اصلی ماتریس، مساوی یکدیگرند.
- ۲- هر ماتریس قطری و در نتیجه ماتریس‌های اسکالر و ماتریس همانی متقارن هستند.
- ۳- اگر A ماتریس مربع باشد، $A + A'$ یک ماتریس متقارن است.

۲۹-۷ ویژگی‌های ماتریس متقارن

- (۱) مجموع و تفاضل دو ماتریس متقارن هم‌درجه، ماتریس متقارن است.
- (۲) حاصل ضرب یک عدد در یک ماتریس متقارن، ماتریسی متقارن است.

۳۰-۷ ماتریس پادمتقارن (ضد متقارن)

اگر A ماتریسی باشد که ترانهاد آن با قرینه آن برابر باشد، یعنی $-A = A'$ ، آن را «ماتریس پادمتقارن (ضد متقارن)» نامند. بدیهی است که هر ماتریس پادمتقارن حتماً یک ماتریس مربع است. به عبارت دیگر ماتریس $A = [a_{ij}]$ پادمتقارن است، اگر به‌ازای جمیع مقادیر i, j داشته باشیم $-a_{ij} = a_{ji}$.

نکات مهم:

- ۱- در هر ماتریس پادمتقارن، عناصر روی قطر اصلی ماتریس، صفر است.
- ۲- ماتریس صفر هم متقارن و هم پادمتقارن است.
- ۳- اگر A ماتریس مربع باشد، $A - A'$ یک ماتریس پادمتقارن است.

۳۱-۷ ویژگی‌های ماتریس پادمتقارن

- (۱) مجموع و تفاضل دو ماتریس پادمتقارن هم درجه، ماتریس پادمتقارن است.
- (۲) حاصل ضرب یک عدد در یک ماتریس پادمتقارن، ماتریسی پادمتقارن است.
- (۳) دترمینان هر ماتریس پادمتقارن و از درجه فرد برابر صفر و از درجه زوج عددی مربع کامل است.

۳۲-۷ دترمینان

ماتریس مربع از درجه n ، $A = [a_{ij}]$ را در نظر می‌گیریم، به هر ماتریس مربع مانند A ، مقداری را نسبت می‌دهیم، و آن را «دترمینان A » می‌نامند و به صورت‌های زیر نشان می‌دهند.

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = |a_{ij}|$$

۱-۳۲-۷ دترمینان ماتریس‌های 1×1

دترمینان یک ماتریس 1×1 مانند $[a]_{1 \times 1}$ عبارت است از $\det[a] = a$.

۲-۳۲-۷ دترمینان ماتریس‌های 2×2

دترمینان یک ماتریس 2×2 مانند $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ را به صورت زیر بیان می‌کنیم (مسائل ۷ و ۸):

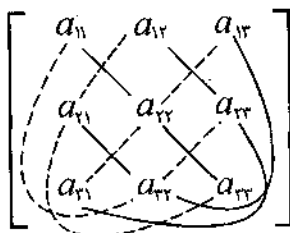
$$\det A = |A| = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

۳-۳۲-۷ دترمینان ماتریس‌های 3×3

دترمینان یک ماتریس 3×3 مانند $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ را به صورت زیر بیان می‌کنیم:

$$\det A = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32})$$

جملات فوق را به وسیله شکل زیر می‌توان به دست آورد. (مسألة ۱۰)



۴-۳۲-۷ دترمینان ماتریس‌های $n \times n$

برای محاسبه دترمینان ماتریس‌های مربعی به روش کلی (بسط برحسب یک سطر یا یک ستون) ابتدا تعاریف زیر را بیان می‌کنیم و سپس به کمک آن‌ها دترمینان ماتریس‌ها را در حالت کلی تشریح می‌کنیم.

(۱) کهاد هر عنصر: به هر عنصر از یک ماتریس یا یک دترمینان، عددی نسبت داده می‌شود که به آن کهاد آن عنصر می‌گویند. اگر $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ ، آن‌گاه ماتریسی را که از حذف سطر i ام و ستون j ام ماتریس A به دست می‌آید با M_{ij} نشان می‌دهیم و آن را « i -ژ- j امین کهاد» ماتریس A می‌نامند.^۱ دترمینان کهاد عنصر a_{ij} را به $|M_{ij}|$ نشان می‌دهند (مسئله ۱۱).

(۲) علامت جایگاه یا محل هر عنصر: برای محل هر عنصر علامت $(+)$ یا $(-)$ انتخاب می‌گردد، علامت جایگاه را هم از فرمول $(-1)^{i+j}$ به دست می‌آورند (این علامت با علامت خود عنصر فرق دارد) به عنوان نمونه برای دترمینان ماتریس $A_{2 \times 2}$ داریم:

$$|A| = \begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

(۳) همساره هر عنصر: اگر کهاد هر عنصر را در علامت جایگاه آن عنصر ضرب کنیم، عددی به دست می‌آید که به آن همساره آن عنصر می‌گویند. اگر $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ آن‌گاه همساره i -ژ- j ام ماتریس A که با نماد A_{ij} نشان داده می‌شود، به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} |M_{ij}|$$

با توجه به تعاریف سه‌گانه فوق دترمینان هر ماتریس مربعی از فرمول زیر محاسبه می‌گردد:

$$|A| = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij} = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} |M_{ij}| \quad \text{بسط برحسب سطر } i\text{ام}$$

تذکره: به طور کلی یک دترمینان $n \times n$ دارای n^n عنصر و $n!$ جمله است.

۵-۳۲-۷ دترمینان ماتریس‌های مثلثی، قطری و اسکالر

(۱) دترمینان هر ماتریس بالامثلثی (پایین مثلثی) برابر است با حاصل ضرب عناصر واقع بر قطر اصلی آن.

(۲) دترمینان هر ماتریس قطری یا اسکالر برابر است با حاصل ضرب عناصر واقع بر قطر اصلی آن.

۳۳-۷ ویژگی‌های دترمینان

(۱) اگر هر یک از عناصر یک سطر یا یک ستون صفر باشد، مقدار دترمینان آن صفر است.

(۲) اگر در یک دترمینان جای تمام سطرها و ستون‌های متناظر را جابه‌جا کنیم، مقدار دترمینان تغییر نخواهد کرد. به بیان دیگر، دترمینان ماتریس A با دترمینان ترانژاده ماتریس A برابر است، یعنی $|A| = |A'|$.

(۳) اگر همه عناصر یک سطر یا یک ستون ماتریسی را در عددی مانند k ضرب کنیم، مقدار دترمینان آن در k ضرب خواهد شد.^۲

(۴) اگر در یک دترمینان جای دو سطرها یا دو ستون را تعویض نماییم علامت دترمینان تغییر خواهد کرد، ولی قدر مطلق آن تغییر نمی‌کند.

(۵) اگر در یک دترمینان دو سطرها یا دو ستون مساوی یا متناسب باشند، مقدار دترمینان صفر است.

(۶) اگر k برابر سطر یا ستون دلخواهی را بر سطر یا ستون دلخواه دیگری بیفزاییم، مقدار دترمینان تغییر نخواهد کرد.

(۱) به بیان دیگر، کهاد هر عنصر دترمینان کوچک‌تری است که از حذف سطر و ستونی که آن عنصر در آن قرار دارد به دست می‌آید.

(۲) اگر تمام عناصر ماتریس مربع n در k ضرب کنیم، دترمینان آن ماتریس در k^n ضرب می‌شود.

(۷) اگر هر یک از عناصر سطر i ام یا ستون j ام درمیان A مجموع k عامل باشد، در این صورت درمیان A را می‌توان به صورت مجموع k درمیان نوشت.

(۸) در یک درمیان در یک سطر یا ستون آن می‌توان از هر عددی فاکتور گرفت و در بیرون درمیان قرار داد.

(۹) اگر بخواهیم عددی را که در یک درمیان ضرب شده است به داخل آن ببریم، این عدد را فقط در یک سطر یا یک ستون آن می‌توان ضرب کرد.

(۱۰) اگر A و B دو ماتریس قابل ضرب کردن باشند، آنگاه:

$$|AB| = |A| \cdot |B|$$

$$|A^n| = |A|^n$$

(۱۱) اگر A ماتریس مربع باشد، آنگاه برای هر عدد طبیعی n : (مسئله ۱۲)

۳۴-۷ نمایش معادله یک خط توسط درمیان

معادله خطی که از دو نقطه $A(a, b)$ و $B(c, d)$ می‌گذرد عبارت است از:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a & b & 1 \\ c & d & 1 \end{vmatrix} = 0$$

۳۵-۷ نمایش مساحت یک مثلث توسط درمیان

اگر $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ و $C(x_3, y_3)$ رأس‌های یک مثلث باشند، آنگاه مساحت مثلث ABC برابر است با قدرمطلق درمیان زیر:

$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

۳۶-۷ ماتریس منفرد و غیرمنفرد

ماتریس مربع $A = [a_{ij}]$ مفروض است. اگر درمیان این ماتریس مخالف صفر باشد، یعنی $|A| \neq 0$ ، بنا به تعریف ماتریس A را «ماتریس غیرمنفرد» نامند و اگر درمیان این ماتریس مساوی صفر باشد، یعنی $|A| = 0$ ، ماتریس A را «ماتریس منفرد» گویند (مسئله ۱۳).

۳۷-۷ ماتریس همسازه و ماتریس الحاقی

اگر در ماتریس $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ به جای هر عنصر a_{ij} همسازه متناظر آن از درمیان نظیرش را قرار دهیم، ماتریس جدید را «ماتریس همسازه» گوئیم و به $\text{cof.} A$ نشان می‌دهیم و داریم:

$$\text{cof.} A = [(-1)^{i+j} M_{ij}]$$

بنا به تعریف ترانسپوز (ترانهاده) ماتریس همسازه را «ماتریس الحاقی A » نامیده و به $\text{adj.} A$ نشان می‌دهیم و داریم (مسئله ۱۴):

$$\text{adj.} A = [(-1)^{i+j} M_{ji}]$$

۳۸-۷ معکوس (وارون) یک ماتریس

اگر برای ماتریس مربع A ماتریس مربع B وجود داشته باشد، به طوری که $AB = BA = I_n$ آنگاه B را معکوس ماتریس A نامند و می‌نویسند $B = A^{-1}$ ، و A را نیز معکوس ماتریس B خوانند و داریم:

$$AB = BA = I_n \Rightarrow AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$$

قضیه: ماتریس مربع A معکوس پذیر است اگر و تنها اگر $|A| \neq 0$. به عبارت دیگر، ماتریس مربع A معکوس پذیر است اگر و تنها اگر ماتریس A غیرمنفرد باشد.

۳۹-۷ ویژگی های معکوس یک ماتریس

(۱) اگر ماتریس A دارای معکوس باشد، این معکوس منحصر به فرد است. یعنی اگر A دارای دو معکوس B و C باشد، آن گاه $B = C$ است.

(۲) اگر A و B دو ماتریس هم درجه و به ترتیب دارای معکوس های A^{-1} و B^{-1} باشد، در این صورت داریم: $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. این قضیه قابل تعمیم است، یعنی:

$$(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$$

(۳) معکوس معکوس یک ماتریس مساوی ماتریس اصلی است، یعنی:

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

(۴) دترمینان معکوس یک ماتریس برابر با عکس دترمینان همان ماتریس است، یعنی:

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = |A|^{-1}$$

(۵) معکوس ترانزاده یک ماتریس برابر است با ترانزاده معکوس همان ماتریس، یعنی:

$$|A^{-1}|' = |A'|^{-1}$$

(۶) اگر A ماتریسی معکوس پذیر باشد، آن گاه ماتریس A^n ($\forall n \in N$) نیز معکوس پذیر است، یعنی:

$$(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$$

(۷) اگر A ماتریسی معکوس پذیر باشد، آن گاه به ازای هر عدد طبیعی n ، A^{-n} به صورت زیر تعریف می شود:

$$A^{-n} = (A^{-1})^n$$

(۸) اگر A و B دو ماتریس مربع هم درجه و B معکوس پذیر باشد، آن گاه: (مسئله ۱۵)

$$\forall n \in N \quad (B^{-1}AB)^n = B^{-1}A^nB$$

۴۰-۷ ماتریس برگردان

اگر معکوس ماتریسی برابر خودش باشد، آن ماتریس را «ماتریس برگردان» خوانند. ماتریس A ، ماتریس برگردان است اگر و فقط اگر:

$$(A - I_n)(A + I_n) = 0$$

۴۱-۷ دستور محاسبه معکوس یک ماتریس

در صورتی که ماتریس A معکوس پذیر باشد ($|A| \neq 0$)، برای پیدا کردن A^{-1} دترمینان A را معکوس کرده و در ماتریس الحاقی آن ضرب می کنیم، یعنی (مسئله ۱۶):

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot adj A$$

۷-۴۱-۱ معکوس ماتریس های 2×2

اگر $ad - bc \neq 0$ ، آنگاه:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

نکات مهم:

۱- معکوس هر ماتریس قطری D (در صورت وجود) یک ماتریس قطری است که عناصر واقع بر قطر آن معکوس عناصر واقع بر قطر ماتریس D می باشند.

۲- معکوس هر ماتریس بالامثلی (پایین مثلثی) در صورت وجود یک ماتریس بالامثلی (پایین مثلثی) است.

۷-۴۱-۲ محاسبه معکوس ماتریس به کمک تعریف

می خواهیم معکوس ماتریس مربع A را به دست آوریم. برای این منظور معکوس آن را (B) با عناصر مجهول می نویسیم. آنگاه طبق تعریف $AB = I_n$ را تشکیل می دهیم. این روش بیش تر برای ماتریس های در حالت پایین به کار می رود.

فرض می کنیم، می خواهیم معکوس ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ را به دست آوریم. خواهیم داشت:

$$AB = I_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & z \\ y & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} ax + by & az + bt \\ cx + dy & cz + dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ax + by = 1 \\ cx + dy = 0 \end{cases}, \begin{cases} az + bt = 0 \\ cz + dt = 1 \end{cases}$$

از حل دستگاه های فوق مقادیر x و y و z و t که همان عناصر ماتریس B می باشند، تعیین می شوند و ماتریس B همان معکوس A است (مسئله ۱۷).

۷-۴۲-۱ ماتریس متعامد

ماتریس حقیقی مربع A را «ماتریس متعامد» خوانند اگر معکوس آن برابر ترانزاده آن باشد. یعنی:

$$A.A' = A'.A = I_n \Rightarrow A^{-1} = A'$$

۷-۴۳-۱ ویژگی های ماتریس متعامد

- ۱) حاصل ضرب دو ماتریس متعامد هم درجه خود یک ماتریس متعامد است.
- ۲) معکوس یک ماتریس متعامد و ترانزاده یک ماتریس متعامد خود ماتریس های متعامدند.
- ۳) دترمینان یک ماتریس متعامد برابر (± 1) است.

۷-۴۴-۱ عملیات مقدماتی

اعمال زیر موسوم به عملیات مقدماتی است و هرگاه بر روی ماتریس A انجام گردد ماتریس جدیدی مانند B به دست می آید که آن را هم از ماتریس A نامیده و به $B \sim A$ نمایش می دهند.

۱) جای سطرها یا یک ماتریس عوض شود، این عمل را به R_i نشان می دهیم. شبیه این عمل برای ستون ها را به C_j نشان می دهیم.

۱) یعنی عناصر سطر i ام با عناصر سطر j ام تعویض گردد.

(۲) یک سطر در یک عددی مخالف صفر ضرب شود، این عمل را به kR_i نشان می‌دهیم.^۱ شبیه این عمل برای ستون‌ها را به kC_j نشان می‌دهیم.

(۳) مضربی غیر از صفر از یک سطر به یک سطر دیگر اضافه کرد. این عمل را به $kR_i + R_j$ نشان می‌دهیم.^۲ شبیه این عمل برای ستون‌ها را به $kC_j + C_i$ نشان می‌دهیم.

سه عمل R_i و $kR_i + R_j$ و $kC_j + C_i$ و سه عمل C_j و $kC_j + C_i$ و $kC_j + C_i$ موسوم به «عملیات مقدماتی سطری» و سه عمل R_i و $kR_i + R_j$ و $kC_j + C_i$ موسوم به «عملیات مقدماتی ستونی» است.

۴۵-۷ ماتریس‌های مقدماتی

هر ماتریسی را که با انجام عملیات‌های مقدماتی سطری روی ماتریس واحد به دست می‌آید، ماتریس مقدماتی می‌نامند. ماتریس مقدماتی درجه ۲ که از روی ماتریس واحد به دست می‌آید، عبارتند از:

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 0 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} k & \\ & 1 \end{bmatrix}, E_3 = \begin{bmatrix} 1 & \\ & k \end{bmatrix}, E_4 = \begin{bmatrix} 1 & k \\ & 1 \end{bmatrix}, E_5 = \begin{bmatrix} 1 & \\ k & 1 \end{bmatrix}, E_6 = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix}$$

هرگاه ماتریس‌های مقدماتی از طرف چپ در یک ماتریس ضرب شود آنگاه عملیات سطری نظیر به آن ماتریس مقدماتی روی ماتریس انجام می‌شود. هرگاه ماتریس مقدماتی از طرف راست در یک ماتریس ضرب شود آنگاه عملیات ستونی نظیر به آن ماتریس مقدماتی روی ماتریس انجام می‌شود.

نکات مهم:

- ۱- هر یک از ماتریس‌های مقدماتی غیرمتعدد هستند.
- ۲- درمیان هر ماتریس مقدماتی مخالف صفر می‌باشد.
- ۳- ماتریس‌های مقدماتی درجه ۳ نیز مانند درجه ۲ قابل بیان است.

۴۶-۷ مرتبه (رتبه) ماتریس

ماتریس A مفروض است، بنا به تعریف، درجه بزرگ‌ترین درمیان (از لحاظ درجه) استخراجی از ماتریس A را که مخالف صفر باشد «مرتبه ماتریس A » می‌نامند و به $r(A)$ نشان می‌دهند. برای تعیین رتبه ماتریس $n \times n$ ، ابتدا $|A|$ را محاسبه و در صورتی که $|A| \neq 0$ باشد رتبه ماتریس n خواهد بود. اگر $|A| = 0$ باشد و یکی از درمیان‌های $(n-1) \times (n-1)$ برای ماتریس مذکور مخالف صفر باشد، رتبه ماتریس $(n-1)$ خواهد بود، و در غیر این صورت یکی از درمیان‌های $(n-2) \times (n-2)$ ماتریس مفروض را محاسبه و مشابه بالا نتیجه‌گیری می‌کنیم و به همین ترتیب ادامه داده تا یکی از درمیان‌های ماتریس A مخالف صفر باشد (مسئله ۱۸).

نکات مهم:

- ۱- انجام هر یک از اعمال مقدماتی سطری و ستونی باعث تغییر مرتبه ماتریس نمی‌شود.
- ۲- اگر A ماتریس قطری باشد، $r(A)$ مساوی تعداد عناصر غیر صفر قطری است.
- ۳- در حالت خاص $r(I_n) = n$.
- ۴- اگر A' ترانژاده ماتریس A باشد، آنگاه $r(A) = r(A')$.

(۱) یعنی هر یک از عناصر سطر i ام در عددی مخالف صفر $k \in \mathbb{R}$ ضرب گردد.

(۲) یعنی k برابر سطر i ام را بر سطر j ام اضافه کنیم.

۵- اگر A ماتریس $m \times n$ باشد، آنگاه $0 \leq r(A) \leq \min(m, n)$.

۶- اگر A و B ماتریس‌های هم‌درجه باشند، آنگاه $r(A+B) \leq r(A) + r(B)$.

۷- اگر A, B قابل تعریف باشد، آنگاه $r(A.B) \leq \min[r(A), r(B)]$.

۸- فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ باشد: اگر A غیر منفرد باشد، آنگاه $r(A) = n$ و اگر A منفرد باشد، آنگاه $r(A) < n$.

۹- اگر ماتریس مربع B غیرمتغیر باشد، آنگاه $r(A.B) = r(A)$. این رابطه قابل تعمیم است. یعنی اگر ماتریس‌های مربع B و C غیرمتغیر باشند، آنگاه $r(A.B.C) = r(A)$.

۱- اگر $|A| \neq 0$ باشد $r(A^{-1}.A) = n$ و اگر $|A| = 0$ باشد $r(A^{-1}.A) < n$ توجه داشته باشید که $A^{-1}.A = I_n$

۱۱- رتبه یک ماتریس برابر است با می نیم تعداد سطرهاى مستقل خطى و یا ستون هاى مستقل خطى.

۴۷-۷ دستگاه معادلات خطی

مجموعه m معادله خطی از n مجهول $x_1, x_2, \dots, x_n$ به صورت زیر را یک «دستگاه معادلات خطی» می نامند.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (1)$$

دستگاه (۱) را می‌توانیم به صورت ماتریسی زیر بیان کنیم:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \quad (r) \quad AX = B \quad (r)$$

ماتریس $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ موسوم به ماتریس ضرایب مجهولات است. و بردار $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)'$ بردار مجهولات و $B = (b_1, b_2, \dots, b_m)'$ بردار ستونی اعداد معلوم نامیده می‌شود.

بردار $X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)'$ جواب دستگاه (۱) است، هرگاه X^* در تمامی m معادله خطی دستگاه (۱) صدق کند، اگر برای دستگاه (۱) X^* وجود داشته باشد دستگاه را «سازگار» نامند و اگر X^* وجود نداشته باشد دستگاه را «ناسازگار» خوانند. یک دستگاه سازگار ممکن است یک دسته جواب مانند X^* و یا دارای بی‌نهایت دسته جواب باشد. دو دستگاه که تعداد مجهولات آن‌ها با هم برابرند «هم‌ارز» خوانند و اگر X^* در یکی صدق کند در دیگری نیز صدق می‌کند. بنابراین به جای حل دستگاه معادلات سازگار می‌توان دستگاه هم‌ارز آن را حل کرد. با انجام دادن هر یک از اعمال زیر روی یک دستگاه یک دستگاه هم‌ارز با دستگاه اول به دست می‌آید.

(۱) تعویض جای دو معادله با یکدیگر.

(۲) ضرب یک معادله در یک عدد حقیقی، نامصفر.

(۳) افزودن مضرب‌بی از معادلهٔ λ ام به معادلهٔ λ ام و جای‌گزین کردن آن به جای معادلهٔ λ ام.

۴۸-۷ دستگاه معادلات خطی و ماتریس‌ها

با فرض اینکه دستگاه معادلات به صورت (۲) یا (۳) نوشته شده باشد، ماتریس افزوده $[A|B]$ که بردار ستونی ثابت‌ها در کنار ماتریس ضرایب داده شده است، تشکیل می‌دهیم و به کمک اعمال مقدماتی سطری بدین ترتیب عمل می‌کنیم، ابتدا a_{11} را به یک تبدیل نموده و بقیه عناصر ستون اول را به صفر تبدیل می‌کنیم. سپس a_{22} را به یک تبدیل نموده و بقیه عناصر ستون دوم را به صفر تبدیل می‌کنیم. این عمل را در مورد عناصر $a_{33}, \dots$ ادامه می‌دهیم تا به ستون آخر ماتریس ضرایب و یا به سطر آخر ماتریس ضرایب برسیم. بالاخره دستگاه وابسته به آخرین ماتریس به دست آمده را تشکیل داده و مجهولات را در صورت امکان تعیین می‌کنیم (مسئله ۱۹).

۴۹-۷ بحث در تعداد جواب‌های دستگاه معادلات خطی

خلاصه زیر مربوط به جواب دستگاه معادلات خطی $AX = B$ برای حالت کلی m معادله و n مجهول و همچنین حالت خاص n معادله n مجهول است. ماتریس $[A|B]$ را تشکیل می‌دهیم، با عملیات سطری مقدماتی (در صورت نیاز) مقادیر $r(A|B)$ و $r(A)$ مشخص می‌گردد.

- (۱) اگر $r(A) \neq r(A|B)$ باشد، دستگاه ناسازگار و فاقد جواب است.
- (۲) اگر $r(A) = r(A|B)$ باشد، دستگاه سازگار و حداقل یک دسته جواب دارد.
- (۳) اگر $r(A) = r(A|B) = n$ باشد، دستگاه سازگار و یک دسته جواب منحصر به فرد دارد.
- (۴) اگر $r(A) = r(A|B) < n$ باشد، دستگاه سازگار و تعداد نامحدودی (بی‌نهایت) دسته جواب دارد (مسئله ۲۰).
تذکره: اگر درمیان ماتریس ضرایب صفر باشد، دستگاه یا جواب ندارد و یا بی‌شمار جواب دارد.

۵۰-۷ حل دستگاه n معادله n مجهول با استفاده از دستور کرامر

در دستگاه (۱) فرض کنیم $m = n$ باشد. به روش کرامر از دستورهای $x_1 = |A_1|/|A|$ ، $x_2 = |A_2|/|A|$ و $\dots$ و $x_n = |A_n|/|A|$ که در آن‌ها $|A|$ درمیان ضرایب دستگاه بوده ($|A| \neq 0$) و $|A_1|$ و $|A_2|$ و $\dots$ و $|A_n|$ را درمیان‌های متناظر با مجهولات x_1 و x_2 و $\dots$ و x_n می‌نامند و برای تعیین هریک از آن‌ها کافی است در درمیان ضرایب دستگاه ستونی را که متناظر با آن مجهول بوده حذف کنیم و به جای آن ماتریس مقادیر را قرار دهیم (مسئله ۲۱).

۵۱-۷ حل دستگاه n معادله n مجهول با استفاده از معکوس ماتریس‌ها

در دستگاه (۱) فرض می‌کنیم $m = n$ باشد، آن را به صورت $AX = B$ می‌نویسیم، که در آن A ماتریس مربع $n \times n$ و بردارهای X و B ستونی $n \times 1$ است. اگر $|A| \neq 0$ باشد، در این صورت A دارای معکوس A^{-1} خواهد بود. اگر طرفین $AX = B$ را در ماتریس A^{-1} ضرب کنیم، داریم $A^{-1}AX = A^{-1}B$ و در نتیجه $X = A^{-1}B$ از این رابطه X را می‌توان به دست آورد (مسئله ۲۲).

۵۲-۷ دستگاه معادلات همگن خطی

اگر در دستگاه (۱) یا $AX = B$ اعداد ثابت مسوی صفر باشد یعنی $B = (0, 0, \dots, 0)$ «دستگاه همگن» است. در این صورت دستگاه به صورت ماتریس $AX = 0$ درمی‌آید. اگر ماتریس ضرایب و اعداد ثابت را در نظر بگیریم. داریم $[A|0]$ بدیهی است که $r(A) = r(A|0)$ یعنی دستگاه همگن $AX = 0$ همواره سازگار است.

در دستگاه همگن همواره $X = 0$ یعنی $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ صدق می‌کند. و این جواب موسوم به جواب بدیهی (منحصر به فرد) است. به طور کلی در یک دستگاه n معادله n مجهول:

- (۱) اگر درمیان ضرایب مخالف صفر باشد، دستگاه فقط جواب بدیهی دارد.
- (۲) اگر درمیان ضرایب مساوی صفر باشد، دستگاه غیر از جواب بدیهی جواب‌های دیگر نیز دارد (مسئله ۲۳).

نکات مهم:

$$\text{دستگاه} \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases} \text{ مفروض است:}$$

- (۱) اگر $a/a' \neq b/b'$ باشد، دستگاه دارای یک دسته جواب است.
 (۲) اگر $a/a' = b/b' \neq c/c'$ باشد، دستگاه جواب ندارد یا غیرممکن است.
 (۳) اگر $a/a' = b/b' = c/c'$ باشد، دستگاه بی‌شمار جواب دارد.

۵۳-۷ مشتق یک ماتریس (مشتق برداری)

۱-۵۳-۷ مشتق بردار سطری یا ستونی

اگر در یک بردار سطری یا ستونی عناصر تابعی از متغیر t باشد، مشتق این بردار نسبت به این متغیر بردار سطری یا ستونی است.

(۱) اگر بردار X که سطری است در نظر بگیریم:

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \text{مشتق } X \text{ نسبت به } t \text{ برابر است با:}$$

$$\frac{dX}{dt} = \left(\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \dots, \frac{dx_n}{dt} \right)$$

(۲) اگر بردار X که ستونی است در نظر بگیریم:

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n)' \quad \text{مشتق } X \text{ نسبت به } t \text{ برابر است با:}$$

$$\frac{dX}{dt} = \left(\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \dots, \frac{dx_n}{dt} \right)'$$

۲-۵۳-۷ مشتق برداری توابع خطی

یک عبارت به صورت AX را که در آن A یک اسکالر $(1 \times n)$ و X یک بردار ستونی $(n \times 1)$ باشد، یک تابع خطی گوئیم.

$$AX = [a_1, a_2, \dots, a_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$$

مشتق‌های جزئی AX نسبت به متغیر x_i ، $i = 1, 2, \dots, n$ برابر است با:

$$\frac{\partial (AX)}{\partial x} = \left[\frac{\partial (AX)}{\partial x_1}, \frac{\partial (AX)}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial (AX)}{\partial x_n} \right] = [a_1, a_2, \dots, a_n]$$

یعنی مشتق یک تابع خطی که یک اسکالر است نسبت به بردار ستونی X ، یک بردار سطری است (مسأله ۲۴).

۳-۵۳-۷ مشتق برداری یک تابع برداری

تابع $y_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_m)$ ، $i = 1, 2, \dots, n$ را در نظر می‌گیریم که در آن y_i نمایش یک بردار ستونی n بعدی است به‌طوری‌که هر عنصر آن مانند y_i تابعی از m متغیر x است. در این صورت از هر y_i می‌توان نسبت به x_i مشتق جزئی گرفت یعنی (مسأله ۲۵):

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_2}{\partial x_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \frac{\partial y_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_n}{\partial x_m} \end{bmatrix}$$

۴-۵۳-۷ مشتق برداری یک صورت درجه دوم

هر عبارت به صورت $X'AX$ را که در آن X یک بردار ستونی $(n \times 1)$ و A یک ماتریس متقارن $(n \times n)$ باشد، صورت درجه دوم می خوانند.^۱

$$X'AX = [x_1, x_2, \dots, x_n] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$= a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \dots + 2a_{1n}x_1x_n + a_{22}x_2^2$$

$$+ 2a_{23}x_2x_3 + \dots + 2a_{2n}x_2x_n + \dots + \dots + a_{nn}x_n^2$$

مشتق های جزئی $X'AX$ نسبت به متغیر x_i ، $i = 1, 2, 3, \dots, n$ برابر است با:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(X'AX) = 2(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2}(X'AX) = 2(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n)$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial}{\partial x_n}(X'AX) = 2(a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nn}x_n)$$

می توان نتیجه گرفت مجموعه معادله های فوق مشتمل بر عناصر $X'A$ است که بردار سطری n بعدی است و یا مشتمل بر عناصر AX است که بردار ستونی n بعدی است، بنابراین (مسئله ۲۳):

$$\frac{\partial}{\partial x}(X'AX) = 2X'A \quad , \quad \frac{\partial}{\partial x}(X'AX) = 2AX$$

۵۴-۷ معادله مفسر، مقادیر ویژه و امتدادهای یک ماتریس مربع

هرگاه X یک بردار و k عددی حقیقی باشد و A یک ماتریس مربع از درجه n باشد، به قسمی که $AX = kX$ ، در این صورت k را «مقدار ویژه (خاص)» و X را «بردار یا امتداد ویژه (خاص)» گویند. با توجه به اینکه $X = \bar{O}$ در معادله صدق می کند، داریم:

$$AX - kX = \bar{O} \Rightarrow (A - kI)X = \bar{O} \quad (۱)$$

رابطه (۱) یک دستگاه معادلات همگن است. شرط آنکه این دستگاه جواب های غیر بدیهی داشته باشد آن است که دترمینان ضرایب مجهولات دستگاه (۱) مساوی صفر باشد، یعنی:

$$|A - kI| = 0 \quad (۲)$$

رابطه (۲) موسوم به معادله مفسر ماتریس A است.

(۱) در فرم ماتریسی نوشته شده داریم $a_{ij} = a_{ji}$.

۵۵-۷ نحوه تعیین مقدار ویژه و بردار ویژه

فرم ماتریسی $AX = kX$ را به صورت دستگاه معادلات خطی درمی آوریم، یعنی:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kx_1 \\ kx_2 \\ \vdots \\ kx_n \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = kx_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = kx_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = kx_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a_{11} - k)x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - k)x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + (a_{nn} - k)x_n = 0 \end{cases}$$

شرط وجود جواب برای دستگاه فوق آن است که دترمینان ضرایب دستگاه مساوی صفر باشد، یعنی:

$$\begin{vmatrix} (a_{11} - k) & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & (a_{22} - k) & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & (a_{nn} - k) \end{vmatrix} = 0$$

معادله فوق یک معادله درجه n است و دارای n ریشه k_1 و k_2 و $\dots$ و k_n است. در واقع ریشه های معادله فوق همان مقادیر ویژه هستند. یعنی یک ماتریس درجه n دارای n مقدار ویژه است. با جای گذاری این مقادیر ویژه در دستگاه معادلات n بردار ویژه به دست می آید (مسئله ۲۷).

۵۶-۷ صورت کلی معادله مفسر یک ماتریس 2×2

$$\text{معادله مفسر ماتریس } A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ برابر است با:}$$

$$k^2 - (a + d)k + (ad - bc) = 0$$

می دانیم $tr A$ ، مجموع عناصر واقع بر قطر اصلی است، یعنی $tr A = a + d$ و همچنین $|A| = ad - bc$ بنابراین فرم دیگر معادله مفسر ماتریس A عبارت است از (مسئله ۲۸):

$$k^2 - (tr A)k + |A| = 0$$

در نتیجه اگر k_1 و k_2 مقادیر ویژه ماتریس A باشند، آن گاه:

$$A \text{ مجموع مقادیر ویژه } = k_1 + k_2 = tr A = a + d$$

$$A \text{ حاصل ضرب مقادیر ویژه } = k_1 \cdot k_2 = |A| = ad - bc$$

۵۷-۷ صورت کلی معادله مفسر یک ماتریس 3×3

$$\text{معادله مفسر ماتریس } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \text{ برابر است با:}$$

$$k^3 - (tr A)k^2 + \left(\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \right) k - |A| = 0$$

در نتیجه اگر k_1 و k_2 و k_3 مقادیر ویژه ماتریس A باشد، آن‌گاه (مسئله ۲۹):

$$A \text{ مجموع مقادیر ویژه } = k_1 + k_2 + k_3 = tr A$$

$$A \text{ حاصل ضرب مقادیر ویژه } = k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 = |A|$$

۵۸-۷ مقادیر ویژه معکوس یک ماتریس

قضیه: ماتریس A معکوس پذیر است، اگر و تنها اگر همه مقادیر ویژه اش مخالف صفر باشد.

قضیه: اگر ماتریس A معکوس پذیر باشد k_1 و k_2 و ... مقادیر ویژه آن باشند، آن‌گاه $1/k_1$ و $1/k_2$ و ... مقادیر ویژه ماتریس A^{-1} است (مسئله ۳۰).

تذکره: اگر $X \neq 0$ یک بردار ویژه نظیر مقدار ویژه k از ماتریس A باشد، آن‌گاه X یک بردار ویژه A^{-1} نظیر مقدار ویژه $1/k$ است.

۵۹-۷ مقادیر ویژه چند جمله ای های ماتریس

در حالت کلی اگر k_1 و k_2 و ... مقادیر ویژه ماتریس A باشند، در این صورت:

(۱) مقادیر ویژه nA عبارتند از: nk_1 و nk_2 و ...

(۲) مقادیر ویژه A^n عبارتند از: k_1^n و k_2^n و ...

(۳) مقادیر ویژه $A + nI$ عبارتند از: $k_1 + n$ و $k_2 + n$ و ... (مسئله ۳۱)

۶۰-۷ خواص معادله مفسر، مقادیر ویژه و بردارهای ویژه

(۱) مجموع مقادیر ویژه مفسر ماتریس مربع (ریشه های معادله مفسر) A برابر است با $tr A$.

(۲) حاصل ضرب مقادیر ویژه هر ماتریس مربع (ریشه های معادله مفسر) A برابر است با $|A|$.

(۳) مقادیر ویژه یک ماتریس قطری، همان عناصر واقع بر قطر اصلی ماتریس است.

(۴) مقادیر ویژه یک ماتریس بالامتثالی (پایین مثلثی) همان عناصر واقع بر قطر اصلی ماتریس است (مسئله ۳۲).

(۵) هر ماتریس مربع در معادله مفسرش صدق می کند (قضیه کبلی-هامیلتون).

(۶) مقادیر ویژه A و A' یکسان هستند.

(۷) مقادیر ویژه هر ماتریس متقارن اعداد حقیقی اند.

(۸) اگر ماتریس A متقارن باشد و k_1 و k_2 دو مقدار ویژه متمایز باشند، امتدادهای ویژه نظیر k_1 و k_2 بر هم عمودند.

(۹) اگر k_1 و k_2 و ... ریشه های مجزای معادله مفسر ماتریس مربع A باشد، و اگر X_1 ، X_2 و ... و X_n بردارهای

ویژه غیر صفر متناظر k_i ها باشند در این صورت X_i ها مستقل خطی اند.

(۱۰) اگر دو ماتریس متشابه باشند، دارای مقادیر ویژه یکسانی هستند.

(۱) دو ماتریس مربع A و B را متشابه گویند، اگر ماتریس غیر منفرد مربع از همان درجه مانند R وجود داشته باشد، به طوری که

$$B = R^{-1} \cdot A \cdot R$$

داشته باشیم.

مسائل نمونه فصل ۷

۸-۱). اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ مطلوب است:

- ۱) $tr A$ ۲) $A + B$ ۳) $-B$ ۴) $3A$ ۵) $A.B$ ۶) B' ۷) $\det A$ ۸) $\det B'$

۹. اگر A و B دو ماتریس هم‌درجه و $AB = BA$ ، آنگاه $(A + B)(A - B)$ را بیابید.

۱۰. دترمینان ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ را بیابید.

۱۱. در دترمینان $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ کهاد a_{11} و a_{32} را بیابید.

۱۲. دترمینان ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-a & 1 \\ 1 & 1 & 1-a \end{bmatrix}$ را بیابید.

۱۳. آیا ماتریس $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 8 \\ 0 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ ، منفرد است؟

۱۴. ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ مفروض است، ماتریس همساز و الحاقی آن را بیابید.

۱۵. اگر $A^2 = 2I$ ، در این صورت معکوس $A - I$ را بیابید.

۱۶. معکوس ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ را در صورت وجود تعیین کنید.

۱۷. معکوس ماتریس $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$ را بیابید.

۱۸. مرتبه ماتریس‌های $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 7 & 0 \\ 3 & 1 & 6 \end{bmatrix}$ را بیابید.

۱۹. دستگاه معادلات خطی زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 = -4 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 5 \end{cases}$$

۲۰. تعداد جواب‌های دستگاه معادلات زیر را تعیین کنید.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 10 \\ 2x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 5 \end{cases}$$

۲۱. دستگاه معادلات زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$$

۲۲. دستگاه معادلات $\begin{cases} 5x - 3y = 9 \\ 2x + y = -8 \end{cases}$ را حل کنید.

۲۳. بازاری کدام مقدار m دستگاه معادلات زیر جواب غیر صفر دارد؟

$$\begin{cases} mx + y + 2z = 0 \\ x + 2y + mz = 0 \\ x - y - 2z = 0 \end{cases}$$

۲۴. اگر $A = (a, -2a, a^2)$ و $X = (x_1, x_2, x_3)'$ ، آنگاه $\partial(A'X)/\partial x$ را بیابید.

۲۵. اگر $y = \begin{bmatrix} x_1x_2 - 2x_2 - x_1x_2^2 \\ -x_2 + x_1^2x_3 + 2x_1 \end{bmatrix}$ باشد، $\partial y/\partial x$ را بیابید.

۲۶. اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ و $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ باشد، $\frac{\partial}{\partial x}(X'AX)$ را بیابید.

۲۷. ماتریس $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ مفروض است. معادله مفسر، مقادیر ویژه و بردارهای ویژه را به دست آورید.

۲۸. معادله مفسر و مقادیر ویژه ماتریس $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ را به دست آورید.

۲۹. مجموع مقادیر ویژه ماتریس $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 4 \\ -7 & -3 & -1 \\ 7 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ را بیابید.

۳۰. هرگاه $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$ ، مقادیر ویژه A^{-2} کدام است؟

۳۱. اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ در این صورت مقدارهای ویژه $2A$ و A^2 را بیابید.

۳۲. مقادیر ویژه ماتریس $A = 4 \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ را بیابید.

پاسخ مسائل نمونه فصل ۷

$$tr A = 1 + 3 = 4$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 1+3 & 2+4 \\ 0+1 & 2+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$-B = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad .3$$

$${}^rA = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} \quad .4$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 \times 3 + 2 \times 1 & 1 \times 4 + 2 \times 0 \\ 0 \times 3 + 3 \times 1 & 0 \times 4 + 3 \times 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \quad .5$$

$$B' = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \quad .6$$

$$\det A = (1 \times 3) - (2 \times 0) = 3 \quad .7$$

$$\det B' = (3 \times 0) - (1 \times 4) = -4 \quad .8$$

$$(A+B)(A-B) = A^T + A(-B) + BA - B^T = A^T - B^T - AB + BA = A^T - B^T \quad .9$$

$$\det A = (1 \times 1 \times 1) + 2 \times 4 \times 5 + 3 \times 0 \times 3 - (3 \times 1 \times 5 + 4 \times 0 \times 1 + 1 \times 3 \times 2) = 20 \quad .10$$

$$|M_{11}| = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}, \quad |M_{22}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31} \quad .11$$

۱۲. سطر اول را از سطر دوم و سوم کم می‌کنیم. ماتریس بالامثلنی به‌دست می‌آید. از طرفی می‌دانیم دترمینان هر ماتریس بالامثلنی برابر حاصل ضرب عناصر واقع بر روی قطر اصلی است. یعنی:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & -a \end{vmatrix} = a^2$$

۱۳. چون هر یک از عناصر سون اول صفر می‌باشد، مقدار دترمینان A صفر است و بنابراین A یک ماتریس منفرد است.

$$\begin{aligned} A_{11} &= (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1, A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \\ A_{21} &= (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0, A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0, A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \\ A_{31} &= (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1, A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \end{aligned}$$

بنابراین:

$$\text{cof.} A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{adj} A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

۱۵

$$\begin{aligned} A^T &= 2I \Rightarrow A^T = I + I \Rightarrow A^T - I = I \Rightarrow (A - I)(A^T + AI + I^T) \\ &= (A - I)(A^T + A + I) = I \Rightarrow (A - I)^{-1} = A^T + A + I \end{aligned}$$

۱۶. $\det A = -10$ بنابراین ماتریس A معکوس پذیر است. ماتریس الحاقی A را مانند مسأله ۱۴، به دست می آوریم و خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \text{adj} A &= \begin{bmatrix} -8 & 2 & 8 \\ 2 & 2 & -7 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{adj} A = -\frac{1}{10} \begin{bmatrix} -8 & 2 & 8 \\ 2 & 2 & -7 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix} \\ A^{-1} &= \begin{bmatrix} 0.8 & -0.2 & -0.8 \\ -0.2 & -0.2 & 0.7 \\ 0.2 & 0.2 & -0.2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

۱۷

$$\begin{aligned} AB &= I_4 \Rightarrow \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & z \\ y & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 5x + 3y & 5z + 3t \\ 7x + 4y & 7z + 4t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \begin{cases} 5x + 3y = 1 \\ 7x + 4y = 0 \end{cases} &\Rightarrow x = -4, y = 7, \begin{cases} 5z + 3t = 0 \\ 7z + 4t = 1 \end{cases} \Rightarrow z = 3, t = -5 \end{aligned}$$

در نتیجه

$$B = A^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 7 & -5 \end{bmatrix}$$

۱۸

$$|A| = (2 + 0 + 8) - (22 + 0 + 1) = 10 - 22 = -12 \Rightarrow r(A) = 2$$

$|B| = 0$ ، زیرا ستون‌های اول و سوم متناسبند. بنابراین باید دترمینان‌های درجه دو را در نظر بگیریم. اگر حداقل یکی از دترمینان‌ها مخالف صفر باشد، مرتبه ماتریس B دو خواهد بود. مثلاً

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = 7 - 0 = 7 \Rightarrow r(B) = 2$$

۱۹

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & -1 & -4 \\ 3 & -2 & -1 & 5 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -10 \\ 0 & -8 & -4 & -4 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -10 \\ 0 & 0 & -28 & -84 \end{array} \right]$$

$$(-3R_1 + R_2, -2R_1 + R_3) \quad (8R_2 + R_3)$$

دستگاه وابسته به ماتریس فوق عبارت است از:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ x_2 - 3x_3 = -10 \\ -28x_3 = -84 \end{cases} \Rightarrow x_3 = 3, x_2 = -1, x_1 = 2$$

۲۰.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & -2 \end{vmatrix} = (-4 - 2 - 4) - (4 - 2 + 4) = -16 \Rightarrow \det \neq 0 \Rightarrow r(A) = 3$$

$$[A|B] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & : & 6 \\ 1 & 2 & -1 & : & 10 \\ 2 & -4 & -2 & : & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 10 \\ 2 & -4 & 5 \end{vmatrix} = 17 \Rightarrow r(A|B) = 3$$

$r(A) = r(A|B)$ می‌باشد، بنابراین دستگاه سازگار و یک دسته جواب منحصر به فرد دارد.

۲۱.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = -2, \quad |A_1| = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \end{vmatrix} = -2$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -2, \quad |A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = -4$$

خواهیم داشت:

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{-2}{-2} = 1, x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{-2}{-2} = 1, x_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{-4}{-2} = 2$$

۲۲.

$$\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 8 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = 11, A^{-1} = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 8 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 33 \\ 22 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow x = 3, y = 2$$

۲۳. باید دترمینان ضرایب دستگاه صفر شود، پس:

$$\begin{vmatrix} m & 1 & 2 \\ 1 & 2 & m \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (m-4)(m+1) = 0 \Rightarrow m = 4 \quad \vee \quad m = -1$$

۲۴

$$AX' = [a \ -\gamma a \ a'] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = ax_1 - \gamma ax_2 + a'x_3$$

$$\frac{\partial(AX')}{\partial x} = \left[\frac{\partial(AX')}{\partial x_1}, \frac{\partial(AX')}{\partial x_2}, \frac{\partial(AX')}{\partial x_3} \right] = [a \ -\gamma a \ a'] = A$$

۲۵

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1^2 & \gamma x_1 x_2 + \gamma \\ x_1 - \gamma & -1 \\ -\gamma x_1 x_2 & x_1^2 \end{bmatrix}$$

۲۶

$$X'AX = [x_1 \ x_2] \begin{bmatrix} \gamma & 1 \\ 1 & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \gamma x_1^2 + x_1 x_2 + x_1 x_2 + \gamma x_2^2 = \gamma x_1^2 + \gamma x_1 x_2 + \gamma x_2^2$$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_1}(X'AX) = \gamma x_1 + \gamma x_2 \\ \frac{\partial}{\partial x_2}(X'AX) = \gamma x_1 + \gamma x_2 \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}(X'AX) = \gamma \begin{bmatrix} \gamma x_1 + x_2 \\ x_1 + \gamma x_2 \end{bmatrix} = \gamma AX$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}(X'AX) = \gamma[\gamma x_1 + x_2, x_1 + \gamma x_2] = \gamma X'A$$

۲۷

$$A - kI = \begin{bmatrix} \gamma & 1 \\ -\gamma & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma - k & 1 \\ -\gamma & 1 - k \end{bmatrix} \Rightarrow |A - kI| = \begin{vmatrix} \gamma - k & 1 \\ -\gamma & 1 - k \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (\gamma - k)(1 - k) + \gamma = 0 \Rightarrow k^2 - \delta k + \epsilon = 0 \quad \text{معادله مفسر}$$

جواب‌های این معادله عبارتند از $k = 2$ و $k = 3$ که همان مقادیر ویژه هستند. بردارهای ویژه نظیر $k = 2$ و $k = 3$

جواب‌های ناصفر معادله $AX = kX$ است. اگر $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ در این صورت:

$$\begin{bmatrix} \gamma & 1 \\ -\gamma & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \gamma x_1 + x_2 = kx_1 \\ -\gamma x_1 + x_2 = kx_2 \end{cases} \xrightarrow{k=2} \begin{cases} \gamma x_1 + x_2 = 0 \\ -\gamma x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

جواب‌های این دستگاه عبارتند از کلیه نقاط واقع بر خط $x_2 = -\gamma x_1$. پس بردار ویژه نظیر $k = 2$ عبارت است از $\{(x_1, x_2) | x_2 = -\gamma x_1\}$. به‌طور مشابه برای $k = 3$ خواهیم داشت:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ -\gamma x_1 - \gamma x_2 = 0 \end{cases}$$

جواب‌های این دستگاه عبارتند از کلیه نقاط واقع بر خط $x_2 = -x_1$. پس بردار ویژه نظیر $k = 2$ عبارت است از $\{(x_1, x_2) | x_2 = -x_1\}$

۲۸.

$$k^T - (tr A) + |A| = 0 \Rightarrow k^T - (4 + 1)k + (4 + 2) = 0 \Rightarrow k^T - 5k + 6 = 0 \quad \text{معادله مفسر}$$

$$(k - 3)(k - 2) = 0 \Rightarrow k_1 = 3, k_2 = 2 \quad \text{مقادیر ویژه}$$

۲۹.

$$\text{مجموع مقادیر ویژه} = tr A = 5 - 3 + 2 = 4$$

۳۰.

$$k^T - (tr A)k + |A| = 0 \Rightarrow k^T + k - 6 = 0 \Rightarrow k_1 = -3, k_2 = 2$$

$$A^{-2} \text{ مقادیر ویژه} = (A^{-1})^2 \text{ مقادیر ویژه} = \left(-\frac{1}{3}\right)^2, \left(\frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{1}{9}, \frac{1}{4}$$

۳۱.

$$k^T - (tr A)k + |A| = 0 \Rightarrow k^T - 3k + 2 = 0 \Rightarrow k_1 = 1, k_2 = 2$$

$$2A \text{ مقادیر ویژه} = 2k_1, 2k_2 = 2, 4$$

$$A^2 \text{ مقادیر ویژه} = k_1^2, k_2^2 = 1, 4$$

۳۲. A ماتریس بالامتلی می باشد، پس عناصر روی قطر اصلی ماتریس همان مقادیر ویژه می باشند. یعنی: $\{A, 4, 12\}$ یا $\{4 \times 2, 4 \times 1, 4 \times 3\}$.

سوالات تستی فصل ۷

۱- حاصل $\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} [-2 \ 3 \ 4]$ کدام است؟

۸ (۱) ۲۸ (۲) $[-10 \ 6 \ 12]$ (۳) $\begin{bmatrix} -10 \\ 6 \\ 12 \end{bmatrix}$ (۴)

۲- اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ باشد، آنگاه کدام رابطه زیر درست است؟

$A^4 = \begin{bmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 16 \end{bmatrix}$ (۱) $A^4 = \begin{bmatrix} 0 & 32 \\ 32 & 0 \end{bmatrix}$ (۲) $tr A = -4$ (۳) (۴) موارد ۱ و ۲ درست اند.

۳- حاصل ضرب ریشه های معادله $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} = 0$ کدام است؟

۶ (۲) ۲ (۳) -۶ (۴) -۲ (۱)

۴- اگر $C = [c_{ij}]_{6 \times 2}$ ، $A = [a_{ij}]_{2 \times 4}$ و B چه قدر باشد تا حاصل ضرب $A(BC)$ وجود داشته باشد؟

6×4 (۱) 3×2 (۲) 4×6 (۳) 2×3 (۴)

۵- مجموع عناصر یک ماتریس مربع درجه n کدام است؟

$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ij}$ (۴) $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij}$ (۳) $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}$ (۲) $\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n a_{ij}$ (۱)

۶- اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ باشد، AB کدام است؟

(۱) $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ -3 & 12 & 6 \\ 12 & 4 & 4 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} 4 & -2 & 12 \\ 2 & 12 & 4 \\ 6 & 6 & 4 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} 4 & -2 & 6 \\ 3 & 12 & 1 \\ 12 & 8 & 4 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} 4 & 3 & 6 \\ -2 & 12 & 6 \\ 6 & 4 & 4 \end{bmatrix}$

۷- عنصر سطر دوم ستون سوم $A(B+C)$ کدام است؟

(۱) $\sum_{k=1}^n a_{2k}(b_{rk} + c_{rk})$ (۲) $\sum_{k=1}^n a_{rk}(b_{2k} + c_{2k})$ (۳) $\sum_{k=1}^n a_{rk}(b_{2k} + c_{2k})$ (۴) $\sum_{k=1}^n a_{k2}(b_{k2} + c_{k2})$

۸- کدام گزاره زیر درست است؟

(۱) یک ماتریس مربع وقتی پایین مثلثی است که $i > j \Rightarrow a_{ij} = 0$

(۲) یک ماتریس مربع وقتی بالا مثلثی است که $i < j \Rightarrow a_{ij} = 0$

(۳) یک ماتریس مربع وقتی قطری است که $i = j \Rightarrow a_{ij} = 0$

(۴) یک ماتریس مربع وقتی پادمتقارن است که $\forall i, j \quad a_{ij} = -a_{ji}$

۹- اگر $A^T = A$ و $B = (2A - I)$ ، در این صورت $A^T + B^T$ کدام است؟

(۱) $A - B$ (۲) $A + B$ (۳) A (۴) B

۱۰- به ازای کدام مقدار x و y حاصل ضرب $\begin{bmatrix} 4 & y \\ x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ ماتریس قطری می شود؟

(۱) $y = -2, x = -1$ (۲) $y = 2, x = -1$ (۳) $y = -2, x = 1$ (۴) $y = 2, x = 1$

۱۱- اگر $A = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$ در این صورت ماتریس A^A کدام است؟

(۱) $4I$ (۲) $256I$ (۳) 4 (۴) 256

۱۲- اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ ، آنگاه کدام تساوی زیر نادرست است؟

(۱) $(A+B)' = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ (۲) $(2A)' = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$ (۳) $A(-B) = \begin{bmatrix} -6 & 2 \\ -3 & 7 \end{bmatrix}$ (۴) $A+B' = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

۱۳- اگر A و B و C سه ماتریس باشند، به قسمی که ضرب آن‌ها امکان پذیر باشد، کدام یک از گزاره‌های زیر درست است؟

(۱) $A = \vec{O} \Rightarrow AB = \vec{O}$ (۲) $AB = AC \Rightarrow B = C$

(۳) $AB = \vec{O} \Rightarrow A = \vec{O}$ یا $B = \vec{O}$ (۴) $(AB)' = A'B'$

۱۴- عناصر واقع بر قطر اصلی AA' :

(۱) تماماً نامنفی هستند (۲) تماماً منفی هستند (۳) تماماً مساوی هستند (۴) هیچ کدام

۱۵- اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ کدام تساوی زیر نادرست است؟

(۱) $A^2 = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$ (۲) $AB = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ (۳) $B = 3I_3$ (۴) $A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

۱۶- اگر $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، عنصر سطر اول ستون سوم از ماتریس A^{-1} کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) -4 (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $-\frac{1}{2}$

۱۷- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ، آنگاه ستون دوم BA کدام است؟

- (۱) $\begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ -1 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 4 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} 9 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$

۱۸- کدام یک از تساوی‌های زیر درست است؟

- (۱) $(A - A')' = A - A'$ (۲) $(AB' + BA')' = BA' + AB'$
(۳) $(B'AB)' = B'AB$ (۴) موارد ۱ و ۲

۱۹- اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ ، رابطه $AB = BA$ در چه صورت برقرار است؟

- (۱) $c = d, a = b$ (۲) $b = -c, a = d$ (۳) $b = -d, a = c$ (۴) $b = -c, a = -d$

۲۰- ماتریس A از درجه ۳ است، اگر مقدار دترمینان A برابر ۳ باشد، دترمینان ماتریس $3A$ کدام است؟

- (۱) ۹ (۲) ۲۷ (۳) ۸۱ (۴) ۲۴۳

۲۱- دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} x+y & a \\ x-y & b \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 3 & -a+1 \\ 1 & 2b \end{bmatrix}$ مفروض است، اگر $A = B$ ، آنگاه:

- (۱) $y = 1, x = 2, b = 0, a = \frac{1}{2}$ (۲) $y = 1, x = 2, b = \frac{1}{2}, a = 0$
(۳) $y = 2, x = 1, b = 0, a = \frac{1}{2}$ (۴) $y = 2, x = 2, b = 1, a = 1$

۲۲- اگر $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ، آنگاه $x + y$ کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۵

۲۳- کدام گزاره درست است؟

- (۱) هر ماتریس قطری یک ماتریس متقارن نیست. (۲) هر ماتریس قطری قرینهٔ ماتریس ترانژاده خودش است.
(۳) هر ماتریس اسکالر یک ماتریس قطری است. (۴) هر ماتریس قطری یک ماتریس اسکالر است.

۲۴- اگر ماتریس درجه n را در m ضرب کنیم، دترمینان آن:

- (۱) در m ضرب شده است. (۲) در m^n ضرب شده است.
(۳) در n^m ضرب شده است. (۴) در $m \cdot n$ ضرب شده است.

۲۵- اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ و $f(x) = 3x^2 - 4I_2$ باشد، $f(A)$ کدام است؟

- (۱) $\begin{bmatrix} 8 & 15 \\ 0 & 23 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} 12 & 15 \\ 0 & 27 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} 16 & 15 \\ 0 & 31 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

۲۶- حاصل ماتریس $\begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} + \sin \theta \begin{bmatrix} \sin \theta & -\cos \theta \\ \cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix}$ کدام است؟

(۱) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

۲۷- جواب معادله $\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \end{vmatrix} = 0$ کدام است؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۰ (۴) ۳

۲۸- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ ماتریس X از رابطه $AX = A'$ کدام است؟

(۱) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} -4 & -5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$

۲۹- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 4 & 20 \\ 4 & 8 & 11 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 12 & 2 \\ 4 & 8 & 11 \end{bmatrix}$ باشد، حاصل $|A| + |B|$ کدام است؟

(۱) ۰ (۲) ۱ (۳) -۲ (۴) ۲

۳۰- اگر $A = \begin{bmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha & \sin(\alpha + \beta) \\ \sin \gamma & \cos \gamma & \sin(\gamma + \beta) \\ \sin \varphi & \cos \varphi & \sin(\varphi + \beta) \end{bmatrix}$ ، آنگاه دترمینان A کدام است؟

(۱) ۱ (۲) ۰ (۳) $\sin(\alpha + \beta + \gamma)$ (۴) $\sin \alpha \cos \beta \sin \varphi$

۳۱- اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$ در این صورت ماتریس A^n کدام است؟

(۱) 0 (۲) A (۳) $-A$ (۴) متقارن

۳۲- $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ مفروض است، ماتریس مربع مرتبه دوم را چنان پیدا کنید که $AB' = 3B$.

(۱) $\begin{bmatrix} 15 & 6 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

۳۳- اگر $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ ، در این صورت دترمینان A^{-1} کدام است؟

(۱) $\frac{1}{11}$ (۲) $-\frac{1}{11}$ (۳) $-\frac{1}{15}$ (۴) $\frac{1}{15}$

۳۴- اگر $AA' = A'A$ و $B = A^{-1}A'$ باشد، آنگاه $(BB')^{-1}$ کدام است؟

(۱) 0 (۲) A (۳) B' (۴) I

۳۵- در ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & -4 \end{bmatrix}$ ، همساز A_{13} کدام است؟

(۱) ۶ (۲) ۳ (۳) -۳ (۴) -۶

۳۶- حاصل $\begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{vmatrix}$ کدام است؟

(۱) -۳ (۲) ۱ (۳) ۰ (۴) -۱

۳۷- اگر $A^2 = 3A$ باشد، آنگاه A^{100} کدام است؟

(۱) $3^{100} A^{99}$ (۲) $3^{100} A$ (۳) $3^{100} A$ (۴) $3^{99} A^{99}$

۳۸- اگر $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ و $B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ ، در این صورت AB^{-1} کدام است؟

(۱) $\begin{bmatrix} 9 & -3 \\ -12 & 3 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} 9 & 3 \\ -12 & 3 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

۳۹- کدام نقطه بر خط $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 2 & 1 \\ 5 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 0$ قرار دارد؟

(۱) $(0, 1)$ (۲) $(8, 6)$ (۳) $(1, 0)$ (۴) $(6, 8)$

۴۰- در ماتریس $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -4 \\ 6 & -3 & 7 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ ، مجموع کاهادهای عناصر اولین سطر کدام است؟

(۱) -۲۶ (۲) ۱۵ (۳) -۲۸ (۴) ۱۷

۴۱- اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \end{bmatrix}$ ، در این صورت A^2 کدام است؟

(۱) I (۲) 0 (۳) $\frac{1}{3}A$ (۴) $3I$

۴۲- اگر $X^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ و $Y^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ باشد، آنگاه $(XY)^{-1}$ کدام است؟

(۱) $\begin{bmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

۴۳- ماتریس A از درجه 5×5 مفروض است، دترمینان A دارای:

(۱) ۲۵ عنصر و ۱۲۰ جمله است.

(۲) ۱۲۰ عنصر و ۲۵ جمله است.

(۳) ۲۵ عنصر و ۱۲۵ جمله است.

۴۴- معادله $\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & x^2 \\ a & b & x \\ a^2 & b^2 & x^2 \end{vmatrix} = 0$ ، چند ریشه دارد؟

(۱) یک ریشه دارد. (۲) سه ریشه متمایز دارد. (۳) ریشه ندارد. (۴) یک ریشه مضاعف و یک ریشه ساده دارد.

۴۵- همساز سطر دوم ستون سوم ماتریس $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ کدام است؟

(۱) -۱۴ (۲) ۱۴ (۳) ۱۲ (۴) -۱۲

۴۶- اگر A' ترانسپوز ماتریس A باشد و $AA' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 10 & 0 \\ a & b & 1 \end{bmatrix}$ ، کدام است؟

$a + b$ (۴) ۴ (۳) ۲ (۲) $a + 3b$ (۱)

۴۷- در ماتریس $A = [a_{ij}]_{2 \times 2}$ و $B = [b_{ij}]_{2 \times 2}$ کدام ضرب قابل تعریف است؟

AB' (۴) BA (۳) $A'B$ (۲) AB (۱)

۴۸- اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ ، در آن صورت دترمینان A کدام است؟

۴ (۴) ۳ (۳) ۲ (۲) ۱ (۱)

۴۹- اگر ماتریس A معکوس پذیر باشد، کدام یک از ماتریس های زیر همواره معکوس پذیر است؟

$A + I$ (۴) AA' (۳) $A - A'$ (۲) $A + A'$ (۱)

۵۰- حاصل $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix}$ کدام است؟

(۱) $(1+a)(1+b)(1+c)$ (۲) صفر (۳) abc (۴) ۱

۵۱- دو سطر یک ماتریس مربعی را در عدد ۳ و سه ستون آن را در عدد ۲- ضرب کرده ایم، دترمینان ماتریس چند برابر دترمینان ماتریس اول خواهد بود؟

-27 (۱) 54 (۲) -243 (۳) 18 (۴)

۵۲- ضریب زاویه خط $\begin{vmatrix} x & y & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$ کدام است؟

$\frac{1}{2}$ (۱) $-\frac{1}{2}$ (۲) ۲ (۳) -2 (۴)

۵۳- ماتریس الحاقی $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ کدام است؟

$\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ (۱) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & -6 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (۴)

۵۴- دترمینان ماتریس $A = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix}$ کدام است؟

1 (۱) -1 (۲) $\sin \theta + \cos \theta$ (۳) صفر (۴)

۵۵- وارون ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ کدام است؟

$\frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (۴) $\frac{1}{9} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 9 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ (۳) $\frac{1}{9} \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ -6 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ (۲) $\frac{1}{9} \begin{bmatrix} 2 & -3 & 9 \\ 4 & 9 & -1 \\ 9 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ (۱)

۵۶- به ازای کدام مقادیر a ، ماتریس $\begin{bmatrix} a-1 & -1 \\ -2 & a \end{bmatrix}$ معکوس پذیر است؟

- (۱) $a \neq -1, 2$ (۲) $a \neq -2, -1$ (۳) $a \neq -2, 1$ (۴) $a \neq 1, 2$

۵۷- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ باشد، $A^{-1}B^{-1}$ کدام است؟

- (۱) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$

۵۸- اگر X و Y ماتریس های معکوس پذیر باشند، حاصل $X^{-1}(X^{-1} + Y^{-1})^{-1}Y^{-1}$ کدام است؟

- (۱) $X + Y$ (۲) $X - Y$ (۳) $(X - Y)^{-1}$ (۴) $(X + Y)^{-1}$

۵۹- دترمینان معکوس ماتریس $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ چه قدر است؟

- (۱) $\frac{1}{5}$ (۲) $-\frac{1}{5}$ (۳) 5 (۴) -5

۶۰- در ماتریس $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ کهاد a_{21} کدام است؟

- (۱) 4 (۲) -2 (۳) 2 (۴) 3

۶۱- اگر A ماتریسی ناصفر و λ یک عدد حقیقی باشد، به طوری که $A' = \lambda A$ ، در این صورت λ کدام است؟

- (۱) ± 1 (۲) 0 (۳) ± 2 (۴) هیچ کدام

۶۲- با فرض $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ معکوس $A - I$ کدام است؟

- (۱) $I + A$ (۲) $I - A^2$ (۳) $I + A + A^2$ (۴) معکوس پذیر نمی باشد

۶۳- ماتریس مربعی که دترمینان آن صفر باشد، ماتریس:

- (۱) منفرد است (۲) متقارن است (۳) وابسته است (۴) معکوس پذیر است

۶۴- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$ ، $A - A^{-1}$ کدام ماتریس است؟

- (۱) صفر (۲) همانی (۳) $\begin{bmatrix} 0 & 8 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$

۶۵- به ازای کدام مقدار m ، ماتریس $\begin{bmatrix} 0 & m & 1 \\ 1 & 0 & m \\ m & 1 & 0 \end{bmatrix}$ معکوس پذیر نمی باشد؟

- (۱) 0 (۲) 1 (۳) 2 (۴) -1

۶۶- حاصل دترمینان $\begin{vmatrix} 1 & \log a & \log bc \\ 1 & \log b & \log ac \\ 1 & \log c & \log ab \end{vmatrix}$ کدام است؟

- (۱) $\log abc$ (۲) صفر (۳) 1 (۴) $\log a + \log b + \log c$

۶۷- ماتریس الحاقی ماتریس $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ کدام است؟

(۱) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

۶۸- اگر A یک ماتریس 5×3 باشد، در این صورت کدام درست است؟

(۱) $|AA'| > 0$ (۲) $|AA'| < 0$ (۳) $|AA'| = 0$ (۴) $|AA'| = 1$

۶۹- اگر $X = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ و $Y = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ باشد، $(X'X)^{-1} \cdot (X'Y)$ کدام است؟

(۱) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

۷۰- اگر $\bar{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، مقدار دترمینان $A^2 - I_2$ کدام است؟

(۱) $\begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 9 & -3 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 9 & -2 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 9 & 3 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$

۷۱- مرتبه (رتبه) ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ کدام است؟

(۱) ۱ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۲

۷۲- اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ، مجموع عناصر قطری ماتریس الحاقی A کدام است؟

(۱) -۲۶ (۲) ۹ (۳) -۸ (۴) ۲۶

۷۳- ماتریس $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ مفروض است، مجموع عناصر قطری در A^{-1} کدام است؟

(۱) ۴ (۲) -۳ (۳) -۲ (۴) ۳

۷۴- مرتبه (RANK) ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ کدام است؟

(۱) ۳ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) ۴

۷۵- ماتریس $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ مفروض است، در ماتریس A^{-1} ، عنصر a_{21} کدام است؟

(۱) ۰ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $-\frac{1}{2}$ (۴) ۱

۷۶- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ، رتبه (مرتبه) $A \cdot A^{-1}$ کدام است؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۷۷- اگر $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، مرتبه ماتریس $(A \cdot B \cdot C)$ کدام است؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۸

۷۸- دستگاه معادلات مقابل مفروض است. این دستگاه:

$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 - 7x_3 = 15 \\ 3x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 8 \\ x_1 - 7x_2 - x_3 = 6 \end{cases}$$

- (۱) سازگار و تعداد نامحدودی دسته جواب دارد.
(۲) ناسازگار و فاقد جواب است.
(۳) یک دسته جواب منحصر به فرد دارد.
(۴) حداقل یک دسته جواب دارد.

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

۷۹- به ازای کدام مقدار a ، دستگاه معادلات مقابل جواب غیرصفر دارد؟

- (۱) ۱ و -۴
(۲) ۱ و -۴
(۳) -۱ و -۴
(۴) ۱ و ۴

۸۰- ماتریس افزوده یک دستگاه معادلات خطی $\begin{bmatrix} 1 & 0 & \vdots & 3 \\ 0 & 1 & \vdots & 2 \\ 0 & 1 & \vdots & -1 \end{bmatrix}$ می باشد. این دستگاه چند دسته جواب دارد؟

- (۱) یک (۲) دو (۳) بی شمار (۴) جواب ندارد

$$\begin{cases} x + my + z = -1 \\ 2x + z = 1 \\ mx + y - z = 1 \end{cases}$$

۸۱- به ازای کدام مقدار m ، دستگاه معادلات مقابل جواب منحصر به فرد ندارد؟

- (۱) -۲
(۲) -۱
(۳) ۱
(۴) ۲

۸۲- به ازای کدام مقدار m و n دستگاه $\begin{cases} 2x + my = 0 \\ nx + y = 0 \end{cases}$ فقط جواب صفر دارد؟

- (۱) $mn = 2$ (۲) $mn = -2$ (۳) $mn \neq 2$ (۴) $mn \neq -2$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + mx_3 = 3 \\ x_1 + mx_2 + 3x_3 = 2 \end{cases}$$

۸۳- به ازای کدام مقدار m دستگاه مقابل، جواب منحصر به فرد دارد؟

- (۱) $m \neq -3, m \neq 2$
(۲) $m \neq 3, m \neq -2$
(۳) $m \neq 3, m \neq 2$
(۴) $m \neq -3, m \neq -2$

۸۴- دستگاه معادلات خطی $\begin{cases} x_2 + 2x_3 - x_1 = 4 \\ 5x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 3 \end{cases}$ دارای چند جواب است؟

- (۱) یک (۲) دو (۳) جواب ندارد (۴) بی شمار

۸۵- تعداد جواب های دستگاه $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 4x_1 - x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 - x_3 = -1 \end{cases}$ کدام است؟

- (۱) یک (۲) دو (۳) سه (۴) بی شمار

۸۶- به ازای کدام مقدار m دستگاه مقابل بی شمار جواب دارد؟

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + mx_3 = 3 \\ x_1 + mx_2 + 3x_3 = 2 \end{cases}$$

- (۱) $m = -1$
(۲) $m \neq 2$
(۳) $m = 2$
(۴) $m \neq -1$

۸۷- ماتریس انحنای ضرایب دستگاه کدام است؟

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 14 \\ 5x_1 - x_2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -5 & -2 \end{pmatrix} (4) \quad \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} (3) \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} (2) \quad \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} (1)$$

۸۸- کدام رابطه بین a و b و c برقرار باشد تا دستگاه معادلات مقابل جواب غیر از صفر نیز داشته باشد؟

$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0 \\ bx_1 + cx_2 + ax_3 = 0 \\ cx_1 + ax_2 + bx_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 3abc (2) \\ (a-b)^2 - c^2 = 0 (4) \end{cases} \quad \begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 2abc (1) \\ a + b + c = abc (3) \end{cases}$$

۸۹- در دستگاه معادلات مقابل مقدار $2x_1 + 2x_2 + x_3$ کدام است؟

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = -2 \end{cases} \quad \begin{matrix} 3 (1) \\ 0 (2) \\ 6 (3) \end{matrix} \quad \begin{matrix} 5 (4) \end{matrix}$$

۹۰- به ازای کدام مقدار a دستگاه جواب غیر صفر دارد؟

$$\begin{cases} (a-1)x_1 + 4x_2 = 0 \\ x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} a \neq \frac{1}{3} (1) \\ a = \frac{1}{3} (2) \\ a = \frac{2}{3} (3) \\ a \neq \frac{2}{3} (4) \end{matrix}$$

۹۱- ماتریس معکوس ضرایب دستگاه کدام است؟

$$\begin{cases} 2x - 2y = 1 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} (2) \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} (3) \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} (2) \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} (1)$$

۹۲- کدام رابطه بین جواب‌های دستگاه معادلات خطی مقابل برقرار است؟

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = -3 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 (1) \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 (2) \\ x_1 + x_2 = x_3 + x_4 (3) \\ x_1 - 2x_2 = x_3 - 2x_4 (4) \end{cases}$$

۹۳- دستگاه معادلات خطی مقابل:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} (1) \text{ ریشه ندارد.} \\ (2) \text{ فقط یک دسته جواب غیر صفر دارد.} \\ (3) \text{ بی شمار جواب دارد.} \\ (4) \text{ فقط یک دسته جواب صفر دارد.} \end{matrix}$$

۹۴- دستگاه معادلات مقابل:

$$\begin{cases} x_2 + 2x_3 - x_4 = 10 \\ 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6 \end{cases} \quad \begin{matrix} (1) \text{ یک دسته جواب منحصر به فرد دارد.} \\ (2) \text{ تعداد نامحدودی دسته جواب دارد.} \\ (3) \text{ فاقد جواب است.} \\ (4) \text{ ناسازگار است.} \end{matrix}$$

۹۵- اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ، عنصر واقع در سطر دوم ستون اول از ماتریس معکوس A کدام است؟

۱) -1 ۲) -2 ۳) 1 ۴) صفر

۹۶- اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & \sin \theta \\ \csc \theta & 0 \end{bmatrix}$ ، در این صورت حاصل A^{11} کدام است؟

۱) I ۲) $20I$ ۳) 1 ۴) صفر

۹۷- اگر $A^T = I$ ، در این صورت ماتریس A^{226} کدام است؟

۱) I ۲) A ۳) A^T ۴) $2A$

۹۸- در دترمینان $A = \begin{vmatrix} -2 & 3 & a \\ 0 & 1 & 5 \\ 1 & b & -1 \end{vmatrix}$ ، مجموع همسازهای عناصر a و b کدام است؟

۱) 9 ۲) 3 ۳) -1 ۴) 6

۹۹- دترمینان ماتریس $\begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 \\ -3 & 0 & 4 \\ 1 & -4 & 0 \end{bmatrix}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) 2 ۳) 4 ۴) -1

۱۰۰- اگر حاصل دترمینان $\begin{vmatrix} 1 & 0 & m \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -m \end{vmatrix}$ برابر 6 باشد، m کدام است؟

۱) -3 ۲) 3 ۳) 1 ۴) -1

۱۰۱- اگر $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ ، $A^* = [A^*_{ij}]$ باشد، مقدار $|A|$ کدام است؟

۱) 3 ۲) 36 ۳) 6 ۴) 9

۱۰۲- به ازای چه مقدار x حاصل دترمینان مقابل برابر صفر است؟

۱) یک ۲) هیچ ۳) دو ۴) بی شمار

$$\begin{vmatrix} 2 & x & 1 & -1 \\ 2 & 3x & -1 & 1 \\ 1 & x^2 & 3 & -2 \\ -4 & -2x & -2 & 2 \end{vmatrix}$$

۱۰۳- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ m & 1 \end{bmatrix}$ و $A^T = \begin{bmatrix} 11 & a_{12} \\ -6 & a_{22} \end{bmatrix}$ باشد، m کدام است؟

۱) -3 ۲) -2 ۳) 3 ۴) 2

۱۰۴- اگر عناصر سطر چهارم ماتریس X ، $[2 \ -1 \ 3 \ 0]$ و عناصر ستون سوم ماتریس Y ، $[1 \ 2 \ 3 \ -1]$ باشند، عنصر سطر چهارم ستون سوم ماتریس XY کدام است؟

۱) 0 ۲) 1 ۳) -5 ۴) 6

۱۰۵- اگر A یک ماتریس باشد، ترانژاده ماتریس همساز A کدام ماتریس است؟

۱) ترانژاده ماتریس الحاقی A ۲) ماتریس الحاقی A ۳) ترانژاده وارون ماتریس A ۴) وارون ماتریس A

۱۰۶- معادله مفسر ماتریس $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ کدام است؟

۱) $k^2 - 2k + 3 = 0$ ۲) $k^2 + 2k - 3 = 0$ ۳) $k^2 - 2k - 3 = 0$ ۴) $k^2 + 2k + 3 = 0$

۱۰۷- امتدادهای ویژه ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ به هم کدام زاویه را می‌سازند؟

- (۱) 0° (۲) 45° (۳) 90° (۴) 180°

۱۰۸- اگر $\begin{bmatrix} -12 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 12 \\ -3 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ ، آنگاه کدام یک از موارد زیر یک مقدار ویژه برای $A = \begin{bmatrix} -6 & 12 \\ -3 & 9 \end{bmatrix}$ است؟

- (۱) ۶ (۲) ۴ (۳) ۳ (۴) ۱

۱۰۹- اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ ، $|A - kI| = 0$ کدام است؟

- (۱) $k^2 - 6k + 7 = 0$ (۲) $k^2 + 6k - 7 = 0$ (۳) $k^2 - 6k + 7 = 0$ (۴) $k^2 + 6k + 7 = 0$

۱۱۰- مقادیر ویژه $\begin{bmatrix} x & -1 \\ 3 & y \end{bmatrix}$ برابر با ۳ و ۵ است، در این صورت x و y کدام است؟

- (۱) $x = -3$ و $y = 4$ (۲) $x = 5$ و $y = 2$ (۳) $x = 2$ و $y = 6$ (۴) $x = 1$ و $y = 7$

۱۱۱- اگر $A = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ یک بردار ویژه ماتریس درجه ۲ باشد، کدام بردار نیز بردار ویژه این ماتریس است؟

- (۱) $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} -4 \\ -2 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}$

۱۱۲- اگر معادله مفسر ماتریس A به صورت $k^2 - 5k + 6 = 0$ باشد، ماتریس A کدام است؟

- (۱) $\begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

۱۱۳- یکی از امتدادهای ویژه ماتریس $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ کدام است؟

- (۱) $x_2 = 2x_1$ (۲) $x_2 = x_1$ (۳) $x_2 = -x_1$ (۴) $x_2 = -2x_1$

۱۱۴- مقادیر ویژه ماتریس $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 4 \\ -7 & -3 & -1 \\ 7 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ کدام است؟

- (۱) ۱ و ۵ و -۲ (۲) -۱ و ۵ و ۲ (۳) ۱ و ۵ و ۲ (۴) -۱ و -۵ و -۲

۱۱۵- اگر معادله مفسر ماتریس A به صورت $k^2 - 2k - 1 = 0$ باشد، کدام گزاره نادرست است؟

- (۱) مجموع مقادیر ویژه A برابر ۲ است. (۲) حاصل ضرب مقادیر ویژه A برابر -1 است. (۳) ماتریس A از درجه ۲ است. (۴) دترمینان ماتریس A برابر -1 است.

۱۱۶- ماتریس $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ چند بردار ویژه یکانی (واحد) دارد؟

- (۱) هیچ (۲) دو (۳) چهار (۴) بی شمار

۱۱۷- اگر $\log_2^b$ و $\log_2^a$ مقادیر ویژه ماتریس $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ باشند، $ab + 1$ کدام است؟

- (۱) ۷ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴) ۱۰

۱۱۸- معادله مفسر A از درجه 2×2 به صورت $k^2 - 5k - 1 = 0$ است، وارون A کدام است؟

- (۱) $A^T - 5A$ (۲) $A - 5I$ (۳) $\frac{1}{4}(\Delta I + A)$ (۴) A وارون پذیر نیست.

۱۱۹- مقادیر ویژه ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ کدام است؟

(۱) ۱ و -۱ و -۲ (۲) ۱/۲ و ۱/۲ و -۱ و ۱ (۳) ۱ و -۱ و ۲ (۴) ۰ و -۱ و ۲

۱۲۰- هر سه مقدار ویژه ماتریس $A = \begin{bmatrix} -1 & -3 & -9 \\ 0 & 5 & 18 \\ 0 & m & -7 \end{bmatrix}$ برابرند، m کدام است؟

(۱) -۲ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) -۱

۱۲۱- بردار $v = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ یک بردار ویژه ماتریس $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & -2 \end{bmatrix}$ است. کدام یک از مقادیر زیر یک مقدار ویژه A است؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۲۲- حاصل ضرب ریشه‌های معادله مفسر ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ کدام است؟

(۱) ۹ (۲) ۶ (۳) ۱۲ (۴) ۴

۱۲۳- اگر A یک ماتریس متعامد و 2×2 باشد، حاصل ضرب مقادیر ویژه آن کدام است؟

(۱) صفر (۲) ۲ (۳) -۲ (۴) -۱

۱۲۴- اگر اعداد ۳ و -۴ مقادیر ویژه ماتریس 2×2 ، A باشند مقدار $|A + 3I|$ کدام است؟

(۱) ۶ (۲) -۶ (۳) ۱۲ (۴) -۱۲

۱۲۵- به ازای کدام مقدار m ، ماتریس $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ m & 1 \end{bmatrix}$ مقدار ویژه ندارد؟

(۱) $m = 1$ (۲) $m = -1$ (۳) $m = 0$ (۴) $m = 2$

۱۲۶- اگر $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ یک بردار ویژه ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ باشد، آن‌گاه کدام یک از بردارهای زیر یک بردار ویژه A^{-1} است؟

(۱) $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

۱۲۷- اگر معادله مفسر ماتریس مربع A به صورت $3k^2 - 5k + 2 = 0$ باشد، معادله مفسر A^{-1} کدام است؟

(۱) $3k^2 + 5k + 2 = 0$ (۲) $2k^2 - 5k + 3 = 0$

(۳) $2k^2 + 5k + 3 = 0$ (۴) $2k^2 + 2k + 5 = 0$

۱۲۸- به ازای کدام مقدار b ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$ مقدار ویژه دارد؟

(۱) $b = 0$ (۲) $b = 1$ (۳) $b = -1$ (۴) به ازای هر b

۱۲۹- اگر مقدار ویژه A^{-1} برابر با $1/3$ باشد، مقدار ویژه A^3 کدام است؟

(۱) $\frac{1}{243}$ (۲) -۲۴۳ (۳) $-\frac{1}{243}$ (۴) ۲۴۳

۱۳۰- به ازای کدام مقدار m ، مقادیر ویژه ماتریس $A = \begin{bmatrix} m^2 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ عکس یکدیگرند؟

(۱) ± 2 (۲) $\pm \sqrt{3}$ (۳) ± 1 (۴) $\pm \sqrt{5}$

۱۳۱- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ ، در این صورت کدام گزینه صحیح است؟

- (۱) مقادیر ویژه $3A$ عبارتند از ۳ و ۶ و ۱۲
 (۲) مقادیر ویژه A^3 عبارتند از ۱ و ۸ و ۶۴
 (۳) مقادیر ویژه $A + 2I$ عبارتند از ۳ و ۵ و ۶
 (۴) مقادیر ویژه A^{-1} عبارتند از ۱ و $1/2$ و $1/4$

۱۳۲- مقادیر ویژه ماتریس A از درجه ۲ عبارتند از ۳ و -۲، مقدارهای ویژه ماتریس الحاقی A کدام است؟

- (۱) ۳ و -۲
 (۲) ۲ و -۳
 (۳) $1/3$ و $-1/2$
 (۴) $1/2$ و $-1/3$

۱۳۳- اگر $A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$ ، در این صورت مقادیر ویژه A^{-2} کدام است؟

- (۱) ۱ و ۸
 (۲) $1/8$ و $1/2$
 (۳) $1/27$ و $1/8$
 (۴) ۲۷ و ۸

۱۳۴- ماتریس $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ در کدام یک از معادلات زیر صدق می‌کند؟

- (۱) $A^T - 7A + 6I = O$
 (۲) $A^T - 5A - 10I = O$
 (۳) $A^T - 7A + 10I = O$
 (۴) $A^T - 5A + 6I = O$

۱۳۵- بردار ویژه متناظر با کوچک‌ترین مقدار ویژه ماتریس $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ کدام است؟

- (۱) $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$
 (۲) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$
 (۳) $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$
 (۴) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

۱۳۶- اگر α و β مقادیر ویژه ماتریس $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ باشند، مقدار عددی $(\alpha + \beta)^2 - \alpha\beta$ کدام است؟

- (۱) ۳۱
 (۲) ۲۷
 (۳) ۲۳
 (۴) ۲۵

۱۳۷- ریشه‌های معادله مفسر ماتریس $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{2}$ و 1 و $2\sqrt{2}$
 (۲) ۲ و ۱ و ۸
 (۳) $-\sqrt{2}$ و 1 و $-2\sqrt{2}$
 (۴) ۲ و ۱ و -۲

۱۳۸- اگر A ماتریس وارون‌پذیر باشد و دارای دو مقدار ویژه، در این صورت کدام گزینه درست است؟

- (۱) مقادیر ویژه A هر دو مثبت هستند.
 (۲) مقادیر ویژه A هر دو منفی هستند.
 (۳) هر دو مقدار ویژه A ناصفر هستند.
 (۴) لااقل یکی از آن‌ها صفر است.

۱۳۹- اگر $k_1 = 3$ و $k_2 = -1$ مقدارهای ویژه ماتریس A باشند، مقدار $|2A - I|$ کدام است؟

- (۱) ۳
 (۲) -۹
 (۳) ۶
 (۴) -۱۵

۱۴۰- خط $y + x = 0$ یک امتداد ویژه ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ است. امتداد ویژه دیگر ماتریس A کدام است؟

- (۱) $y - x = 0$
 (۲) $y = 2x$
 (۳) $y = 0$
 (۴) $y = -2x$

۱۴۱- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$ باشد و k_1 و k_2 مقادیر ویژه A باشد، $k_1^2 + k_2^2$ کدام است؟

- (۱) ۱۹
 (۲) ۱۶
 (۳) -۱۶
 (۴) -۱۹

۱۴۲- اگر ماتریس مربع مرتبه سوم $A = \begin{bmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ دارای یک مقدار ویژه مکرر از مرتبه دوم $k = 2$ باشد، در این صورت:

$a = 3$ (۴) $a = 1$ (۳) $a = 0$ (۲) $a = -1$ (۱)

۱۴۳- معکوس کدام یک از چهار ماتریس زیر وجود ندارد؟

$D = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}$ (۴) $C = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 14 & -1 \end{bmatrix}$ (۳) $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ (۲) $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ (۱)

۱۴۴- ماتریس A را ماتریس متعامد گوئیم، اگر:

A مربع و قطری باشد. (۴) $A = A^{-1}$ (۳) $A = A'$ (۲) $A' = A^{-1}$ (۱)

۱۴۵- به ازای چه مقدار a بردار $[1 \ 0 \ -1]$ یک بردار ویژه ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ است؟

$a = -1$ (۴) $a = 0$ (۳) $a = 1$ (۲) $a = 2$ (۱)

۱۴۶- رتبه ماتریس $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ برابر است با:

1 (۴) 4 (۳) 3 (۲) 2 (۱)

۱۴۷- مرتبه ماتریس $A = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 & 8 \\ 4 & 2 & 6 & -1 \\ 1 & 0 & 9 & 7 \\ 16 & 4 & 12 & 15 \end{bmatrix}$ برابر است با:

1 (۴) 4 (۳) 3 (۲) 2 (۱)

۱۴۸- اگر $A = (2, -3, -1)$ و $X = (x_1, x_2, x_3)$ باشد، $\frac{\partial}{\partial x}(A \cdot X')$ کدام است؟

$\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 1\right)$ (۴) $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -1\right)$ (۳) $(-2, 3, 1)$ (۲) $(2, -3, -1)$ (۱)

۱۴۹- اگر $C = \begin{bmatrix} 3c-1 \\ c^3-c \\ 3c \\ 1-c \end{bmatrix}$ و $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}$ باشد، $\frac{\partial}{\partial y}(C'y)$ کدام است؟

C^{-1} (۴) $\frac{1}{3}C$ (۳) C' (۲) $\frac{1}{C}$ (۱)

۱۵۰- اگر $B = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ و $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ باشد، $\frac{\partial}{\partial x}(B'x)$ کدام است؟

$\frac{1}{B}$ (۴) 3 (۳) 21 (۲) B' (۱)

۱۵۱- اگر $y = \begin{cases} x_1^2 - 2x_1x_2 \\ 2x_1 - x_2x_3 \\ x_1x_3 + x_2 - 2x_3 \end{cases}$ باشد، $\frac{\partial y}{\partial x}$ کدام است؟

هیچ کدام (۴) $\begin{bmatrix} 2x_1 - 2x_2 + 2 + x_3 \\ -2x_1 - x_3 + 1 \\ -x_2 - 2 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} 2x_1 - 2x_2 & 2 & x_3 \\ -2x_1 & -x_3 & 1 \\ 0 & -x_2 & -2 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 & 0 \\ x_3 & -x_2 & 1 \\ -x_2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ (۱)

۱۵۲- اگر $y = \begin{bmatrix} 2x_1 - x_2x_3 \\ x_1x_2x_3 + 2x_1^2x_2 \end{bmatrix}$ باشد، حاصل $\partial y / \partial x$ به ازای $x_1 = x_2 = x_3 = 1$ کدام است؟

(۱) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

۱۵۳- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ و $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ باشد، حاصل $\frac{\partial}{\partial x}(X'AX)$ به ازای $x_1 = x_2 = x_3 = 1$ کدام است؟

(۱) $[16 \ 4 \ -4]$ (۲) $[4 \ 8 \ 16]$ (۳) $\begin{bmatrix} 8 \\ 12 \\ 16 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}$

۱۵۴- اگر $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ و $Z = \begin{bmatrix} 2 \\ -x \\ 3 \end{bmatrix}$ باشد، حاصل $\partial(Z'X)/\partial x$ کدام است؟

(۱) $-y - x + 5$ (۲) $\begin{bmatrix} 2-y \\ -x \\ 3 \end{bmatrix}$ (۳) $2-y$ (۴) $[2-y \ -x \ 3]$

۱۵۵- اگر در یک بردار سطری عناصر تابعی از متغیر t باشد، مشتق این بردار نسبت به این متغیر:

(۱) بردار ستونی است. (۲) بردار سطری است. (۳) اسکالر است. (۴) هیچ کدام

تست های آزمون کارشناسی ارشد

«ماتریس»

• تست های شماره ۱ الی ۳۳ آزمون های کارشناسی ارشد مجموعه علوم اقتصادی

• تست های شماره ۳۴ الی ۶۲ آزمون های کارشناسی ارشد مجموعه مدیریت

• تست های شماره ۶۳ الی ۹۷ آزمون های کارشناسی ارشد حسابداری

۱- اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ و I_2 ماتریس یکه باشد، $(AB)'I_2$ کدام است؟

(۱) $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 7 & 7 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} 0 & 7 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$

۲- دترمینان ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ کدام است؟

(۱) -1 (۲) 2 (۳) 1 (۴) 0

۳- مرتبه ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ کدام است؟

(۱) 2 (۲) 1 (۳) صفر (۴) 3

۴- معکوس ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ کدام است؟

(۱) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$

۵- به ازای چه مقادیری از a دستگاه $\begin{cases} ax + y = 2 \\ x - ay = 1 \end{cases}$ همواره جواب دارد؟

(۱) فقط $a = -1$ (۲) فقط $a = 1$ (۳) به ازای همه مقادیر a (۴) فقط $a = 2$

۶- در دستگاه $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$ کدام یک از موارد زیر صحیح است؟

(۱) سازگار بی نهایت جواب (۲) یک جواب (۳) نام سازگار (۴) فاقد جواب

۷- یکی از ریشه های معادله مفسر $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ کدام است؟

(۱) -2 (۲) -1 (۳) 2 (۴) 3

۸- دستگاه معادلات خطی $\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$ مفروض است، این دستگاه:

(۱) دارای بی نهایت رشته جواب است. (۲) جواب منحصر بفرد دارد.

(۳) نام سازگار است. (۴) فقط $x = y = z = 0$ در آن صدق می کند.

۹- ریشه های معادله مفسر ماتریس $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ برابر است با:

(۱) 1 و 2 (۲) -2 و -1 (۳) 2 و 1 و 0 (۴) -2 و 1

۱۰- معکوس ماتریس A کدام است؟

(۱) $3A$ (۲) $\frac{1}{3}A$ (۳) $\frac{1}{3}A$ (۴) A

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ -4 & -4 & -3 \end{bmatrix}$$

۱۱- حاصل درمیان مقابل کدام است؟

(۱) $b^2(4a + b)$ (۲) $a^2(a + 4b)$ (۳) $a^2(4a + b)$ (۴) $b^2(a + 4b)$

۱۲- کدام رابطه در جبر ماتریس ها صحیح است؟

(۱) $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$ (۲) $A^{-1}B^{-1} = (BA)^{-1}$ (۳) $AB = BA$ (۴) $|A^{-1}B| = |A| \cdot |B|$

۱۳- اگر A یک ماتریس $n \times n$ و k عددی ثابت باشد، آن گاه:

(۱) $\det(kA) = \frac{1}{k} \det A$ (۲) $\det(kA) = \det A$ (۳) $\det(kA) = k^n \det A$

۱۴- اگر $A = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ -\sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix}$ باشد، در معکوس A به ازای $\theta = 0^\circ$ مجموع عناصر روی قطر کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۰

۱۵- در چهار معادله خطی سه مجهولی کدام مورد صحیح است؟

- (۱) جوابی ندارد. (۲) بسته به مورد هر کدام از حالات ۱ و ۳ و ۴ می‌تواند درست باشد. (۳) یک جواب منحصر به فرد دارد. (۴) بی‌نهایت جواب دارد.

۱۶- مجموع عناصر روی قطر اصلی معکوس ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ کدام یک از اعداد زیر است؟

- (۱) صفر (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) ۱ (۴) $-\frac{1}{2}$

۱۷- مرتبه (RANK) ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ ، کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۰

۱۸- دستگاه $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ ax - 2y = 6 \end{cases}$ به ازای کدام مقدار a جواب ندارد؟

- (۱) ۲ (۲) -۲ (۳) ۱ (۴) -۴

۱۹- یکی از ریشه‌های معادله مفسر ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ برابر است با:

- (۱) ۱ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۴

۲۰- اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$ باشد، $A^{-1} A^*$ عبارت است از: (A^* ترانسپوز ماتریس است)

- (۱) ۱ (۲) ۱ (۳) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \\ -0 & 4 & 0 \end{vmatrix}$ (۴) A^*

۲۱- مقدار دترمینان $\begin{vmatrix} m & a-d & mb+mc \\ m & b-d & ma+mc \\ m & c-d & ma+mb \end{vmatrix}$ برابر است با:

- (۱) a (۲) b (۳) صفر (۴) $m+b$

۲۲- به ازای چه مقادیری از k دستگاه معادلات خطی مقابل دارای جواب‌های غیرصفر نیز هست؟
 $\begin{cases} x + ky + 2z = 0 \\ (k-1)x - y = 0 \\ 2x + y + 4z = 0 \end{cases}$
 (۱) $k = -1$ و $k = 1/2$ (۲) $k = 1$ و $k = 1/2$ (۳) $k = -1$ و $k = -1/2$ (۴) $k = 1$ و $k = -1/2$

۲۳- جواب دترمینان $\begin{vmatrix} a-b & b-c & c-a \\ b-c & c-a & a-b \\ c-a & a-b & b-c \end{vmatrix}$ برابر است با:

- (۱) صفر (۲) abc (۳) $ab-bc$ (۴) $ab+ac+bc$

۲۴- مرتبه (Rank) ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -5 \end{bmatrix}$ برابر است با:

۱) صفر $\quad 2) 3 \quad 3) 4 \quad 4) 1$

۲۵- معکوس ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ را ماتریس C می‌نامیم، عنصر c_{33} کدام است؟

۱) ۱ $\quad 2) \frac{1}{2} \quad 3) \frac{1}{4} \quad 4) 1$

۲۶- دستگاه معادلات خطی مقابل به‌ازای کدام مقدار k جواب‌های غیر یکتا (غیر صفر) دارد؟

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ 2x + y + kz = 0 \end{cases}$$

۱) ۱ $\quad 2) 4 \quad 3) 3 \quad 4) 2$

۲۷- ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \end{bmatrix}$ مفروض است، حاصل ضرب مقادیر ویژه آن کدام است؟

۱) ۳۷ $\quad 2) -37 \quad 3) -15 \quad 4) 15$

۲۸- به‌ازای کدام مقدار a ماتریس $N = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ a & 1 & 2 \\ a & -1 & 0 \end{bmatrix}$ معکوس ندارد؟

۱) ۲ $\quad 2) -1 \quad 3) 1 \quad 4) 2$

۲۹- ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ مفروض است، در ماتریس A^{-1} ، درایه a_{22} کدام است؟

۱) $-\frac{1}{4}$ $\quad 2) -\frac{1}{2} \quad 3) \frac{1}{4} \quad 4) \frac{3}{4}$

۳۰- در ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ مجموع مقادیر ویژه (خاص) کدام است؟

۱) ۵ $\quad 2) -4 \quad 3) 4 \quad 4) 2$

۳۱- مرتبه (Rank) ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ کدام است؟

۱) ۱ $\quad 2) 2 \quad 3) 3 \quad 4) 4$

۳۲- مقدار x از معادله $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & x & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} = 0$ (۱ ۱ ۱) کدام است؟

۱) $\frac{2}{3}$ $\quad 2) \frac{4}{5} \quad 3) \frac{3}{4} \quad 4) \frac{5}{4}$

۳۳- دستگاه همگن مقابل به‌ازای کدام مقدار k جواب‌های غیرصفر نیز دارد؟

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2y + kz = 0 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} 1) 0 \\ 2) \frac{1}{3} \\ 3) \frac{1}{2} \end{matrix}$$

 ۳۴- مقدار دترمینان $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ کدام است؟

$$\begin{matrix} 1) -1 \\ 2) 0 \\ 3) 1 \\ 4) 2 \end{matrix}$$

 ۳۵- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ باشد، مقدار دترمینان $A^2 - I_2$ کدام است؟

$$\begin{matrix} 1) -12 \\ 2) -10 \\ 3) 12 \\ 4) 10 \end{matrix}$$

 ۳۶- مقدار دترمینان $A = \begin{vmatrix} x & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ به‌ازای چه مقدار x برابر صفر است؟

$$\begin{matrix} 1) 2 \\ 2) 1 \\ 3) 3 \\ 4) -3 \end{matrix}$$

 ۳۷- اگر $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ مفروض باشد، ماتریس A^2 کدام است؟

$$\begin{matrix} 1) \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \\ 2) \begin{bmatrix} 9 & -5 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \\ 3) \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ -5 & 4 \end{bmatrix} \\ 4) \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

 ۳۸- معکوس ماتریس $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ کدام است؟

$$\begin{matrix} 1) \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \\ 2) \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \\ 3) \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \\ 4) \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

 ۳۹- در دستگاه $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x - y - 2z = -1 \\ 2x + y - z = 4 \end{cases}$ مقدار x کدام است؟

$$\begin{matrix} 1) 0 \\ 2) -1 \\ 3) 1 \\ 4) 2 \end{matrix}$$

 ۴۰- مرتبه ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ کدام است؟

$$\begin{matrix} 1) 3 \\ 2) 2 \\ 3) 0 \\ 4) 1 \end{matrix}$$

 ۴۱- به‌ازای چه مقداری از a ، حاصل دترمینان $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ a & 3 & 2 \end{vmatrix}$ صفر است؟

$$\begin{matrix} 1) 3 \\ 2) 1 \\ 3) 2 \\ 4) 0 \end{matrix}$$

 ۴۲- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ مجموع عناصر قطری ماتریس A^2 کدام است؟

$$\begin{matrix} 1) 15 \\ 2) 16 \\ 3) 3 \\ 4) 23 \end{matrix}$$

۴۳- ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ مفروض است در A^{-1} مجموع عناصر قطری کدام است؟

- ۳ (۱) ۲ (۲) -۲ (۳) ۴ (۴)

۴۴- در دستگاه $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - y - 2z = 0 \\ -x + y + z = 0 \end{cases}$ مقدار $x + y + z$ کدام است؟

- ۰ (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴)

۴۵- اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ باشد، مجموع عناصر ماتریس A^2 کدام است؟

- ۱۰ (۱) ۱۲ (۲) ۱۶ (۳) ۱۸ (۴)

۴۶- مقدار دترمینان $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ کدام است؟

- صفر (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴)

۴۷- رتبه ماتریس $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ کدام است؟

- صفر (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴)

۴۸- دستگاه $\begin{cases} x + 2ay = 0 \\ x + 4y = 0 \end{cases}$ به‌ازای کدام مقدار a جواب‌های بی‌شمار دارد؟

- ۲ (۱) -۱ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴)

۴۹- در معکوس ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ، مجموع عناصر کدام است؟

- صفر (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) ۱ (۳) $\frac{5}{4}$ (۴)

۵۰- اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ باشد مجموع عناصر روی قطر AB کدام است؟

- ۶ (۱) ۱۳ (۲) ۱۲ (۳) ۷ (۴)

۵۱- مقدار دترمینان ماتریس $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ کدام است؟

- ۱۴ (۱) ۸ (۲) -۱۰ (۳) ۱۲ (۴)

۵۲- معکوس ماتریس $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ کدام است؟

- $\frac{1}{5} \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$ (۱) $\frac{1}{5} \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$ (۲) $\frac{1}{5} \begin{bmatrix} -5 & 4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ (۳) $\frac{1}{5} \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}$ (۴)

۵۳- دستگاه $\begin{cases} ax + y = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$ به‌ازای کدام مقدار a بی‌شمار جواب دارد؟

- ۱ (۱) - $\frac{1}{2}$ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴)

۵۴- اگر داشته باشیم $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 9 \end{bmatrix}$ مقدار دترمینان $|A^2|$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۹ (۳) ۱۶ (۴) ۶۴

۵۵- اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ باشد، مجموع عناصر قطری معکوس A کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{5}$ (۲) $\frac{4}{5}$ (۳) $\frac{5}{6}$ (۴) ۱

۵۶- مرتبه ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 6 & 6 & 6 & 6 \end{bmatrix}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۵۷- به ازای کدام مقدار m دستگاه $\begin{cases} mx + y - z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ 2x - 2y + z = 0 \end{cases}$ جواب غیر صفر دارد؟

- (۱) ۲ (۲) ۱ (۳) -۱ (۴) -۲

۵۸- به ازای کدام مقدار a ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & 2 \\ a-2 & 1 \end{bmatrix}$ معکوس ندارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۵۹- اگر $A = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}$ باشد، دترمینان AA' کدام است؟

- (۱) ۱۱ (۲) ۱۲ (۳) ۱۲۱ (۴) ۱۴۴

۶۰- اگر $A = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}$ باشد، مجموع عناصر معکوس ماتریس A کدام است؟

- (۱) $-\frac{29}{11}$ (۲) $-\frac{1}{11}$ (۳) $\frac{29}{11}$ (۴) $\frac{1}{11}$

۶۱- از رابطه ماتریس $\begin{bmatrix} 1 & 2 & y \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$ رابطه بین x و y کدام است؟

- (۱) $x + y + 1 = 0$ (۲) $6x + y + 1 = 0$ (۳) $2x - y + 4 = 0$ (۴) $x + 2y + 1 = 0$

۶۲- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ باشد در ماتریس A^{-1} درایه $a_{۱۳}$ ، کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) ۰ (۳) ۱ (۴) ۳

۶۳- اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ دترمینان ماتریس $A \times B$ چقدر است؟

- (۱) ۴۵ (۲) ۱۷ (۳) ۱۵ (۴) ۵۱

۶۴- اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ جزء سطر دوم در ستون سوم ماتریس A^2 کدام است؟

- (۱) -۶ (۲) ۳ (۳) -۴ (۴) ۲

۶۵- در ارزی کدام مقدار $x \neq 0$ حاصل دترمینان $\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1+x \end{vmatrix}$ برابر صفر است؟

(۱) -۳ (۲) -۲ (۳) ۱ (۴) ۴

۶۶- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ جزء مربوط به سطر سوم و ستون دوم ماتریس A^{-1} کدام است؟

(۱) $\frac{1}{5}$ (۲) ۵ (۳) -۵ (۴) $-\frac{1}{5}$

۶۷- دترمینان حاصل ضرب ماتریس $\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ کدام است؟

(۱) -۳۳ (۲) -۲۷ (۳) ۳۳ (۴) ۲۷

۶۸- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ باشد، مجموع عناصر روی قطر ماتریس A^2 کدام است؟

(۱) ۲۹ (۲) ۱۹ (۳) ۱۷ (۴) ۵

۶۹- به ازای کدام مقدار a دترمینان $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & a \end{vmatrix}$ صفر است؟

(۱) ۰ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۷۰- مرتبه ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ کدام است؟

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۷۱- ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ معروض است، در ماتریس A^{-1} ، عنصر a_{11} کدام است؟

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) $-\frac{1}{7}$ (۴) $-\frac{1}{9}$

۷۲- به ازای کدام مقدار a دستگاه $\begin{cases} x+y=1 \\ ax+y=2 \end{cases}$ فاقد جواب است؟

(۱) -۱ (۲) ۰ (۳) ۲ (۴) ۱

۷۳- در دستگاه $\begin{cases} x-y-z=0 \\ 2x+y+z=0 \\ x+2y+z=0 \end{cases}$ ، مجموع ریشه‌ها کدام است؟

(۱) ۰ (۲) ۳ (۳) ۶ (۴) ۸

۷۴- حاصل عبارت $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} [1 \ 2 \ -1]$ کدام است؟

(۱) ۵ (۲) ۴ (۳) ۳ (۴) ۱

۷۵- از رابطه $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ ، مقدار $y+z$ کدام است؟

(۱) ۸ (۲) ۹ (۳) ۱۰ (۴) ۱۱

۷۶- در ماتریس $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ، مقدار دترمینان $|A^2|$ کدام است؟

- (۱) ۰ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۴

۷۷- به ازای کدام مقدار k ، دترمینان $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & k \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ ، برابر صفر است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۰ (۴) -۱

۷۸- رتبه ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ، کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) صفر

۷۹- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، مجموع عناصر A^{-1} کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $-\frac{2}{3}$ (۴) $-\frac{1}{3}$

۸۰- دستگاه $\begin{cases} x + my = 0 \\ x - y = 1 \end{cases}$ به ازای کدام مقدار m ، فاقد جواب است؟

- (۱) -۲ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) ۲

۸۱- دستگاه معادلات $\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 2x - ay = 0 \end{cases}$ به ازای کدام مقدار a ، بی نهایت جواب دارد؟

- (۱) ۴ (۲) ۲ (۳) -۲ (۴) -۴

۸۲- مقدار دترمینان ماتریس $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) صفر

۸۳- اگر برای ماتریس‌های A و B و C داشته باشیم $A \cdot B \cdot C = I$ ، آن‌گاه:

- (۱) $|A| \neq 0, |B| \neq 0, |C| \neq 0$ (۲) $|A| = 0, |B| = 1, |C| = 1$

- (۳) $|A| = 1, |B| \neq 0, |C| = 0$ (۴) $|A| \neq 0, |B| \neq 0, |C| = 0$

۸۴- اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ باشد، آن‌گاه دترمینان ماتریس $A^T B^{15}$ کدام است؟

- (۱) ۱۲ (۲) -۱۲ (۳) -۳۲ (۴) ۳۶

۸۵- ماتریس معکوس ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{5} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ (۲) $\frac{1}{5} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ (۳) $\frac{1}{5} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ (۴) $\frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

۸۶- دستگاه $\begin{cases} ax + y = 0 \\ 2ax - y = 0 \end{cases}$ به ازای کدام مقدار a بی شمار جواب دارد؟

- (۱) صفر (۲) -۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۸۷- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ باشد، مقدار λ در دترمینان $|A - \lambda I_2| = 0$ کدام است؟

- (۱) ۱ و ۰ (۲) ۲ و ۳ (۳) ۰ و ۲ (۴) ۳ و ۱

۸۸- به ازای کدام مقدار k دترمینان $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & k \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ برابر صفر است؟

(۱) -۱ (۲) صفر (۳) ۱ (۴) ۲

۸۹- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ مفروض باشد، مجموع عناصر قطری A^T کدام است؟

(۱) ۳۷ (۲) ۲۶ (۳) ۲۴ (۴) ۱۱

۹۰- اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ مفروض باشد، و معکوس آن $B = [b_{ij}]$ فرض شود، عنصر b_{22} کدام است؟

(۱) $\frac{3}{4}$ (۲) صفر (۳) $-\frac{1}{4}$ (۴) $-\frac{5}{4}$

۹۱- دستگاه $\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ x - y + 2z = 0 \\ 2x + y + kz = 0 \end{cases}$ به ازای کدام مقدار k بی نهایت جواب دارد؟

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۳ (۴) ۲

۹۲- به ازای کدام مقدار n ماتریس $A = \begin{bmatrix} n & 2 & 1 \\ 2 & n & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ معکوس ندارد؟

(۱) -۲ و -۱ (۲) -۲ و ۱ (۳) ۲ و -۱ (۴) ۱ و ۲

۹۳- ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ مفروض است، در ماتریس A^{-1} درایه a_{22} کدام است؟

(۱) $-\frac{5}{4}$ (۲) $-\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{3}{4}$ (۴) $\frac{5}{4}$

۹۴- در ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ مجموع مقادیر ویژه (خاص) کدام است؟

(۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۷

۹۵- اگر $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} A = [1, 2, 3]$ باشد مقدار A کدام است؟

(۱) ۳۸ (۲) ۳۶ (۳) ۲۵ (۴) ۲۴

۹۶- اگر داشته باشیم $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ ، مجموع عناصر A^{-1} کدام است؟

(۱) $\frac{7}{8}$ (۲) $\frac{7}{4}$ (۳) ۷ (۴) ۸

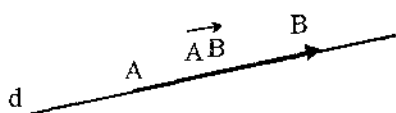
۹۷- به ازای کدام مقدار k دستگاه معادلات $\begin{cases} x + 2y + kz = 0 \\ x - y + z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases}$ جوابهای غیر صفر دارد؟

(۱) -۲ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) ۲

بردار، خط، صفحه

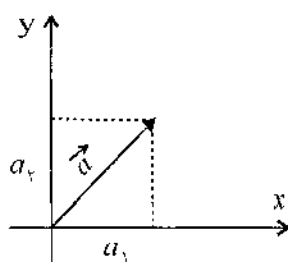
۸-۱ تعریف هندسی بردار

بردار پاره‌خطی است جهت‌دار که به وسیله چهار عامل امتداد بردار، مبدأ بردار، جهت بردار و طول بردار مشخص می‌گردد. بردار $\overrightarrow{AB}$ را به صورت $\overrightarrow{AB}$ یا $\vec{a}$ یا $\vec{a}$ نشان می‌دهیم.



۸-۲ تعریف ماتریسی بردار

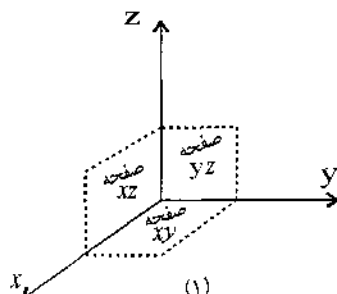
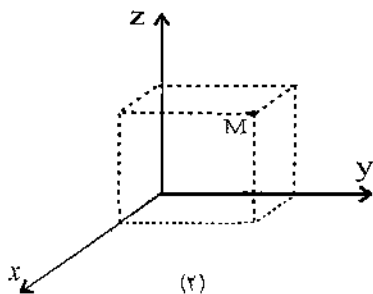
بردار پاره‌خطی است جهت‌دار که ابتدایش بر مبدأ مختصات واقع است. با این تعریف از بردار، متناظر با هر بردار $\vec{a}$ در صفحه، یک نقطه (a_1, a_2) منظور می‌کنیم که این نقطه مختصات انتهایی این بردار است و برعکس به هر نقطه (a_1, a_2) در صفحه، یک بردار $\vec{a}$ نسبت می‌دهیم. یعنی:



$$\vec{a} = (a_1, a_2) \quad \text{یا} \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

۸-۳ مختصات در فضا

هر نقطه در فضا با سه عدد مشخص می‌شود. برای این کار دستگاه مختصات فضایی را به صورت زیر می‌سازیم: سه محور دو به دو عمود بر هم را که از یک نقطه مانند O می‌گذرند، محورهای مختصات نامیده و آن‌ها را محور x (طول)، محور y (عرض) و محور z (ارتفاع) می‌گوییم. به این ترتیب هر نقطه با یک سه‌تایی مرتب متناظر می‌شود و بر عکس هر سه‌تایی مرتب (x, y, z) نیز نقطه منحصر به فردی را با مختصات (x, y, z) مشخص می‌کند.



هر دو محور، یک صفحه تشکیل می‌دهند، صفحه شامل محور x و y صفحه xy ، صفحه شامل محورهای x و z را صفحه xz و صفحه شامل محورهای y و z را صفحه yz می‌نامیم. این سه صفحه را صفحات مختصات می‌گوییم (شکل ۱). اگر $M(x, y, z)$ نقطه‌ای دلخواه در فضا باشد، عدد x ، فاصله جهت‌دار نقطه M از صفحه yz ، عدد y فاصله جهت‌دار نقطه M از صفحه xz و عدد z ، فاصله جهت‌دار نقطه M از صفحه xy است (شکل ۲).

۴-۸ فضای سه بعدی ($\mathbb{R}^3$)

مجموعه سمتایی های (x, y, z) را با $\mathbb{R}^3$ نمایش می دهیم و آن را فضای سه بعدی می گوئیم. پس:

$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) | x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

هر نقطه روی محور x ها به صورت $(x, 0, 0)$ ، هر نقطه روی محور y ها به صورت $(0, y, 0)$ و هر نقطه روی محور z ها به صورت $(0, 0, z)$ است. به طور خلاصه:

$$\text{محور } z = \{(0, 0, z) | z \in \mathbb{R}\} \quad \text{محور } y = \{(0, y, 0) | y \in \mathbb{R}\} \quad \text{محور } x = \{(x, 0, 0) | x \in \mathbb{R}\}$$

فاصله هر نقطه واقع بر صفحه xy ، تا صفحه xy صفر است. پس ارتفاع نقاط واقع بر صفحه xy ، برابر صفر است و به طور مشابه خواهیم داشت:

$$\text{صفحه } yz = \{(x, y, z) | x = 0\} \quad \text{صفحه } xy = \{(x, y, z) | z = 0\} \quad \text{صفحه } xz = \{(x, y, z) | y = 0\}$$

۵-۸ طول (اندازه) پاره خط

اگر M نقطه ای به مختصات (x_1, y_1, z_1) و N نیز نقطه ای به مختصات (x_2, y_2, z_2) باشد، آن گاه اندازه یا طول پاره خط MN یعنی $|MN|$ از رابطه زیر به دست می آید (مسئله ۱).

$$|MN| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

اگر M نقطه ای به مختصات (x_1, y_1, z_1) باشد، فاصله نقطه M از مبدأ مختصات یعنی $|OM|$ از رابطه زیر به دست می آید.

$$|OM| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$$

نکات مهم:

۱- فاصله نقطه $M(x_1, y_1, z_1)$ از محور x برابر $\sqrt{y_1^2 + z_1^2}$ است.

۲- فاصله نقطه $M(x_1, y_1, z_1)$ از محور y برابر $\sqrt{x_1^2 + z_1^2}$ است.

۳- فاصله نقطه $M(x_1, y_1, z_1)$ از محور z برابر $\sqrt{x_1^2 + y_1^2}$ است.

۶-۸ بردارها در فضا

یک بردار در فضا عبارت از یک سه تایی مرتب (a_1, a_2, a_3) از اعداد حقیقی است. a_1 و a_2 و a_3 را مؤلفه های بردار می نامیم. بردار متناظر با بیگانی که از $M(x_1, y_1, z_1)$ شروع و به $N(x_2, y_2, z_2)$ ختم می شود، عبارت است از $(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ و آن را هم از $\vec{MN}$ می نامیم^۱. بنابراین اگر تصویر بردار MN را بر روی محور x ها به a_1 و روی محور y ها به a_2 و روی محور z ها به a_3 نمایش دهیم داریم (مسئله ۲):

$$a_1 = x_2 - x_1, \quad a_2 = y_2 - y_1, \quad a_3 = z_2 - z_1$$

۷-۸ بردارهای واحد محورهای مختصات

هر بردار واحدی^۲ که موازی با محور و هم جهت با آن باشد، بردار واحد محور مذکور می خوانند. بردارهای واحدی که موازی با

(۱) بیگان های موازی و هم جهت که از لحاظ هندسی هم ضول هستند را با یکدیگر هم ارز می گوئیم.

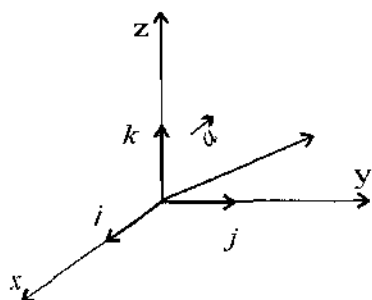
(۲) بردار واحد یا یک، برداری است که طول آن یک باشد.

سوی مثبت محورهای مختصات در فضای $\mathbb{R}^3$ باشند به i و j و k نمایش می‌دهند. بدیهی است که داریم:

$$\text{بردار واحد محور } x \text{ ها} = \vec{i} = (1, 0, 0)$$

$$\text{بردار واحد محور } y \text{ ها} = \vec{j} = (0, 1, 0)$$

$$\text{بردار واحد محور } z \text{ ها} = \vec{k} = (0, 0, 1)$$



۸-۸ طول (اندازه) بردار

اندازه بردار $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ از رابطه زیر به دست می‌آید (مسئله ۳):

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

۹-۸ تساوی دو بردار

دو بردار $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ و $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ مساویند، اگر و فقط اگر مؤلفه‌های آن‌ها نظیر به نظیر مساوی باشند، یعنی:

$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow a_1 = b_1, a_2 = b_2, a_3 = b_3$$

۱۰-۸ جمع دو بردار

جمع دو بردار $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ و $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ به صورت زیر تعریف می‌شود (مسئله ۴):

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$$

۱۱-۸ ضرب بردار در یک عدد حقیقی

اگر λ یک عدد حقیقی باشد، حاصل ضرب λ در بردار $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ به صورت زیر تعریف می‌شود (مسئله ۵):

$$\lambda \vec{a} = \lambda(a_1, a_2, a_3) = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)$$

۱۲-۸ ویژگی‌های جمع دو بردار و ضرب بردار در یک عدد حقیقی

اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ سه بردار دلخواه، $\vec{o} = (0, 0, 0)$ بردار صفر و λ یک عدد حقیقی باشد، آن‌گاه خواهیم داشت:

$$۱) \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} \quad ۲) \vec{o} + \vec{a} = \vec{a} + \vec{o} = \vec{a} \quad ۳) \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

$$۴) \vec{o} \times \vec{a} = \vec{o} \quad (\vec{o} \in \mathbb{R}) \quad ۵) ۱ \times \vec{a} = \vec{a} \quad (۱ \in \mathbb{R})$$

$$۶) \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-1)\vec{b} \quad ۷) \lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$$

با استفاده از ویژگی‌های بردارها و ضرب بردار در یک عدد حقیقی، هر بردار $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ را می‌توانیم به صورت ترکیب بردارهای $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$ بنویسیم:

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) = (a_1, 0, 0) + (0, a_2, 0) + (0, 0, a_3) = a_1(1, 0, 0) + a_2(0, 1, 0) + a_3(0, 0, 1)$$

و در نتیجه:

$$\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$$

با استفاده از رابطه فوق به سادگی می‌توان بردارها را با هم جمع یا از هم کم و یا در عدد دلخواهی ضرب کرد.
تذکره: اگر دو بردار $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ و $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ موازی باشند، داریم:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$$

۸-۱۳ حاصل ضرب داخلی یا اسکالر دو بردار

طبق تعریف، حاصل ضرب داخلی دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر است با حاصل ضرب طول آن‌ها در کسینوس زاویه بین آن‌ها یعنی (مسئله ۶):

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \alpha, \quad 0 \leq \alpha \leq \pi$$

در رابطه فوق α زاویه بین دو بردار است. ضرب داخلی دو بردار یک عدد می‌باشد و علامت آن بستگی به زاویه α دارد.

نکات مهم:

۱- ضرب داخلی دو بردار که مختصات آن‌ها داده شده باشد، یعنی $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ و $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ به صورت زیر است:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

۲- اگر $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ و $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ و α زاویه بین $\vec{a}$ و $\vec{b}$ باشد، آن‌گاه:

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

۳- با توجه به نکته (۲) بدیهی است که اگر دو بردار $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ و $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ بر هم عمود باشند (یعنی $\alpha = \pi/2$)، داریم:

$$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$$

۸-۱۴ ویژگی‌های حاصل ضرب داخلی بردارها

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

(۱) خاصیت جابجایی:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$$

(۲) خاصیت توزیعی:

$$\lambda(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\lambda\vec{a}) \cdot \vec{b} = (\lambda\vec{b}) \cdot \vec{a} = (\vec{a} \cdot \vec{b})\lambda$$

(۳) λ یک اسکالر است:

$$|\vec{a}|^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^T$$

(۴) مربع طول هر بردار برابر است با حاصل ضرب داخلی آن بردار در خودش یعنی:

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

(۵) دو بردار غیرصفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بر هم عمودند اگر و فقط اگر $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ ، یعنی:

(۶) تساوی‌های زیر همواره برقرار است:

$$\vec{a} \cdot \vec{i} = \vec{i} \cdot \vec{a} = a_1, \quad \vec{a} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{a} = a_2, \quad \vec{a} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{a} = a_3$$

$$\vec{i}^T = \vec{i} \cdot \vec{i} = 1, \quad \vec{j}^T = \vec{j} \cdot \vec{j} = 1, \quad \vec{k}^T = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$$

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{i} = 0, \quad \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{j} = 0, \quad \vec{k} \cdot \vec{i} = \vec{i} \cdot \vec{k} = 0$$

۸-۱۵ حاصل ضرب خارجی یا ضرب برداری دو بردار

طبق تعریف، حاصل ضرب خارجی دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ یک بردار است مانند $\vec{c}$ که برابر است با حاصل ضرب طول آن‌ها در سینوس زاویه بین آن‌ها، یعنی:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \alpha$$

راستای بردار $\vec{c}$ عمود بر صفحه دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ است. حاصل ضرب خارجی دو بردار برخلاف حاصل ضرب داخلی دو بردار یک بردار است.

نکات مهم:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \alpha \quad ۱- \text{طول بردار } \vec{a} \times \vec{b} \text{ برابر است با:}$$

$$\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k} \text{ و } \vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k} \text{ یعنی } \vec{a} \times \vec{b} \text{ مختصات آن‌ها داده شده باشد،}$$

به صورت زیر است (مسئله ۷):

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\vec{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{k}$$

و یا:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

۸-۱۶ ویژگی‌های حاصل ضرب خارجی بردارها

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a} \quad (۱) \text{ خاصیت جابه‌جایی ندارند و خواهیم داشت:}$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{a} \times \vec{c}), (\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{c}) + (\vec{b} \times \vec{c}) \quad (۲) \text{ خاصیت توزیعی:}$$

$$\lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda\vec{b}) = (\vec{a} \times \vec{b})\lambda \quad (۳) \text{ } \lambda \text{ یک اسکالر است:}$$

$$\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0} \quad (۴) \text{ حاصل ضرب خارجی هر بردار در خودش برابر صفر است، یعنی:}$$

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \quad (۵) \text{ دو بردار غیر صفر } \vec{a} \text{ و } \vec{b} \text{ موازیند اگر و فقط اگر } \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \text{، یعنی:}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \text{ اگر } \vec{a} \text{ و } \vec{b} \text{ دو بردار غیر صفر باشند، آن‌گاه } \vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0 \text{ و } \vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0 \text{ و بنابراین } \vec{a} \times \vec{b} \text{ برداری است عمود بر } \vec{a} \text{ و عمود بر } \vec{b}.$$

$$(۷) \text{ مساحت متوازی‌الاضلاعی که روی دو بردار } \vec{a} \text{ و } \vec{b} \text{ ساخته می‌شود، برابر اندازه حاصل ضرب خارجی آن دو بردار یعنی } \vec{a} \times \vec{b} \text{ می‌باشد.}$$

$$(۸) \text{ مساحت مثلثی که با دو بردار } \vec{a} \text{ و } \vec{b} \text{ ساخته می‌شود برابر } |\vec{a} \times \vec{b}|/2 \text{ است.}$$

$$(۹) \text{ تساوی‌های زیر برقرار است:}$$

$$\begin{aligned} \vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} &= \vec{0}, & \vec{i} \times \vec{j} = -\vec{j} \times \vec{i} = \vec{k} \\ \vec{j} \times \vec{k} = -\vec{k} \times \vec{j} = \vec{i} &, & \vec{k} \times \vec{i} = -\vec{i} \times \vec{k} = \vec{j} \end{aligned}$$

۸-۱۷ حاصل ضرب مختلط سه بردار

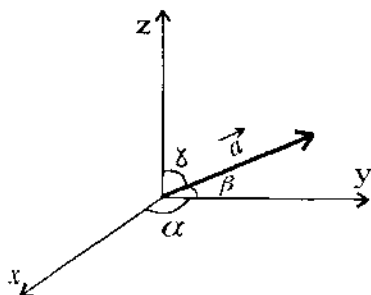
با توجه به ضرب داخلی و ضرب خارجی بردارها، اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ سه بردار باشند، آن‌گاه ضرب $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ را ضرب مختلط سه بردار فوق می‌نامند. اگر $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ و $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ و $\vec{c} = c_1\vec{i} + c_2\vec{j} + c_3\vec{k}$ باشد، آن‌گاه

حاصل ضرب مختلط سه بردار دتریمانی به صورت زیر است (مسئله ۸):

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$$

۸-۱۸ زوایای یک بردار با محورها

بردار $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ را در نظر می‌گیریم. مطابق شکل زیر اگر زوایای این بردار و جهت مثبت محور x ، y و z ها را به ترتیب α ، β و γ بگیریم. آن‌گاه (مسئله ۹):



$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{i}}{|\vec{a}| |\vec{i}|} = \frac{a_1}{|\vec{a}|}$$

$$\cos \beta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{j}}{|\vec{a}| |\vec{j}|} = \frac{a_2}{|\vec{a}|}$$

$$\cos \gamma = \frac{\vec{a} \cdot \vec{k}}{|\vec{a}| |\vec{k}|} = \frac{a_3}{|\vec{a}|}$$

و در نتیجه خواهیم داشت:

$$\vec{a} = |\vec{a}|(\vec{i} \cos \alpha + \vec{j} \cos \beta + \vec{k} \cos \gamma)$$

۸-۱۹ معادله خط در فضا

هر خط راست را در فضای $\mathbb{R}^3$ می‌توانیم با یک نقطه ثابت از آن و یک بردار که موازی آن باشد مشخص کنیم. صورت برداری معادله خطی که از نقطه $r_0(x_0, y_0, z_0)$ می‌گذرد و با بردار $\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ موازی است عبارت است از:

$$r = r_0 + \vec{v}t \quad t \in \mathbb{R}$$

۸-۲۰ معادلات پارامتری و متقارن خط در فضا

خط l ، موازی با بردار $\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ که از نقطه $P(x_0, y_0, z_0)$ می‌گذرد، دارای معادلاتی به صورت زیر است (مسئله ۱۰):

$$x = x_0 + at, \quad y = y_0 + bt, \quad z = z_0 + ct$$

در این روابط t را پارامتر می‌نامند. اگر در روابط فوق پارامتر t را بین معادلات حذف کنیم به روابط زیر که، معادلات متقارن خط نامیده می‌شوند، خواهیم رسید.

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \quad (a, b, c \neq 0)$$

تذکره: معادلات پارامتر و متقارن یک خط منحصر به فرد نیست.

۸-۲۱ تعیین معادله خطی که دو نقطه آن معلوم است

می‌خواهیم معادله خطی را بنویسیم که از نقاط A و B می‌گذرد، از آنجا که بردار $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$ موازی پیکانی است که از A به B رسم شده است، پس $\vec{v} = \vec{OB} - \vec{OA}$ یک بردار هادی خط مطلوب می‌باشد و با در نظر گرفتن یکی از نقاط A یا B معادله خط را تعیین می‌کنیم (مسئله ۱۱).

(۱) بردار $\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ را یک بردار هادی خط l گویند. a و b و c را پارامترهای هادی خط می‌نامند.

۸-۲۲ تعیین معادله خطی که از یک نقطه بر یک خط عمود است

اگر $\vec{r}$ بردار هادی خط مفروض d و A نقطه‌ای خارج از آن باشد، صورت پارامتری خط d را می‌نویسیم و یک نقطه دلخواه P روی خط d می‌گیریم. از آنجا که می‌خواهیم خطی که از P بر d رسم می‌شود بر d عمود باشد، باید $\overrightarrow{PA}$ بر بردار هادی خط عمود باشد، یعنی $\vec{v} \cdot \overrightarrow{PA} = 0$ ، از این معادله پارامتر t به دست می‌آید، به این ترتیب مختصات نقطه A تعیین می‌شود. اکنون معادله خطی را می‌نویسیم که از دو نقطه A و P می‌گذرد (مسئله ۱۲).

۸-۲۳ وضعیت دو خط نسبت به یکدیگر

به‌طور کلی دو خط متمایز در فضای $\mathbb{R}^3$ یکی از سه حالت نسبی زیر را دارند.

- (۱) اگر دو خط متمایز متقاطع باشند، فقط در یک نقطه اشتراک دارند. یعنی نقطه‌ای وجود دارد که مختصات آن در معادله هر دو خط صدق می‌کند.
- (۲) اگر دو خط متمایز با پارامترهای (a, b, c) و (a', b', c') موازی باشند در این صورت $a/a' = b/b' = c/c'$ خواهد بود و برعکس.
- (۳) اگر دو خط متمایز نه متقاطع و نه موازی باشند، متفرند.

۸-۲۴ زاویه بین دو خط متقاطع

زاویه بین دو خط متقاطع، زاویه بین بردارهای هادی دو خط مزبور است (مسئله ۱۳).

۸-۲۵ فاصله یک نقطه از یک خط

فاصله نقطه P از خط l برابر است با:

$$d = \frac{|\overrightarrow{P, P} \times \vec{v}|}{|\vec{v}|}$$

P نقطه‌ای دلخواه روی خط l و $\vec{v}$ بردار هادی خط l است (مسئله ۱۴).

۸-۲۶ معادله صفحه

برای مشخص کردن صفحه، مشخص بودن یک نقطه از آن صفحه و برداری که بر آن صفحه عمود باشد کافی است. معادله صفحه‌ای که از نقطه $p_0(x_0, y_0, z_0)$ می‌گذرد و بر بردار $\vec{N} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ عمود است، عبارت است از:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

اگر قرار دهیم $d = ax_0 + by_0 + cz_0$ آن‌گاه معادله صفحه عبارت است از (مسئله ۱۵):

$$ax + by + cz = d$$

۸-۲۷ حالات خاص معادلات صفحه

- (۱) معادله هر صفحه که از مبدأ می‌گذرد، به صورت $ax + by + cz = 0$ است.
- (۲) معادله $ax + by + d = 0$ معادله صفحه‌ای است به موازات محور oz .
- (۳) معادله $ax + cz + d = 0$ معادله صفحه‌ای است به موازات محور oy .

(۱) بردار $\vec{N}$ را بردار نرمال صفحه می‌گویند.

(۴) معادله $by + cz + d = 0$ معادله صفحه‌ای است به موازات محور ox .

(۵) معادله $ax + d = 0$ معادله صفحه‌ای است به موازات صفحه yoz .

(۶) معادله $by + d = 0$ معادله صفحه‌ای است به موازات صفحه xoz .

(۷) معادله $cz + d = 0$ معادله صفحه‌ای است به موازات صفحه xoy .

۲۸-۸ تعیین معادله صفحه‌ای که سه نقطه آن معلوم است

معادله صفحه‌ای که از سه نقطه $A(a_1, b_1, c_1)$ و $B(a_2, b_2, c_2)$ و $C(a_3, b_3, c_3)$ می‌گذرد، عبارت است از (مسئله ۱۶):

$$\begin{vmatrix} x - a_1 & y - b_1 & z - c_1 \\ a_2 - a_1 & b_2 - b_1 & c_2 - c_1 \\ a_3 - a_1 & b_3 - b_1 & c_3 - c_1 \end{vmatrix} = 0$$

۲۹-۸ زاویه بین دو صفحه

زاویه بین دو صفحه $a_1x + b_1y + c_1z = d_1$ و $a_2x + b_2y + c_2z = d_2$ زاویه بین نرمال‌های دو صفحه مزبور است و یا (مسئله ۱۷):

$$\cos \theta = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$

نکات مهم:

- ۱- دو صفحه با هم موازیند هرگاه نرمال‌هایشان موازی باشند.
- ۲- دو صفحه بر هم عمودند هرگاه نرمال‌هایشان بر هم عمود باشند.
- ۳- زاویه بین یک خط و یک صفحه، متمم زاویه حاده بین خط مزبور و نرمال صفحه است.
- ۴- یک خط با یک صفحه موازی است، هرگاه هادی خط بر نرمال صفحه عمود باشد.
- ۵- یک خط بر یک صفحه عمود است، هرگاه هادی خط موازی نرمال صفحه باشد.

۳۰-۸ معادله دسته صفحه

به کلیه صفحاتی که همه از یک خط می‌گذرند، یک دسته صفحه می‌گویند. خط مزبور (فصل مشترک همه صفحات) را محور این دسته صفحه می‌گوییم.

۳۱-۸ معادله صفحه‌ای که دو نقطه آن داده شده و بر صفحه دیگر عمود است

فرض می‌کنیم معادله صفحه مطلوب به صورت $ax + by + cz = d$ و A و B دو نقطه آن باشد. بردار نرمال صفحه مطلوب از ضرب خارجی نرمال صفحه داده شده (n) و بردار هادی خطی که از دو نقطه داده شده می‌گذرد $(\overline{AB})$ به دست می‌آید. یعنی $n \times \overline{AB}$ اکنون یک نقطه A یا B و نرمال صفحه مطلوب را داریم با استفاده از فرمول $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$ معادله صفحه را می‌نویسیم (مسئله ۱۸).

۳۲-۸ معادله صفحه‌ای که یک نقطه آن داده شده و بر دو صفحه معین عمود است

اگر N_1 و N_2 به ترتیب نرمال‌های صفحه داده شده باشند، آنگاه $N = N_1 \times N_2$ نرمال صفحه مطلوب است. حالا یک نقطه و نرمال صفحه مطلوب را داریم. با استفاده از فرمول $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$ معادله صفحه را می‌نویسیم.

۳۳-۸ معادله صفحه‌ای که از یک نقطه معین می‌گذرد و موازی دو خط غیرموازی است

اگر $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ و $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ بردارهای هادی دو خط مفروض و (x_0, y_0, z_0) نقطه داده شده‌ای از صفحه باشد، در این صورت معادله صفحه مطلوب چنین است (مسئله ۱۹).

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

۳۴-۸ فاصله یک نقطه از یک صفحه

فاصله نقطه $A(x_0, y_0, z_0)$ از صفحه به معادله $ax + by + cz + d = 0$ برابر است با (مسئله ۲۰):

$$D = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

۳۵-۸ فاصله دو صفحه موازی

اگر دو صفحه موازی باشند، معادلات آنها به صورت $ax + by + cz = d$ و $ax + by + cz = d'$ است، در این صورت فاصله دو صفحه مزبور عبارت است از (مسئله ۲۱):

$$H = \frac{|d - d'|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

۳۶-۸ تعریف بردار و فضای برداری v_n

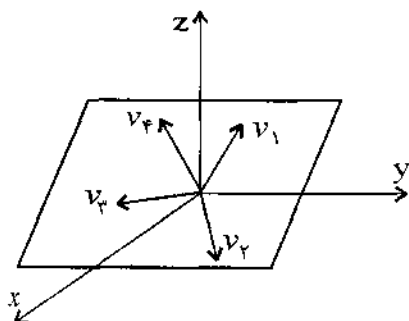
یک n گانه مرتب به صورت $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ را یک نقطه یا یک بردار در فضای $\mathbb{R}^n$ ، n بعدی، $(a_i \in \mathbb{R}, n \geq 1)$ و a_i ها را مؤلفه‌های بردار $\vec{a}$ می‌نامند. مجموعه همه بردارهای n بعدی را فضای برداری نامیده و آن را با v_n نمایش می‌دهیم.

۳۷-۸ ترکیب خطی

منظور از ترکیب خطی n بردار $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ برداری است به صورت $\vec{v} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \dots + a_n\vec{v}_n$ که در آن $a_i \in \mathbb{R}$ و بردارهای $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ نیز متعلق به فضای موردبررسی است (مسئله ۲۲).

۳۸-۸ بردارهای هم‌صفحه

بردارهای $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ را هم‌صفحه گویند، هرگاه در یک صفحه گذرا از مبدأ قرار داشته باشند.



۸-۳۹ روش‌های تعیین هم‌صفحه بودن سه بردار

- (۱) سه بردار $\vec{v}_1$ و $\vec{v}_2$ و $\vec{v}_3$ در $\mathbb{R}^3$ هم‌صفحه‌اند اگر و تنها اگر حداقل یکی از بردارها ترکیبی خطی از دو بردار دیگر باشد. در نتیجه، سه بردار $\vec{v}_1$ و $\vec{v}_2$ و $\vec{v}_3$ در $\mathbb{R}^3$ هم‌صفحه نیستند، اگر و تنها اگر هیچ‌کدام از بردارها، ترکیبی خطی از دو بردار دیگر نباشد.
- (۲) سه بردار $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ و $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ و $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ در $\mathbb{R}^3$ هم‌صفحه‌اند، اگر و تنها اگر $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0$ ، یعنی (مسئله ۲۳):

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

۸-۴۰ استقلال خطی و بستگی خطی

- اگر یک ترکیب خطی از n بردار $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ برابر صفر باشد، یعنی $a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \dots + a_n\vec{v}_n = 0$ و a_i ها با هم صفر شوند، یعنی حداقل یکی از آنها مخالف صفر باشد، آنگاه بردارهای $\vec{v}_1$ و $\vec{v}_2$ و $\dots$ و $\vec{v}_n$ بستگی خطی دارند و در صورتی که از $a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \dots + a_n\vec{v}_n = 0$ نتیجه شود که $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$ آنگاه بردارهای $\vec{v}_1$ و $\vec{v}_2$ و $\dots$ و $\vec{v}_n$ استقلال خطی دارند (مسئله ۲۴).

نکات مهم:

- ۱- به‌طور کلی برای تشخیص اینکه در فضای $\mathbb{R}^2$ یا $\mathbb{R}^3$ یا $\dots$ دو بردار یا سه بردار یا $\dots$ دارای بستگی خطی هستند یا استقلال خطی کافی است بردارها را به‌صورت سطرها یا ستون‌های یک دترمینان نوشته، آنگاه:
 - الف) اگر حاصل دترمینان برابر صفر باشد، بردارها بستگی خطی دارند.
 - ب) اگر حاصل دترمینان مخالف صفر باشد، بردارها استقلال خطی دارند (مسئله ۲۵).
- ۲- سه بردار در $\mathbb{R}^3$ بستگی خطی دارند اگر و تنها اگر هم‌صفحه باشند و استقلال خطی دارند اگر و تنها اگر هم‌صفحه نباشند.

۸-۴۱ استقلال خطی و بستگی خطی یک بردار

- (۱) اگر $\vec{v} = 0$ ، در این صورت مجموعه $\{\vec{v}\}$ بستگی خطی دارد.
- (۲) اگر $\vec{v} \neq 0$ ، در این صورت مجموعه $\{\vec{v}\}$ استقلال خطی دارد.

۸-۴۲ استقلال خطی و بستگی خطی دو بردار

- (۱) دو بردار ناصفر $\vec{v}_1$ و $\vec{v}_2$ استقلال خطی دارند اگر و تنها اگر هیچ یک از بردارها مضرب دیگری نباشد.
- (۲) دو بردار ناصفر $\vec{v}_1$ و $\vec{v}_2$ بستگی خطی دارند اگر و تنها اگر یکی از بردارها مضرب دیگری باشد (مسئله ۲۶).

۸-۴۳ یک معیار برای بستگی خطی دو یا بیش از دو بردار

- فرض کنید $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ مجموعه‌ای با بیش از یک بردار است. مجموعه S وابسته خطی است اگر و تنها اگر حداقل یکی از بردارهای S ، ترکیبی خطی از بقیه بردارهای S باشد.

نکات مهم:

- ۱- بردار صفر با هر مجموعه از بردارها، بستگی خطی دارد.
- ۲- هرگاه دو بردار دارای راستاهای مختلف باشند، گوئیم نسبت به هم استقلال خطی دارند و اگر راستاهای آنها یکی باشد، گوئیم نسبت به هم بستگی خطی دارند.

۳- اگر زیرمجموعه‌ای از یک مجموعه A وابسته خطی باشد، آنگاه خود A هم وابسته خطی است.

۴- هر زیرمجموعه یک مجموعه مستقل خطی، مجموعه‌ای مستقل خطی است.

۴۴-۸ حداکثر تعداد بردارهای مستقل خطی در $\mathbb{R}^2$ و $\mathbb{R}^3$

- (۱) در $\mathbb{R}^2$ هر سه بردار، بستگی خطی دارند.
 - (۲) در $\mathbb{R}^2$ یک مجموعه مستقل خطی است هرگاه حداکثر ۲ عضو داشته باشد.
 - (۳) در $\mathbb{R}^3$ هر چهار بردار بستگی خطی دارند.
 - (۴) در $\mathbb{R}^3$ یک مجموعه مستقل خطی است هرگاه حداکثر ۳ عضو داشته باشد (مسئله ۲۷).
- تذکره: بیش‌تر از n بردار غیر صفر در $\mathbb{R}^n$ نمی‌توانند مستقل خطی باشند.

۴۵-۸ بردارهایی که یک فضای برداری را پدید می‌آورند

- (۱) در فضای $\mathbb{R}^2$ اگر دو بردار، مستقل خطی باشند فضای $\mathbb{R}^2$ را پدید می‌آورند.
- (۲) در فضای $\mathbb{R}^3$ اگر سه بردار، مستقل خطی باشند، فضای $\mathbb{R}^3$ را پدید می‌آورند (مسئله ۲۸).

مسائل نمونه فصل ۸

۱. فاصله دو نقطه $M(0, 1, 2)$ و $N(1, 1, 0)$ را بیابید.
۲. اگر $M(2, 4, 1)$ و $N(1, 5, 2)$ باشند، مؤلفه‌های بردار $\overrightarrow{MN}$ را بیابید.
- (۵-۳) اگر $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$ و $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{k}$ باشند، مطلوب است:
 - (۳) طول بردار a
 - (۴) $\vec{a} + \vec{b}$
 - (۵) $\vec{a} - 2\vec{b}$
۶. اگر $|\vec{a}| = 2$ و $|\vec{b}| = 5$ و $\alpha = \pi/3$ باشد، $\vec{a} \cdot \vec{b}$ را بیابید.
۷. اگر $\vec{a} = (1, 2, 3)$ و $\vec{b} = (-1, 0, 1)$ باشند، $|\vec{a} \times \vec{b}|$ را بیابید.
۸. اگر داشته باشیم $\vec{a} = (1, 1, 1)$ و $\vec{b} = (2, 0, 4)$ و $\vec{c} = (1, 2, 3)$ ، مطلوب است $(\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a}$.
۹. زاویه بردار $\vec{a} = 2\vec{i} + 2\sqrt{3}\vec{k}$ با محور oy را بیابید.
۱۰. معادلات پارامتر خطی را بیابید که شامل نقطه $(1, -2, 3)$ و موازی با بردار $\vec{k} - 2\vec{j} + \vec{i}$ است.
۱۱. معادله خطی را بنویسید که از دو نقطه $A(2, 3, 4)$ و $B(1, -1, 2)$ می‌گذرد.
۱۲. نقطه $(4, 0, 1)$ و خط d به معادلات $x/3 = y = z/1$ مفروضند. از نقطه A خطی عمود بر d رسم شده است، معادله این خط را بیابید.
۱۳. زاویه خطهای $t: x = 2 - t, y = 1 + t, z = 2 - t$ و $d: x = -2t, y = 1 + 2t, z = 2 - t$ را بیابید.
۱۴. فاصله نقطه $P(1, -1, 1)$ را از خط l به معادله $x = 1 + t, y = 2 - 2t, z = 3t$ بیابید.
۱۵. معادله صفحه عمود بر بردار $2\vec{k} + \vec{j} - \vec{i}$ و شامل نقطه $(0, 0, 1)$ را بیابید.
۱۶. معادله صفحه‌ای که از سه نقطه $(1, -2, 1)$ و $(2, 3, 1)$ و $(1, 2, 2)$ می‌گذرد.
۱۷. زاویه حاده بین دو صفحه p_1 و p_2 به معادلات $x + y = 1$ و $y + z = 1$ را بیابید.
۱۸. معادنه صفحه‌ای را بنویسید که از دو نقطه $A(1, 0, 1)$ و $B(-1, 1, 2)$ بگذرد و بر صفحه به معادله $x - y + 2z = 1$ عمود باشد.
۱۹. اگر $2\vec{j} + 3\vec{k} - \vec{i}$ و $\vec{k} + \vec{j} + 2\vec{i}$ بردارهای هادی دو خط باشند و $(0, 1, -1)$ نقطه داده شده‌ای از صفحه باشد، معادنه صفحه مطلوب را بیابید.
۲۰. فاصله نقطه $(1, 1, 1)$ از صفحه به معادله $2x + 2y + z = 2$ را بیابید.

۲۱. فاصله دو صفحه $2x + 2y + z = 1$ و $2x + 2y + z = 4$ را بیابید.
۲۲. دو بردار $\vec{v}_1 = (2, -1)$ و $\vec{v}_2 = (-8, 4)$ از فضای $\mathbb{R}^2$ را در نظر می‌گیریم. آیا $(1, -6)$ یک ترکیب خطی $\vec{v}_1$ و $\vec{v}_2$ است؟
۲۳. آیا سه بردار $\vec{v}_1 = (2, -2, 3)$ و $\vec{v}_2 = (3, 2, -2)$ و $\vec{v}_3 = (5, -2, 4)$ هم‌صفحه‌اند؟
۲۴. نشان دهید بردارهای $\vec{v}_1 = (0, 1, -1)$ و $\vec{v}_2 = (2, 3, 0)$ و $\vec{v}_3 = (0, 3, -3)$ بستگی خطی دارند؟
۲۵. در فضای $\mathbb{R}^3$ نشان دهید بردارهای $(1, 2, -1)$ و $(2, 0, 3)$ و $(-2, -1, -1)$ استقلال خطی دارند یا بستگی خطی؟
۲۶. به‌ازای چه مقداری از m بردارهای $(1, 2)$ و $(-3, m)$ استقلال خطی دارند؟
۲۷. کدامیک از مجموعه‌های $\{(0, 1), (2, 3), (-1, -2)\}$ و $\{(0, 0), (-2, 3)\}$ مستقل خطی‌اند؟
۲۸. کدامیک از مجموعه‌های $\{(0, 1, 1), (2, 0, 2), (1, -1, 0)\}$ و $\{(0, 1, 2), (1, 2, 3), (3, -1, 0)\}$ فضای $\mathbb{R}^3$ را پدید می‌آورند.
۲۹. معادله صفحه‌ای را بنویسید که از نقطه $A(0, 1, 2)$ بگذرد و بر دو صفحه به معادلات $x + y + z = 1$ و $x - y + z = 1$ عمود باشد.

پاسخ مسائل نمونه فصل ۸

۱. $|MN| = \sqrt{1 + 0 + 4} = 5$
۲. $a_1 = 1 - 2 = -1, a_2 = 5 - 4 = 1, a_3 = 2 - 1 = 1$
۳. $\vec{a} = (1, -2, 2), \vec{b} = (2, 0, -1), |\vec{a}| = \sqrt{1 + 4 + 4} = 3$
۴. $\vec{a} + \vec{b} = (1 + 2, -2 + 0, 2 - 1) = (3, -2, 1)$
۵. $\vec{w} = 2(1, -2, 2) - 3(2, 0, -1) = (2, -4, 4) + (-6, 0, 3) = (-4, -4, 7)$
۶. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \times 5 \times \cos \frac{\pi}{3} = 10 \times \frac{1}{2} = 5$
۷. $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (2 - 0)\vec{i} + (-3 - 1)\vec{j} + (0 + 2)\vec{k} = 2\vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{k}$
 $|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{4 + 16 + 4} = 2\sqrt{6}$
۸. $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (0 + 4 + 4) - (0 + 6 + 8) = -6$

۹.

$$\cos \beta = \frac{a_2}{|\vec{a}|} = \frac{0}{\sqrt{4+0+12}} = \frac{0}{4} = 0$$

۱۰. داریم $x_0 = 1$ و $y_0 = -2$ و $z_0 = 3$ و نیز $a = 1$ و $b = 2$ و $c = -1$ در نتیجه:

$$x = 1 + t, \quad y = -2 + 2t, \quad z = 3 - t$$

۱۱.

$$\vec{v} = \vec{OB} - \vec{OA} = (-1, -4, -2)$$

حال اگر نقطه $A(2, 3, 4)$ را به عنوان نقطه (x_0, y_0, z_0) بگیریم، معادله خط به دست می آید:

$$x = 2 - t, y = 3 - 4t, z = 4 - 2t \quad \text{یا} \quad \frac{x-2}{-1} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z-4}{-2}$$

۱۲. معادله پارامتری خط d به صورت $x = 3t$ و $y = t$ و $z = -t$ و نقطه $P(3t, t, -t)$ نقطه دلخواهی روی خط d است. بردار هادی خط d به صورت $\vec{v} = 3\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} = (3, 1, -1)$ می باشد. باید $\vec{v} \cdot \vec{PA} = 0$ در نتیجه:

$$(3, 1, -1)(4 - 3t, 0 - t, 1 + t) = 0 \Rightarrow 3(4 - 3t) + 1(0 - t) - (1 + t) = 0 \Rightarrow$$

$$11t = 11 \Rightarrow t = 1 \Rightarrow P(3, 1, -1) \Rightarrow \frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{2}$$

۱۳. بدیهی است که این دو خط همدیگر را در نقطه $(0, 1, 2)$ قطع می کنند. بردارهای هادی دو خط d_1 و d_2 به ترتیب $\vec{v}_1 = (1, 1, -1)$ و $\vec{v}_2 = (-2, 2, -1)$ می باشد. پس:

$$\cos \alpha = \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{|\vec{v}_1| \cdot |\vec{v}_2|} = \frac{-2 + 2 + 1}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{15}} \Rightarrow \alpha = \text{Arc cos } \frac{1}{\sqrt{15}}$$

۱۴. $\vec{v} = (3, -2, 1)$ بردار هادی خط l و $P_0(0, 2, 1)$ نقطه ای واقع بر این خط است. پس $\vec{P_0P} = (-1, 3, 0)$ و

$$|\vec{P_0P} \times \vec{v}| = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 3\vec{i} + \vec{j} - 7\vec{k}, d = \frac{|3\vec{i} + \vec{j} - 7\vec{k}|}{|\vec{v}|} = \frac{\sqrt{59}}{\sqrt{14}}$$

۱۵. بردار نرمال صفحه مزبور $N = (1, -1, 2)$ است. پس:

$$1(x - 0) - 1(y - 0) + 2(z - 1) = 0 \Rightarrow x - y + 2z = 2$$

۱۶.

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z-1 \\ 2-1 & 3+2 & 1-1 \\ 1-1 & 2+2 & 2-1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 5x - y + 4z = 11$$

۱۷. نرمال های دو صفحه p_1 و p_2 به ترتیب $n_1 = (1, 1, 0)$ و $n_2 = (0, 1, 1)$ است. پس:

$$\cos \theta = \frac{n_1 \cdot n_2}{|n_1| \cdot |n_2|} = \frac{1}{\sqrt{2} \sqrt{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

$$\cos \theta = \frac{|1 \times 0 + 1 \times 1 + 0 \times 1|}{\sqrt{1+1+0} \cdot \sqrt{0+1+1}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

۱۸. $n = (1, -1, 2)$ نرمال صفحه داده شده و $\overrightarrow{AB} = (-2, 1, 1)$ هادی خط AB بنابراین:

$$n \times \overrightarrow{AB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3\vec{i} - 5\vec{j} - \vec{k}$$

نرمال صفحه مطلوب

پس معادله صفحه مطلوب عبارت است از $0 = -3(x-1) - 5(y-0) - (z-1) = -3x - 5y - z = 4$ یا $-3x - 5y - z = 4$.
 ۱۹. داریم $\vec{a} = (1, -2, 3)$ و $\vec{b} = (2, 1, 1)$ بنابراین:

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-1 & z+1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -5x + 5y + 5z = 0$$

۲۰.

$$D = \frac{|2 \times 1 + 2 \times 1 + 1 \times 1 - 2|}{\sqrt{2+4+1}} = \frac{2}{\sqrt{7}} = 1$$

۲۱.

$$H = \frac{|4-1|}{\sqrt{4+4+1}} = \frac{3}{\sqrt{9}} = 1$$

۲۲. در صورتی $(1, -6)$ یک ترکیب خطی $\vec{v}_1$ و $\vec{v}_2$ است که اعداد حقیقی x و y وجود داشته باشند، به طوری که $x\vec{v}_1 + y\vec{v}_2 = (1, -6)$ یعنی:

$$x(2, -1) + y(-8, 4) = (1, -6)$$

$$\begin{cases} 2x - 8y = 1 \\ -x + 4y = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & -8 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 0, \frac{2}{-1} = \frac{-8}{4} \neq \frac{1}{-6}$$

پس دستگاه جواب ندارد

بنابراین $(1, -6)$ ترکیب خطی $\vec{v}_1$ و $\vec{v}_2$ نیست.

۲۳. خیر- چون $\vec{v}_1$ و $\vec{v}_2$ هم راست نیستند، پس یک صفحه منحصر بفرد از $\vec{v}_1$ و $\vec{v}_2$ می گذرد. $\vec{N} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2$ یک بردار نرمال این صفحه است. پس:

$$\vec{N} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -2\vec{i} + 13\vec{j} + 10\vec{k}$$

چون این صفحه از مبدأ هم می گذرد، معادله اش به صورت $0 = -2x + 13y + 10z$ است. حال مختصات $\vec{v}_3 = (5, -2, 4)$ را در معادله این صفحه قرار می دهیم. خواهیم داشت $0 \neq -2(5) + 13(-2) + 10(4)$ پس بردار $\vec{v}_3$ در این صفحه نیست.

یا:

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & -2 \\ 5 & -2 & 4 \end{vmatrix} = (16 + 20 - 18) - (30 + 8 - 24) \neq 0$$

۲۲. صورت کلی ترکیبات این سه بردار را نوشته و مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$x\vec{v}_1 + y\vec{v}_2 + z\vec{v}_3 = (0, 0, 0) \Rightarrow x(0, 1, -1) + y(2, 3, 0) + z(0, 3, -3) = (0, 0, 0) \\ = (0 + 2y + 0, x + 3y + 3z, -x - 3z) = (0, 0, 0)$$

$$\begin{cases} 2y = 0 \\ x + 3y + 3z = 0 \\ -x - 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (0 + 0 - 6) - (0 - 6 + 0) = 0$$

بنابراین دستگاه جواب غیرصفر دارد، در نتیجه بردارهای مزبور بستگی خطی دارند. ۲۵

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ -2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = (0 + 2 - 12) - (0 - 4 - 3) = -3 \neq 0 \Rightarrow \text{بردارها استقلال خطی دارند.}$$

۲۶. باید دو بردار $(1, 2)$ و $(-3, m)$ مضرب یکدیگر نباشند، یعنی $m/2 \neq -3/1$ یا $m \neq -6$.

۲۷. هر دو، زیرا مجموعه اول شامل بردار صفر است و مجموعه دوم هم شامل سه بردار است.

۲۸. مجموعه اول، زیرا مجموعه مزبور مستقل خطی است و شامل سه بردار است.

۲۹. داریم $N_1 = (1, 1, 1)$ و $N_2 = (2, -1, 1)$. پس:

$$N = N_1 \times N_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$$

بنابراین معادله صفحه مطلوب عبارت است از: $2x + y - 3z = 5$ یا $2(x - 0) + (y - 1) - 3(z - 2) = 0$.

سؤالات تستی فصل ۸

۱- اگر $\vec{MN} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$ و $M(0, 1, -1)$ باشد، آنگاه مختصات نقطه N کدام است؟

$$(1, -1, 3) \quad (2) \quad (0, -1, 1) \quad (3) \quad (2, 0, 2) \quad (4) \quad (-2, 0, -2)$$

۲- شرط لازم و کافی برای آنکه دو بردار $\vec{a} = (m, 1, n+1)$ و $\vec{b} = (2m-1, m+4, m)$ با هم موازی باشند، کدام است؟

$$n = \frac{4}{3}, m = 1 \quad (2)$$

$$n = -\frac{4}{3}, m = -1 \quad (1)$$

$$n = -1, m = -\frac{4}{3} \quad (4)$$

$$n = 1, m = \frac{4}{3} \quad (3)$$

۳- اگر $\vec{a} = (1, 2)$ و $\vec{b} = (-2, 1)$ و $\vec{c} = (-3, 4)$ باشد، α و β را چنان بیابید که $\vec{c} = \alpha\vec{a} - 2\beta\vec{b}$.

$$\alpha = \beta = 1 \quad (1) \quad \alpha = \beta = -1 \quad (2) \quad \alpha = -\beta = 1 \quad (3) \quad -\alpha = \beta = 1 \quad (4)$$

۴- دو نقطه $A(1, 1, 1)$ و $B(-1, -1, -1)$ و نقطه P مفروض است، اگر $\vec{PA} \cdot \vec{PB} = 13$ باشد، فاصله P از مبدأ مختصات کدام است؟

$$\sqrt{2} \quad (4)$$

$$2\sqrt{2} \quad (3)$$

$$4 \quad (2)$$

$$16 \quad (1)$$

۵- فاصله نقطه $A(1, 2, 3)$ از محور y ها کدام است؟

$\sqrt{15}$ (۴) $2\sqrt{5}$ (۳) $\sqrt{5}$ (۲) $\sqrt{10}$ (۱)

۶- اگر $|\vec{v}_1| = 2$ و $|\vec{v}_2| = 3$ و $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 4$ باشند، $|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2|$ کدام است؟

12 (۴) $6\sqrt{5}$ (۳) $\sqrt{5}$ (۲) $12\sqrt{5}$ (۱)

۷- اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار باشند، عبارت $|\vec{a} + \vec{b}|^2$ برابر است با:

$|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b}$ (۳) $|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2(\vec{a} \cdot \vec{b})$ (۲) $|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b}$ (۱) هیچ کدام (۴)

۸- حاصل ضرب داخلی دو بردار $\vec{a} = 2\vec{i} + 2x\vec{k}$ و $\vec{b} = x\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$ مساوی ۶ است. زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ چه قدر است؟

90° (۴) 60° (۳) 30° (۲) 45° (۱)

۹- دو بردار $\vec{a} = (3, 2, 4)$ و $\vec{b} = (2, 1, m)$ بر یکدیگر عمودند، m کدام است؟

1 (۱) -1 (۲) 2 (۳) -2 (۴)

۱۰- بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ با هم زاویه 30° می‌سازند، اگر $|\vec{a}| = 6$ و $|\vec{b}| = 5$ ، آنگاه $|\vec{a} \times \vec{b}|$ کدام است؟

$15\sqrt{3}$ (۱) 15 (۲) 30 (۳) $30\sqrt{3}$ (۴)

۱۱- با فرض اینکه زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر $\pi/3$ و $|\vec{b}| = 3$ و $|\vec{a}| = 4$ باشد، مقدار $(\vec{a} - 3\vec{b}) \cdot (\vec{a} + 2\vec{b})$ کدام است؟

50 (۱) -50 (۲) 25 (۳) -25 (۴)

۱۲- اگر اندازه حاصل ضرب خارجی دو بردار $\vec{v}_1 = (1, 0, x)$ و $\vec{v}_2 = (0, 1, x)$ برابر $\sqrt{3}$ باشد و $x > 0$ ، آنگاه:

$x = 2$ (۱) $x = 3$ (۲) $x = 4$ (۳) $x = 1$ (۴)

۱۳- حاصل ضرب $(\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}) \cdot \vec{r}$ برابر است با:

0 (۱) 1 (۲) -1 (۳) 3 (۴)

۱۴- اگر $\vec{a} = 2x\vec{i} + 2x\vec{j} - x\vec{k}$ و $|\vec{a}| = 6$ و $x > 0$ باشد، مختصات بردار $3\vec{a}$ کدام است؟

$(4, 4, -2)$ (۱) $(12, 12, -6)$ (۲) $(12, 12, -3)$ (۳) $(2, 2, -1)$ (۴)

۱۵- اگر $|\vec{a}| = 10$ و $|\vec{b}| = 2$ و $\vec{a} \cdot \vec{b} = 12$ باشد، در این صورت $|\vec{a} \times \vec{b}|$ برابر است با:

4 (۱) $\frac{3}{5}$ (۲) 16 (۳) $\frac{4}{5}$ (۴)

۱۶- حاصل ضرب اندازه‌های دو بردار ۱۲ و اندازه حاصل ضرب خارجی آن‌ها ۹ است. حاصل ضرب داخلی آن‌ها کدام است؟

$\frac{\sqrt{5}}{4}$ (۱) $3\sqrt{5}$ (۲) $\sqrt{5}$ (۳) $\frac{3}{4}$ (۴)

۱۷- زاویه بین دو بردار $\vec{v}_1 = (2, 3, -3)$ و $\vec{v}_2 = (3, 2, 4)$ کدام است؟

90° (۱) 60° (۲) 120° (۳) 45° (۴)

۱۸- اگر اندازه حاصل ضرب خارجی دو بردار عمود بر هم سه برابر اندازه یکی از آن‌ها باشد، اندازه دیگری کدام است؟

$\frac{1}{3}$ (۱) 3 (۲) 1 (۳) 6 (۴)

۱۹- بردار $\vec{c}$ بر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ که با هم زاویه 60° می‌سازند عمود است، اگر $|\vec{a}| = 6$ و $|\vec{b}| = 3$ و $|\vec{c}| = 3$ باشد، حاصل ضرب مختلط $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ کدام است؟

$$27\sqrt{3} (4) \quad 9\sqrt{3} (3) \quad \sqrt{3} (2) \quad 3\sqrt{3} (1)$$

۲۰- به‌ازای کدام مقدار m ضرب درونی دو بردار $\vec{v}_1 = (2, 3, 6)$ و $\vec{v}_2 = (3, m, 6)$ برابر صفر است؟

$$-14 (4) \quad 14 (3) \quad -12 (2) \quad 12 (1)$$

۲۱- اندازه حاصل ضرب بیرونی دو بردار با حاصل ضرب درونی آن‌ها برابر است. زاویه بین این دو بردار چند درجه است؟

$$90^\circ (4) \quad 60^\circ (3) \quad 45^\circ (2) \quad 30^\circ (1)$$

۲۲- معادلات پارامتری خطی که شامل نقطه $(1, -1, 2)$ و موازی با بردار $\vec{v} = -\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$ می‌باشد کدام است؟

$$x = -2 - 2t, y = 1 - t, x = 1 + t (2) \quad x = 2 - 2t, y = -1 + t, x = 1 - t (1)$$

$$x = 2 + 2t, y = -1 + t, x = 1 + t (4) \quad x = 2 + 2t, y = -1 + t, x = 1 - t (3)$$

۲۳- معادله خطی که از دو نقطه $A(2, 2, 2)$ و $B(0, -1, 1)$ می‌گذرد، کدام است؟

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-2}{2} (2) \quad \frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-2}{1} (1)$$

$$\frac{x-2}{-2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-2}{-1} (4) \quad \frac{x+2}{-2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z+2}{-1} (3)$$

۲۴- اگر خط $(x-2)/2 = -y = (z-3)/3$ با صفحه $2ax + 2y - az = 1$ موازی باشد، a برابر است با:

$$\frac{2}{3} (4) \quad -\frac{2}{3} (3) \quad -\frac{2}{3} (2) \quad \frac{3}{2} (1)$$

۲۵- فاصله نقطه $(1, -1, 2)$ از خط $x/2 = (y-6)/2 = z/(x-9)/3$ کدام است؟

$$8 (4) \quad 7 (3) \quad 6 (2) \quad 5 (1)$$

۲۶- معادله خط عمود بر دو محور oy و oz به کدام صورت است؟

$$x = a, z = a (4) \quad y = b, z = a (3) \quad y = z, x = 0 (2) \quad x + y = b, z = a (1)$$

۲۷- تلاقی خط $2x + 2 = y - 2 = (x-4)/2$ با محور oz کدام است؟

$$(0, 0, 2) (1) \quad (0, 0, \frac{1}{2}) (2) \quad (0, 0, -\frac{1}{2}) (3) \quad (0, 0, -2) (4)$$

۲۸- معادله صفحه عمود بر بردار $2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$ و شامل نقطه $(1, 1, 0)$ کدام است؟

$$2x - y + 3z = 1 (2) \quad 2x - y + 3z = -1 (1)$$

$$2x + y - 3z = 1 (4) \quad 2x - y + 3z = 3 (3)$$

۲۹- معادله صفحه‌ای که شامل سه نقطه $(0, 1, -1)$ و $(2, 1, 3)$ و $(-2, 1, 0)$ می‌باشد، کدام است؟

$$y - 1 = 0 (4) \quad x - y = 1 (3) \quad x + y + z = 1 (2) \quad y + 1 = 0 (1)$$

۳۰- زاویه حاده بین دو صفحه به معادلات $2x - y + z = 2$ و $x + y + 2z = 1$ کدام است؟

$$\frac{\pi}{6} (4) \quad \frac{\pi}{3} (3) \quad \frac{\pi}{4} (2) \quad \frac{\pi}{2} (1)$$

۳۱- فاصله دو صفحه $x + y + z = 1$ و $x + y + z = -1$ چه قدر است؟

$$\sqrt{3} (4) \quad 2\sqrt{3} (3) \quad \frac{2\sqrt{3}}{3} (2) \quad \frac{\sqrt{3}}{3} (1)$$

۳۲- معادله صفحه‌ای که از نقطه $A(1, -1, 0)$ گذشته و با صفحه $x - y - z = 0$ موازی است، کدام است؟

$$x + y + z - 2 = 0 \quad (1) \quad x - y - z - 2 = 0 \quad (2)$$

$$x - y = 2 \quad (3) \quad x - y + z - 2 = 0 \quad (4)$$

۳۳- کدام یک از صفحات زیر با محور oy موازی است؟

$$x + y + z = 1 \quad (1) \quad x + 2y = 1 \quad (2) \quad y + 2z = 1 \quad (3) \quad x + y + z = 1 \quad (4)$$

۳۴- اگر دو صفحه به معادلات $(m+2)x + (2-m)y + (1-2m)z - 1 = 0$ و $(m-2)x + (1+m)y + (2-m)z - 1 = 0$ بر هم عمود باشند، کدام است؟

$$2 \leq 1 \quad (1) \quad 2 \leq 0 \quad (2) \quad 1 \leq 0 \quad (3) \quad 2 \leq 1 \quad (4)$$

۳۵- اگر بردارهای (x, y) و (y, x) بستگی خطی داشته باشند، بین x و y کدام رابطه برقرار است؟

$$x^2 + y^2 = 0 \quad (1) \quad x = y \quad (2) \quad x = -y \quad (3) \quad x = \pm y \quad (4)$$

۳۶- a کدام باشد تا بردار $(a, 3, 15)$ را به توان به صورت ترکیب خطی بردارهای $(1, 2, 3)$ و $(3, -1, 2)$ نوشت؟

$$11 \quad (1) \quad 12 \quad (2) \quad 13 \quad (3) \quad 9 \quad (4)$$

۳۷- مجموعه $\{0, v_1, v_2\}$ همواره:

(۱) وابسته خطی است. (۲) به v_1 و v_2 وابسته است. (۳) مستقل خطی است. (۴) به $v_1 + v_2$ وابسته است.

۳۸- برای آنکه بردارهای $(a, 2, a)$ و $(1, a, 1)$ مستقل خطی باشند، باید داشته باشیم:

$$a^2 \neq 2 \quad (1) \quad a^2 \neq 1 \quad (2) \quad a^2 = 2 \quad (3) \quad a^2 = 1 \quad (4)$$

۳۹- اگر بردار $(-1, 0)$ به صورت ترکیب خطی از دو بردار $(1, 5)$ و $(-1, 2)$ نوشته شود، مجموع ضرایب ترکیب خطی کدام است؟

$$\frac{5}{3} \quad (1) \quad -\frac{7}{3} \quad (2) \quad \frac{7}{3} \quad (3) \quad \frac{5}{3} \quad (4)$$

۴۰- بردار $(-4, 6, 2)$ با کدام یک از بردارهای زیر یک مجموعه وابسته خطی تشکیل می‌دهد؟

$$(-4, 6, 0) \quad (1) \quad (6, -9, -3) \quad (2) \quad (1, 0, 1) \quad (3) \quad (8, -12, -2) \quad (4)$$

۴۱- به ازای چه مقدار a ، دو بردار $(1, 0, a)$ و $(a, 0, 1)$ بستگی خطی دارند؟

$$1 \quad (1) \quad 2 \quad (2) \quad 3 \quad (3) \quad \text{هر مقدار } a \quad (4)$$

۴۲- بردار (m, n) با شرط $m \neq n$ ترکیب خطی کدام دو بردار در $\mathbb{R}^2$ می‌تواند باشد؟

$$(2, 0) \quad (1) \quad (0, 5) \quad (2) \quad (3, 0) \quad (3) \quad (4, 4) \quad (4) \quad (1, 1) \quad (4) \quad (0, -1) \quad (4) \quad (0, 1) \quad (4)$$

۴۳- دو بردار $(m+1, 4)$ و $(2, m-1)$ مفروضند، اگر دو بردار در $\mathbb{R}^2$ مستقل خطی باشند، m کدام است؟

$$m = \pm 3 \quad (1) \quad m \neq \pm 3 \quad (2) \quad m = \pm \sqrt{2} \quad (3) \quad m \neq \pm \sqrt{2} \quad (4)$$

۴۴- در $\mathbb{R}^3$ یک مجموعه مستقل خطی است، هرگاه:

(۱) حداقل ۳ عضو داشته باشد. (۲) حداقل ۳ عضو داشته باشد. (۳) حداقل ۲ عضو داشته باشد. (۴) هیچ کدام

۴۵- عضوهای هر زیرمجموعه‌ای از یک فضای برداری که شامل بردار صفر باشد ...

(۱) بستگی خطی دارند. (۲) استقلال خطی دارند. (۳) آن زیرمجموعه مستقل خطی نیست. (۴) هیچ کدام

۴۶- دو بردار (n, b, c) و (a', b', c') مستقل خطی اند، کدام گزاره درست است؟

$$\frac{a}{b} \neq \frac{a'}{b'} \quad (۱) \quad \frac{a}{c} \neq \frac{a'}{c'} \quad (۲) \quad \frac{b}{c} \neq \frac{b'}{c'} \quad (۳) \quad \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}, \frac{b}{c} = \frac{b'}{c'} \quad (۴)$$

۴۷- اگر $(0, 0, 1) = z + (0, 0, 1) + y(-1, 0, 2) + x(1, -1, 2)$ ، آن گاه $x + y + z$ برابر است با:

$$0 \quad (۱) \quad 1 \quad (۲) \quad 2 \quad (۳) \quad 3 \quad (۴)$$

۴۸- در فضای بردار $\mathbb{R}^3$ از دسته بردارهای زیر کدام بستگی خطی دارند؟

$$(1, 2, 3), (2, 3, 2) \quad (۱) \quad (2, 3, 2), (4, 3, 2) \quad (۲) \quad (6, 9), (2, 3, 2) \quad (۳) \quad (5, 4), (9, 6) \quad (۴)$$

۴۹- سه بردار در $\mathbb{R}^3$ بستگی خطی دارند، اگر و تنها اگر...

(۱) هم صفحه باشند. (۲) هم صفحه نباشند. (۳) مخالف صفر باشند. (۴) موارد ۲ یا ۳ صحیح اند.

۵۰- اگر سه بردار (a, b, c) و $(-a, b, c)$ و $(a, -b, c)$ وابسته خطی باشند، کدام گزینه همواره صحیح است؟

$$abc = 0 \quad (۱) \quad bc = 0 \quad (۲) \quad ac = 0 \quad (۳) \quad ab = 0 \quad (۴)$$

۵۱- اگر بردار $\vec{v} = (3, 7)$ را به صورت ترکیب خطی از بردارهای $\vec{i} + \vec{j}$ و $\vec{i} - \vec{j}$ بنویسیم، آن گاه:

$$\vec{v} = 3(\vec{i} + \vec{j}) + 4\vec{j} \quad (۲) \quad \vec{v} = 3(\vec{i} + \vec{j}) + 7\vec{j} \quad (۱)$$

$$\vec{v} = 3(\vec{i} + \vec{j}) + 5\vec{j} \quad (۴) \quad \vec{v} = 4(\vec{i} + \vec{j}) + 3\vec{j} \quad (۳)$$

۵۲- اگر $A \neq 0$ ماتریس متقارن و $B \neq 0$ ماتریس پادمتقارن در فضای بردارهای ماتریسهای $n \times n$ باشد، کدام حکم صحیح است؟

(۱) A و B استقلال خطی دارند. (۲) A و B بستگی خطی دارند.

(۳) $2A$ و $2B$ استقلال خطی دارند. (۴) موارد ۲ و ۳ صحیح اند.

۵۳- بردار $(0, 1, 0)$ با کدام دو بردار مستقل خطی است؟

$$(1, -1, 0) \text{ و } (2, -3, 0) \quad (۱) \quad (0, 1, -1) \text{ و } (0, -1, 2) \quad (۲)$$

$$(0, 1, -1) \text{ و } (2, 1, 0) \quad (۳) \quad (1, 2, 1) \text{ و } (0, 3, 0) \quad (۴)$$

۵۴- اگر سه بردار $(1, -1, 1)$ و $(-1, 0, -2)$ و $(2, a, 3)$ مستقل خطی باشند، a کدام است؟

$$a \neq -2 \quad (۱) \quad a \geq 1 \quad (۲) \quad a \neq -1 \quad (۳) \quad a \geq -2 \quad (۴)$$

۵۵- کدام یک از دو تابع زیر بستگی خطی دارند؟

$$x^2 \text{ و } 1 \quad (۱) \quad \cos x \text{ و } \sin x \quad (۲) \quad \sin x \text{ و } \sin 2x \quad (۳) \quad \sin \cos x \text{ و } \sin 2x \quad (۴)$$

۵۶- خط $x = -y = (z + 1)/2$ از نقطه $x = -y = z = 0$ یا $x + 4y + 3z = 0$ در کدام نقطه قطع می‌کند؟

$$(1, -1, 1) \quad (۱) \quad (-1, 1, 1) \quad (۲) \quad (2, 0, -1) \quad (۳) \quad (1, -1, 0) \quad (۴)$$

۵۷- معادله صفحه گذرنده از نقطه $M(1, 1, 1)$ و عمود بر خط $1 = y = z - 1$ ، $x = 1$ ، کدام است؟

$$x + 2y + z = -2 \quad (۱) \quad 2x + y + 2z = -5 \quad (۲)$$

$$2x + y + 2z = 5 \quad (۳) \quad x + 2y + z = 2 \quad (۴)$$

۵۸- فاصله نقطه $(2, -1, 2)$ از صفحه $x + y = 0$ کدام است؟

$$2 \quad (۱) \quad 2\sqrt{2} \quad (۲) \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (۳) \quad \sqrt{2} \quad (۴)$$

۵۹- اگر $A(2, 4, 6)$ و $B(3, 5, 7)$ ، در این صورت معادله صفحه‌ای که در نقطه A بر خط AB عمود است، کدام است؟

$$x + y + z = 12 \quad (2) \qquad x + y + z = -12 \quad (1)$$

$$x + 2y + z = -6 \quad (4) \qquad x + 2y - z = 6 \quad (3)$$

۶۰- معادله صفحه‌ای که از نقطه $(2, 0, 1)$ می‌گذرد و بر $V = (1, 4, 2)$ عمود است، کدام است؟

$$x + 4y + 2z = 4 \quad (4) \quad x + 2y + 2z = 4 \quad (3) \quad 2x + 2z = -8 \quad (2) \quad x + 4y + 2z = 0 \quad (1)$$

تست‌های آزمون کارشناسی ارشد

«بردار- خط- صفحه»

• تست‌های شماره ۱ الی ۸ آزمون‌های کارشناسی ارشد مجموعه علوم اقتصادی

• تست شماره ۹ آزمون‌های کارشناسی ارشد مجموعه مدیریت

۱- بردار $v = |\vec{a}|\vec{b} + |\vec{b}|\vec{a}$ چه زاویه‌ای با دو بردار دیگری می‌سازد؟

$$(1) \text{ نایمن‌زا است} \quad (2) 60^\circ \text{ و } 30^\circ \quad (3) \text{ موازی است} \quad (4) \text{ هیچ‌کدام}$$

۲- اگر سه بردار $(1, 1, 2)$ و $(\alpha, 2, 1)$ و $(2, 3, 4)$ وابسته خطی باشند، مقدار α کدام است؟

$$(1) 1 \quad (2) 2 \quad (3) \frac{1}{3} \quad (4) \frac{1}{4}$$

۳- معادله صفحه گذرنده از مبدأ مختصات و عمود بر خط $\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{1}$ کدام است؟

$$x + y + 3z = 0 \quad (1) \quad (x-1) + (y-2) + 3(z-1) = 0 \quad (2)$$

$$2x + y + z = 0 \quad (3) \quad 2x + 3y + z = 0 \quad (4)$$

۴- اگر زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و 70° باشد، بردار $v = |\vec{b}|\vec{a} + |\vec{a}|\vec{b}$ با دو بردار a و b چه زاویه‌ای می‌سازد؟

$$(1) 20^\circ \quad (2) 35^\circ \quad (3) 110^\circ \quad (4) \text{ صفر}$$

۵- فاصله نقطه $P(2, 2, -3)$ از صفحه $5x + 11y + 2z - 3 = 0$ کدام است؟

$$(1) 1 \quad (2) \frac{4}{\sqrt{150}} \quad (3) 2 \quad (4) \frac{5}{\sqrt{150}}$$

۶- محل تلاقی خط $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-1}{4}$ با محور z ها کدام است؟

$$(1) (0, 0, 2) \quad (2) (0, 0, \frac{1}{4}) \quad (3) \text{ قطع نمی‌کند} \quad (4) (0, 0, 1)$$

۷- خط $\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-2}{1}$ صفحه افق گذرنده بر مبدأ مختصات را در نقطه‌ای به عرض کدام قطع می‌کند؟

$$(1) -5 \quad (2) -2 \quad (3) 1 \quad (4) 2$$

۸- معادله صفحه گذرنده از نقطه $M(1, 1, 2)$ و عمود بر خط $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{1}$ ، کدام است؟

$$x + y + z = 4 \quad (4) \quad 2x + y + z = 5 \quad (3) \quad x + 3y + z = 6 \quad (2) \quad 2x + 3y + z = 7 \quad (1)$$

۹- سه بردار $\vec{a}(1, 2, 3)$ و $\vec{b}(k, 1, 0)$ ، $\vec{c}(1, 1, 1)$ ، به‌ارای کدام مقدار k مستقل خطی نیستند؟

$$k \neq 1 \quad (1) \quad k = 1 \quad (2) \quad k \neq 2 \quad (3) \quad k = 2 \quad (4)$$

توابع چندمتغیره

۱-۹ توابع چندمتغیره

تعریف: مجموعه تمام n تایی‌های مرتب از اعداد حقیقی را فضای n بعدی اعداد می‌نامند و آن را با R^n نمایش می‌دهیم.

$$R^n = (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, 3, \dots, n$$

تعریف: هر n تایی مرتب $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ را یک نقطه در فضای n بعدی اعداد گویند.

تعریف: یک تابع n متغیره، مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب $((x_1, x_2, \dots, x_n), w)$ است که در آن هیچ دو زوج مرتب متفاوت دارای عنصر اول یکسان نباشند. به بیان دیگر، تابع f که ضابطه یا معادله آن به صورت $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ می‌باشد، یک تابع n متغیره است. $x_n, \dots, x_2, x_1$ را متغیرهای مستقل و z را متغیر تابع گویند (مسئله ۱).

۲-۹ دامنه و برد توابع چندمتغیره

تعریف: بزرگ‌ترین زیرمجموعه که در آن تابع $w = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ تعریف شده باشد را دامنه تابع f و مجموعه تمام مقادیر ممکن w را برد تابع f می‌نامیم. به بیان دیگر، دامنه یک تابع n متغیره مجموعه نقاطی واقع در R^n و برد آن مجموعه‌ای از اعداد حقیقی یا به عبارت دیگر، مجموعه نقاطی در $\mathbb{R}$ است^۱ (مسئله ۲).

تعریف: اگر f یک تابع یک متغیره و g یک تابع n متغیره باشد، آن‌گاه تابع مرکب $f \circ g$ تابعی n متغیره است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(f \circ g)(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(g(x_1, x_2, \dots, x_n))$$

دامنه تعریف $f \circ g$ مجموعه تمام نقاط $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ در دامنه g است که به ازای آن‌ها $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ در دامنه f باشد (مسئله ۳).

۳-۹ حد در توابع چندمتغیره

تعریف: فاصله بین دو نقطه $B(x_1, x_2, \dots, x_n)$ و $A(a_1, a_2, \dots, a_n)$ در R^n را با نماد $\|B - A\|$ نشان داده و آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\|B - A\| = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \dots + (x_n - a_n)^2}$$

تعریف: یک همسایگی از نقطه $A(a_1, a_2)$ به شعاع δ ، مجموعه نقاطی است که در درون دایره‌ای به مرکز A و شعاع δ قرار دارند.

$$N(A) = \{(x, y) | \sqrt{(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2} < \delta\}$$

(۱) دامنه و برد توابع چندمتغیره را مانند توابع یک متغیره می‌توان به دست آورد.

تعریف: فرض می‌کنیم f تابعی n متغیره که در همسایگی $N(A)$ تعریف شده باشد، در این صورت حد f هنگامی که X به سمت A میل می‌کند برابر L است اگر به‌ازای هر $\varepsilon > 0$ ، عددی مانند $\delta > 0$ وجود داشته باشد به‌طوری که داشته باشیم:

$$\|B - A\| < \delta \Rightarrow |f(X) - L| < \varepsilon$$

در این صورت می‌نویسیم (مسئله ۴):

$$\lim_{X \rightarrow A} f(X) = L$$

اگر $\lim_{X \rightarrow A} f(X) = L$ آن‌گاه از هر مسیری که از X به A نزدیک شویم، مقدار $f(X)$ باید به L نزدیک شود، حال اگر از دو مسیر متفاوت به A نزدیک و مقدار حد برابر نشود، می‌توان نتیجه گرفت که حد موجود نیست (مسئله ۵).
تذکره: فرض کنید $f(x, y)$ تابعی دو متغیره باشد، هر یک از حدود زیر را حدهای مکرر می‌نامیم.

$$L_{y_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} (\lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y)) \quad , \quad L_{x_0} = \lim_{y \rightarrow y_0} (\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y))$$

اگر L_{x_0} و L_{y_0} هر دو موجود و $L_{x_0} \neq L_{y_0}$ ، آن‌گاه حد تابع در (x_0, y_0) موجود نیست (مسئله ۶).

۴-۹ پیوستگی در توابع چندمتغیره

فرض می‌کنیم f تابعی n متغیره و $A \in R^n$ باشد، تابع f را در نقطه A پیوسته خوانند اگر و فقط اگر سه شرط زیر برقرار باشد:

- (۱) تابع f در نقطه A تعریف شده باشد، یعنی $f(A)$ وجود داشته باشد.
 - (۲) تابع f در A حد داشته باشد، یعنی $\lim_{X \rightarrow A} f(X)$ وجود داشته باشد.
 - (۳) حد تابع برابر مقدار تابع باشد، یعنی $f(A) = \lim_{X \rightarrow A} f(X)$ باشد.
- اگر تابع f حداقل یکی از سه شرط فوق را نداشته باشد، در نقطه A نپیوسته (گسسته) است.
تعریف فوق برای تابع $z = f(x, y)$ در (x_0, y_0) به صورت زیر است:

- (۱) $f(x_0, y_0)$ وجود داشته باشد.
- (۲) $\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y)$ وجود داشته باشد.
- (۳) $f(x_0, y_0) = \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y)$ باشد (مسئله ۷).

۵-۹ قضایای پیوستگی در توابع چندمتغیره

قضایای پیوستگی در توابع یک متغیره را می‌توان به توابع چندمتغیره تعمیم داد.

- (۱) هر تابع چند جمله‌ای n متغیره در هر نقطه R^n پیوسته است.
- (۲) اگر f و g دو چند جمله‌ای n متغیره باشد، آن‌گاه $f + g$ ، $f - g$ ، $f \cdot g$ ، f/g پیوسته‌اند. (برای f/g به شرط آنکه $A \in R^n$ ، $g(A) \neq 0$).
- (۳) g تابعی n متغیره و در $A \in R^n$ پیوسته و f تابعی یک متغیره و در $g(A)$ پیوسته باشد، آن‌گاه $f \circ g$ در A پیوسته است (مسئله ۸).

۶-۹ مشتقات جزئی (نسبی)

تابع z به معادله $z = f(x, y)$ را در نظر می‌گیریم، اگر y ثابت نگه داشته شود، z تنها تابعی از x خواهد بود و مشتق آن نسبت به متغیره x عبارت است از:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

در صورت وجود حد، مشتق حاصل، مشتق جزئی z نسبت به x است. به طور مشابه اگر x ثابت نگه داشته شود، z تنها تابعی از y خواهد بود و مشتق آن نسبت به متغیر y عبارت است از:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

در صورت وجود حد، مشتق حاصل، مشتق جزئی z نسبت به y است.
در حالت کلی این تابع دومتغیره دارای دو مشتق جزئی مرتبه اول است که به صورت های زیر نشان می دهند:

$$\frac{\partial z}{\partial x}, z_x, f'_x, f_x(x, y)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}, z_y, f'_y, f_y(x, y)$$

تعریف فوق قابل تعمیم می باشد، یعنی مشتقات جزئی مرتبه اول تابع n متغیره که ضابطه آن به صورت $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(X)$ است، به قرار زیر است (مسائل ۹ و ۱۰):

$$\frac{\partial z}{\partial X} = \left(\frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial z}{\partial x_n} \right)$$

۷-۹ مشتقات جزئی مراتب بالاتر

مشتقات جزئی مرتبه دوم تابع $z = f(x, y)$ مشتقات جزئی مرتبه اول آن هستند و به صورت زیر بیان می شوند:

$$\frac{\partial z}{\partial x} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z_{xx} = f_{xx} \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z_{xy} = f_{xy} \end{cases}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z_{yy} = f_{yy} \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = z_{yx} = f_{yx} \end{cases}$$

و به طور مشابه، مشتقات مرتبه سوم و بالاتر تعریف می شود (مسألة ۱۱).

۸-۹ دیفرانسیل کامل

تابع دومتغیره $z = f(x, y)$ را در ناحیه مورد نظر پیوسته فرض می کنیم، به x و y هم زمان نمو می دهیم، برای z نمو به دست می آید که آن را نمو کامل گویند و برابر است با:

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

دیفرانسیل تابع z را به صورت زیر خواهیم داشت (مسائل ۱۲ و ۱۳ و ۱۴).

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

در حالت کلی، دیفرانسیل کمین تابع $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ برابر مجموع تمام دیفرانسیل های جزئی است، یعنی:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial z}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial z}{\partial x_n} dx_n$$

هر یک از جملات $\frac{\partial z}{\partial x_n} dx_n, \dots, \frac{\partial z}{\partial x_1} dx_1$ را دیفرانسیل های جزئی، به ترتیب نسبت به $x_n, \dots, x_1$ می نامند.

اگر x تابعی قابل دیفرانسیل‌گیری از متغیر دیگری مانند t باشد، در این صورت داریم:

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial t} dt$$

اگر x ها تابعی قابل دیفرانسیل‌گیری از دو متغیر مانند t و r باشد، در این صورت داریم (مسئله ۵):

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial t} dt + \frac{\partial x_i}{\partial r} dr$$

۹-۹ دیفرانسیل مراتب بالاتر

دیفرانسیل مرتبه اول تابع $z = f(x, y)$ به صورت زیر است:

$$dz = z_x dx + z_y dy$$

از رابطه فوق با توجه به اینکه dx و dy نمونابندی هستند، دیفرانسیل می‌گیریم:

$$d(dz) = d^2 z = z_{xx} dx^2 + 2z_{xy} dx dy + z_{yy} dy^2$$

رابطه فوق را می‌توان به صورت ماتریسی نوشت:

$$[d^2 z] = [dx \ dy] \begin{bmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ z_{yx} & z_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix}$$

و برای تابع $z = f(x, y, t)$ خواهیم داشت:

$$[d^2 z] = [dx \ dy \ dt] \begin{bmatrix} z_{xx} & z_{xy} & z_{xt} \\ z_{yx} & z_{yy} & z_{yt} \\ z_{tx} & z_{ty} & z_{tt} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dt \end{bmatrix}$$

ماتریس‌های فوق را ماتریس هشین نامند و با H نشان داده می‌شود.

به طور کلی، دیفرانسیل مرتبه n ام تابع $z = f(x, y)$ به صورت زیر است:

$$d^n z = (z_x dx + z_y dy)^n$$

در رابطه فوق توان n برای z_x و z_y به مفهوم مشتقات جزئی بوده و برای dx و dy به مفهوم توان جبری است (مسئله ۱۶).

۱۰-۹ مشتق کامل

اگر $w = f(x, y, z)$ و x و y و z تابعی قابل دیفرانسیل‌گیری نسبت به t باشند، dw/dt مشتق کامل تابع w نسبت به t است، در این صورت (مسئله ۱۷):

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt}$$

به طور مشابه اگر $w = f(x, y, z)$ و x و y و z تابعی قابل دیفرانسیل‌گیری نسبت به r و t باشند، $\partial w/\partial t$ و $\partial w/\partial r$ به صورت زیر بدست می‌آید (مسئله ۱۸):

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial r} &= \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial w}{\partial t} &= \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial t} \end{aligned}$$

در حالت کلی اگر w تابعی قبل دیفرانسیل‌گیری نسبت به x_1 و x_2 و ... و x_n باشد، و اگر x توابعی قابل دیفرانسیل‌گیری نسبت به متغیرهای u_1 و u_2 و ... و u_n باشند، در این صورت مشتق تابع مرکب w نسبت به متغیرهای u_i به صورت زیر است:

$$\frac{\partial w}{\partial u_i} = \frac{\partial w}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial u_i} + \frac{\partial w}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial u_i} + \cdots + \frac{\partial w}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial x_n}{\partial u_i}$$

۱۱-۹ مشتق تابع ضمنی

تابع ضمنی $F(x, y, z) = 0$ مفروض است که $z = f(x, y)$ در آن صدق می‌نماید، این تابع دارای دو مشتق ضمنی به صورت زیر است (مسئله ۱۹):

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}, \quad \frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$$

و به طور کلی، اگر z به صورت تابع ضمنی، از x_1 و x_2 و ... و x_n به وسیله معادله $F(x_1, x_2, \dots, x_n, z) = 0$ تعریف شود، خواهیم داشت:

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}}{\frac{\partial F}{\partial z}}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad \frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$$

۱۲-۹ توابع همگن و قضیه اولر

اگر تابع $z = f(x, y, t)$ دارای این خاصیت باشد که به ازای هر مقدار ثابت λ داشته باشیم:

$$f(\lambda x, \lambda y, \lambda t) = \lambda^n f(x, y, t)$$

در این صورت تابع z را یک تابع همگن یا متجانس خوانند. n را درجه همگنی یا متجانس تابع f نامند (مسئله ۲۰).
قضیه اولر: اگر $z = f(x, y, t)$ همگن مثبت از درجه n و مشتقات جزئی مرتبه اول آن نیز وجود داشته باشد، می‌توان نوشت که (مسئله ۲۱):

$$\frac{\partial z}{\partial x} \cdot x + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot y + \frac{\partial z}{\partial t} \cdot t = n f(x, y, t) = n z$$

۱۳-۹ ماکزیمم و می‌نیمم توابع چندمتغیره

تابع f به معادله $z = f(x, y)$ مفروض است که در آن $D_f \subset R^2$ می‌باشد. این تابع را در نقطه $(x_0, y_0) \in D_f$:

(۱) ماکزیمم مطلق گویند، اگر $\forall (x, y) \in D_f, (x, y) \neq (x_0, y_0) \Rightarrow f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$

(۲) می‌نیمم مطلق گویند، اگر $\forall (x, y) \in D_f, (x, y) \neq (x_0, y_0) \Rightarrow f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$

تابع f به معادله $z = f(x, y)$ را در نقطه (x_0, y_0) و نقاط مجاور در آن پیوسته فرض می‌کنیم، این تابع را به ازای جمیع مقادیر Δx و Δy :

(۱) ماکزیمم نسبی گویند، اگر $f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) < 0$

(۲) می‌نیمم نسبی گویند، اگر $f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) > 0$

۱۴-۹ نقطه بحرانی

تابع $z = f(x, y)$ را در نظر می‌گیریم، شرط لازم برای یک نقطه بحرانی این است که مشتقات جزئی مرتبه اول این تابع را صفر کند، یعنی (مسئله ۲۲):

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = z_x = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = z_y = 0 \end{cases}$$

از حل دستگاه فوق ممکن است مختصات نقاطی مانند (x_0, y_0) به دست می‌آید که در تابع قرار داده و مقدار z متناظر به دست می‌آید. مثلاً نقطه (x_0, y_0, z_0) معین گردد، این نقطه، نقطه بحرانی است. در حالت کلی، اگر $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ باشد، شرط لازم برای وجود نقطه بحرانی آن است که داشته باشیم:

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x_1} = z_{x_1} = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial x_2} = z_{x_2} = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial z}{\partial x_n} = z_{x_n} = 0 \end{cases}$$

۱۵-۹ نقطه زینی

در صورتی که (x_0, y_0, z_0) نقطه بحرانی تابع f به معادله $z = f(x, y)$ باشد، عبارت زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$\Delta = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

اگر به ازای جمیع مقادیر Δx و Δy حول صفر، علامت Δ گاهی مثبت و گاهی منفی باشد، نقطه (x_0, y_0, z_0) را نقطه زینی نامند. به بیان دیگر، نقطه بحرانی را که منجر به مقادیر اکسترمم نسبی نمی‌شوند، نقاط زینی می‌نامیم.

۱۶-۹ نحوه تعیین نقاط اکسترمم و زینی

اگر تابع $z = f(x, y)$ در (x_0, y_0) و همسایگی آن معین و پیوسته بوده و در (x_0, y_0) ماکزیمم و می‌نیمم نسبی بوده و در این نقطه $f_x(x_0, y_0)$ و $f_y(x_0, y_0)$ وجود داشته باشد، در این صورت این مشتقات جزئی در این نقطه برابر صفر است، یعنی:

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = z_x = f_x(x_0, y_0) = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = z_y = f_y(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$$

قضیه فوق شرط لازم ماکزیمم یا می‌نیمم بوده و برعکس آن برقرار نیست. شرط کافی را به صورت‌های مختلف بیان می‌کنند. در زیر به سه صورت آن خواهیم پرداخت.

۱-۱۶-۹ آزمون مشتق دوم

فرض می‌کنیم $z = f(x, y)$ تابع دومتغیره بوده، به طوری که این تابع در $M(a, b, f(a, b))$ بحرانی باشد، در این صورت (مسئله ۲۳):

(۱) اگر $(d^2 z)_M < 0$ ، آن‌گاه نقطه M ماکزیمم است.

(۲) اگر $(d^2 z)_M > 0$ ، آن‌گاه نقطه M می‌نیمم است.

(۳) اگر $(d^2 z)_M \leq 0$ ، آن‌گاه نقطه M زینی است.

(۴) اگر $(d^2 z)_M = 0$ ، آن‌گاه برای تعیین نوع نقطه باید از تعریف استفاده کرد.

شرایط فوق برای تابع n متغیره قابل تعمیم است.

۹-۱۶-۲ آزمون Δ_M

فرض کنید $M(x_0, y_0)$ یک نقطه بحرانی تابع $z = f(x, y)$ بوده و تمام مشتقات جزئی مرتبه اول و دوم f در یک همسنگی از $M(x_0, y_0)$ باشند، عبارت زیر را تشکیل می‌دهیم (مسئله ۲۳):

$$\Delta_M = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$$

(۱) اگر $\Delta_M > 0$ و $(f_{xx})_M < 0$ ، آنگاه نقطه M ماکزیمم است.

(۲) اگر $\Delta_M > 0$ و $(f_{xx})_M > 0$ ، آنگاه نقطه M می‌نیمم است.

(۳) اگر $\Delta_M < 0$ ، آنگاه نقطه M زینی است.

(۴) اگر $\Delta_M = 0$ ، از این روش نتیجه‌ای به دست نمی‌آید.

شرایط فوق تنها برای توابع دومتغیره برقرار است.

۹-۱۶-۳ دترمینان‌های هشین

اگر دترمینان‌های هشین z^T را در نظر بگیریم:

$$H_M = \begin{bmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ z_{yx} & z_{yy} \end{bmatrix}$$

مینورهای اصلی آن عبارتند از:

$$|H_1| = z_{xx}, |H_2| = \begin{vmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ z_{yx} & z_{yy} \end{vmatrix}$$

(۱) اگر $|H_1| < 0$ و $|H_2| > 0$ ، آنگاه نقطه M ماکزیمم است.

(۲) اگر $|H_1| > 0$ و $|H_2| > 0$ ، آنگاه نقطه M می‌نیمم است.

(۳) اگر علامت‌ها غیر از صورت‌های فوق باشند، آنگاه نقطه M زینی است (مسئله ۲۳).

شرایط فوق برای تابع $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ قابل تعمیم است.

(۱) اگر $|H_1| < 0$ و $|H_2| > 0, \dots, |H_n| \leq 0$ ، آنگاه نقطه M ماکزیمم است.

(۲) اگر $|H_1| > 0$ و $|H_2| > 0, \dots, |H_n| > 0$ ، آنگاه نقطه M می‌نیمم است.

(۳) اگر علامت‌ها غیر از صورت‌های فوق باشند، آنگاه نقطه M زینی است.

در حالت (۱) علامت‌ها متناوباً منفی و مثبت است اگر n زوج باشد، و اگر n فرد باشد $|H_n| < 0$ است.

۹-۱۷ ماکزیمم و می‌نیمم توابع مقید

تابع $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ و قید $g(x_1, x_2, \dots, x_n) = c$ را در نظر می‌گیریم، می‌خواهیم ماکزیمم و یا می‌نیمم این تابع را با توجه به قید آن پیدا کنیم. ابتدا تابع لاگرانژ را تشکیل می‌دهیم:

$$L = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \lambda[c - g(x_1, x_2, \dots, x_n)]$$

سپس مشتق مرتبه اول L را نسبت به تمام متغیرها و λ به دست می‌آوریم و مساوی صفر قرار داده (شرط لازم):

$$\begin{cases} L_{x_1} = f_{x_1} - \lambda g_{x_1} = 0 \\ L_{x_2} = f_{x_2} - \lambda g_{x_2} = 0 \\ \vdots \\ L_{\lambda} = c - g(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

از حل دستگاه معادلات فوق مقادیر x_1 و x_2 و ... و x_n و λ به دست می آید. در نتیجه نقطه بحرانی تابع مشخص می شود. برای تعیین نوع نقطه بحرانی ماتریس مرزی هشین را تشکیل می دهیم (شرط کافی):

$$H = \begin{bmatrix} 0 & g_{x_1} & g_{x_2} & \cdots & g_{x_n} \\ g_{x_1} & L_{x_1 x_1} & L_{x_1 x_2} & \cdots & L_{x_1 x_n} \\ g_{x_2} & L_{x_2 x_1} & L_{x_2 x_2} & \cdots & L_{x_2 x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{x_n} & L_{x_n x_1} & L_{x_n x_2} & \cdots & L_{x_n x_n} \end{bmatrix}$$

در این ماتریس $|H_1| = \begin{vmatrix} 0 & g_{x_1} \\ g_{x_1} & L_{x_1 x_1} \end{vmatrix}$ و $|H_2|$ برای دترمینان درجه ۳ و $|H_3|$ برای ... می باشد.

(۱) اگر $|H_1| < 0$ و $|H_2| < 0$ و $|H_3| < 0$ و ... و $|H_n| < 0$ آن گاه نقطه می نیم است.

(۲) اگر $|H_1| < 0$ و $|H_2| > 0$ و $|H_3| < 0$ و $|H_4| > 0$ و ... و $|H_n| > 0$ آن گاه نقطه ماکزیم است (مسألة ۲۴).

مسائل نمونه فصل ۹

۱. تابع f به صورت $f(x, y) = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$ تعریف شده است، مطلوب است $f(2, -2)$.

۲. دامنه و برد تابع $f = \{(x, y, z) | z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}, x, y \in \mathbb{R}\}$ را بیابید.

۳. فرض کنید $f(t) = \sqrt{t}$ و $g(x, y) = x + y$ تابع $f \circ g$ و دامنه تعریف آن را بیابید.

۴. حاصل $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} e^{1/x} \cdot e^{1/(x-y)}$ را بیابید.

۵. حد تابع $f(x, y) = (y^2 - x^2)/(y^2 + x^2)$ را در $(0, 0)$ بررسی کنید.

۶. مقدار حد $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} xy/\sqrt{x^2 + y^2}$ را بیابید.

۷. پیوستگی تابع $f = \begin{cases} (y^2 - x^2)/(y^2 + x^2) & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ را بررسی کنید.

۸. تابع $z = 3x - y + 8$ در چه ناحیه ای پیوسته است.

۹. اگر $z = e^{x^2} - 3x^2 - x_1 x_2 x_3$ باشد، مشتقات جزئی مرتبه اول آن را بنویسید.

۱۰. اگر $f(x, y) = x^2 y - 2xy^2$ باشد، $f_x(1, 2)$ را بیابید.

۱۱. اگر $z = xy^2 - \ln xy^2$ باشد، z_{xy} را به ازای $x = y = 1$ بیابید.

(۱۲-۱۴) دیفرانسیل کامل توابع زیر را بیابید:

$$(۱۲) z = e^{xy} - 2xy + x \quad (۱۳) z = \sin(x + y) \quad (۱۴) z = (x - y)/(x + y)$$

۱۵. دیفرانسیل کامل تابع $z = x^2 + y^2$ که در آن $x = r \cos t$ و $y = r \sin t$ است، بیابید.

۱۶. تابع $z = xy + x^2 + y^2$ مفروض است، اولاً دیفرانسیل مراتب اول و دوم و سوم z را به دست آورید. ثانیاً دیفرانسیل مرتبه دوم را به صورت ماتریسی نشان دهید.

۱۷. اگر $x = 1/2e^t$ و $y = t^2$ و $w = xy^2 + 2y$ باشد، dw/dt را بیابید.

۱۸. اگر $x = r/t$ ، $y = t^2 - r$ و $z = \ln(xy - z^2)$ باشد، $\partial w/\partial r$ را بیابید.

۱۹. اگر $xy + ze^x + e^y = 0$ باشد، $\partial z/\partial x$ و $\partial z/\partial y$ را بیابید.

(۱) $|H_1|$ همیشه کوچکتر از صفر است، و نیازی به محاسبه آن نیست.

۲۰. درجه همگنی تابع $z = xy + yt + xt$ را بیابید.

۲۱. اگر $z = x^2 y^2 / (x + y)$ باشد، z_x, z_y را بیابید.

۲۲. نقاط بحرانی تابع $z = 7x^2 + y^2 - 5xy - 3x + 6y - 2$ را بیابید.

۲۳. نقاط بحرانی تابع $z = 2x^2 - x^2 + 3y^2 + 4y$ را تعیین نموده و نوع آن را مشخص کنید.

۲۴. نقطه ماکزیمم یا می‌نیمم تابع $z = xy$ نسبت به $x + y = 1$ را بیابید.

پاسخ مسائل نمونه فصل ۹

۱.

$$f(2, -2) = \sqrt{16 - (2)^2 - (-2)^2} = \sqrt{16 - 8} = 2\sqrt{2}$$

۲. $25 - x^2 - y^2 \geq 0$ یا $x^2 + y^2 \leq 25$ بنابراین $D_f = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 25, x, y \in \mathbb{R}\}$ برد این تابع را با توجه به اینکه ماکزیمم مقدار زیر رادیکال ۲۵ و حداقل آن صفر است، تعیین می‌کنیم:

$$R_f = \{z | 0 \leq z \leq 5, z \in \mathbb{R}\} = [0, 5]$$

۳.

$$f \circ g = f(g(x, y)) = f(x + y) = \sqrt{x + y}$$

دامنه g مجموعه تمام نقاط R^2 ، و دامنه f فاصله $[0, +\infty)$ است، یعنی:

$$D_{f \circ g} = \{(x, y) | x + y \geq 0\}$$

۴.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (-1,-1)} e^{\ln x} \cdot e^{\ln(-y)} = e^{\ln(-1)} \cdot e^{\ln 1} = e^i \cdot e^0 = 1$$

۵. اگر در امتداد هر خط $y = mx$ که از $(0, 0)$ می‌گذرد، به $(0, 0)$ نزدیک شویم، در صورت وجود حد می‌بایست به عدد منحصر به فردی برسیم، اگر به جای y مقدار mx قرار دهیم، داریم:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^2 - x^2}{y^2 + x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(m^2 - 1)}{x^2(m^2 + 1)} = \frac{m^2 - 1}{m^2 + 1}$$

که به ازای $m = 0$ مقدار حد برابر ۱- و مثلاً به ازای $m = 1$ مقدار آن برابر صفر است، لذا تابع در نقطه $(0, 0)$ حد ندارد.

۶. ابتدا مسیرهای $y = mx$ را حساب می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx^2}{x\sqrt{1+m^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx}{\sqrt{1+m^2}} = 0$$

حال L_{12} و L_{21} را حساب می‌کنیم.

$$L_{12} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) = 0, L_{21} = \lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) = 0$$

بنابراین اگر این تابع حد داشته باشد، باید حد آن برابر صفر باشد، که با استفاده از تعریف می‌توان ثابت کرد حد تابع برابر صفر است.

۷. (۱) حد تابع در $(0, 0)$ تعریف شده است.

(۲) در مسئله ۵ ثابت شد که تابع در $(0, 0)$ حد ندارد. بنابراین تابع f پیوسته نیست.

۸. تابع z در جمیع نقاط ناحیه R^+ پیوسته است.

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = e^{x_1} - x_1 x_2, \frac{\partial z}{\partial x_2} = -e^{x_1} - x_1 x_2, \frac{\partial z}{\partial x_3} = -x_1 x_2$$

$$f_x(x, y) = yxy - y^2y \Rightarrow f_x(x, y) = y \times x \times y - y \times y = 0$$

$$z_x = \frac{\partial z}{\partial x} = y^2 - \frac{1}{x} \Rightarrow z_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2y \xrightarrow{x=y=1} z_{xy} = 2$$

$$dz = (ye^{xy} - y^2y + 1)dx + (xe^{xy} - y^2x)dy$$

$$dz = \cos(x+y)dx + \cos(x+y)dy \Rightarrow dz = \cos(x+y)(dx+dy)$$

$$dz = \frac{y}{(x+y)^2}dx + \frac{-yx}{(x+y)^2}dy \Rightarrow dz = \frac{y(ydx - xdy)}{(x+y)^2}$$

$$dz = yx dx + y^2 dy$$

$$dx = \cos t dr - r \sin t dt, dy = \sin t dr + r \cos t dt$$

$$dz = yx(\cos t dr - r \sin t dt) + y^2(\sin t dr + r \cos t dt)$$

$$dz = z_x dx + z_y dy = (y + y^2x^2)dx + (x + y^2y^2)dy$$

$$d^2z = z_{xx}dx^2 + 2z_{xy}dxdy + z_{yy}dy^2 = 2yx^2dx^2 + 2ydydy^2$$

$$d^2z = z_{xx}dx^2 + 2z_{xy}dxdy + z_{yy}dy^2 = 2yx^2dx^2 + 2ydydy^2 = 2yx^2dx^2 + 2ydy^2$$

$$d^2z = [dx \ dy] \begin{bmatrix} 2yx^2 & 1 \\ 1 & 2y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix}$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} = y^2 \cdot \frac{1}{y} e^t + (yxy + y^2)(y^2t)$$

$$\frac{dw}{dt} = (t^2)^2 \left(\frac{1}{y} e^t \right) + \left[y \left(\frac{1}{y} e^t \right) (t^2) + y^2 \right] (y^2t) = \frac{1}{y} t^2 e^t + y t^2 e^t + y^2 t$$

$$w = \left(\frac{1}{y} e^t \right) (t^2) + y t^2 \Rightarrow \frac{dw}{dt} = \frac{1}{y} t^2 e^t + y t^2 e^t + y^2 t$$

۱۸

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial r} &= \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial r} = \frac{y}{xy-z^2} \cdot \frac{1}{t} + \frac{x}{xy-z^2} \cdot (-1) + \left(\frac{-2z}{xy-z^2} \right) \cdot t \\ \frac{\partial w}{\partial r} &= \frac{t^2-r}{\left(\frac{r}{t}\right)(t^2-r)-r^2t^2} \cdot \frac{1}{t} + \frac{\frac{r}{t}}{\left(\frac{r}{t}\right)(t^2-r)-r^2t^2} \cdot (-1) + \frac{-2rt}{\left(\frac{r}{t}\right)(t^2-r)-r^2t^2} \cdot t \\ &= \frac{2rt^2+2r-t^2}{r^2}\end{aligned}$$

۱۹

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y+ze^x}{e^x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x+e^y}{e^x}$$

۲۰. تابع همگن از درجه ۲ می باشد.

$$f(\lambda x, \lambda y, \lambda t) = \lambda x \cdot \lambda y + \lambda y \cdot \lambda t + \lambda x \cdot \lambda t = \lambda^2 xy + \lambda^2 yt + \lambda^2 xt = \lambda^2 (xy + yt + xt) = \lambda^2 f(x, y, t)$$

۲۱. ابتدا مقدار n را تعیین می کنیم:

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda^2 x^2 \cdot \lambda^2 y^2}{\lambda x + \lambda y} = \frac{\lambda^4 x^2 y^2}{\lambda(x+y)} = \lambda^3 f(x, y) \longrightarrow n = 3$$

بنا به قضیه اولی:

$$x \cdot z_x + y \cdot z_y = nz = 3z = 3 \left(\frac{x^2 y^2}{x+y} \right)$$

۲۲

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 14x - 5y - 3 = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 2y - 5x + 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 14x - 5y = 3 \\ -5x + 2y = -6 \end{cases} \Rightarrow x = -8, y = -23$$

با جایگذاری مقادیر x و y در z خواهیم داشت $(-8, -23, -59)$.

۲۳. شرط لازم:

$$\begin{cases} z_x = 6x - 3x^2 \\ z_y = 6y + 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x - 3x^2 = 0 & \Rightarrow x = 0, x = 2 \\ 6y + 4 = 0 & \Rightarrow y = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

نقاط بحرانی تابع عبارتند از $(2, -2/3, 8/3)$ و $(0, -2/3, -4/3)$.

(۱) آزمون مشتق دوم (شرط کافی):

$$dz = (6x - 3x^2)dx + (6y + 4)dy \Rightarrow d^2z = (6 - 6x)dx^2 + 3dy^2$$

$$(d^2z)_{(0, -2/3)} = 6dx^2 + 3dy^2 > 0 \Rightarrow \min \left(0, -\frac{2}{3}, -\frac{4}{3} \right)$$

$$(d^2z)_{(2, -2/3)} = -6dx^2 + 3dy^2 \leq 0 \Rightarrow \max \left(2, -\frac{2}{3}, \frac{8}{3} \right)$$

(۲) آزمون Δ_M (شرط کافی):

$$z_x = 6x - 2x^2 \Rightarrow z_{xx} = 6 - 4x, z_{xy} = 0, z_y = 6y + 2 \Rightarrow z_{yy} = 6$$

$$\Delta M = z_{xx} \cdot z_{yy} - (z_{xy})^2 = (6 - 4x)6 - 0 = 36 - 24x$$

$$\Delta\left(0, -\frac{2}{3}\right) = 36 > 0, (z_{xx})\left(0, -\frac{2}{3}\right) = 6 > 0 \Rightarrow \min\left(0, -\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}\right)$$

$$\Delta\left(2, -\frac{2}{3}\right) = -108 < 0 \Rightarrow \text{زینی} \left(2, -\frac{2}{3}, \frac{8}{3}\right)$$

(۳) دترمینان هسین (شرط کافی):

$$|H_1| = z_{xx} = 6 - 4x, |H_2| = \begin{vmatrix} 6 - 4x & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = 36 - 24x$$

$$\left(0, -\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}\right) \Rightarrow |H_1| = 6 > 0, |H_2| = 36 > 0 \Rightarrow \min\left(0, -\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}\right)$$

$$\left(2, -\frac{2}{3}, \frac{8}{3}\right) \Rightarrow |H_1| = -6 < 0, |H_2| = -108 < 0 \Rightarrow \text{زینی} \left(2, -\frac{2}{3}, \frac{8}{3}\right)$$

.۲۲

$$L = xy + \lambda(10 - x - y)$$

$$\left. \begin{aligned} L_x = y - \lambda = 0 &\Rightarrow \lambda = x \\ L_y = x - \lambda = 0 &\Rightarrow \lambda = y \end{aligned} \right\} \Rightarrow x = y$$

$$L_\lambda = 10 - x - y = 0$$

$x = y$ را در L_λ جاگذاری می‌کنیم $10 - x - x = 0$ یا $2x = 10$ و در نتیجه $x = 5$ و $y = 5$ و $z = 25$.

$$|H_1| < 0, |H_2| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 > 0 \Rightarrow \text{نقطه ماکزیمم است } (5, 5, 25)$$

یا:

$$x + y = 10 \Rightarrow y = 10 - x \Rightarrow z = x(10 - x) = 10x - x^2$$

$$z_x = 10 - 2x = 0 \Rightarrow x = 5, 5 + y = 10 \Rightarrow y = 5$$

$$z = 5 \times 5 = 25 \Rightarrow \text{نقطه بحرانی } (5, 5, 25)$$

برای تعیین نوع نقطه $(5, 5, 25)$ ، z_x را تعیین علامت می‌کنیم:

x	$-\infty$	5	$+\infty$
z_x		$+$	$-$
		$\max$	

$$f(x, y) = xy, g(x, y) = 1^0 - x - y$$

$$\frac{f_x}{g_x} = \frac{f_y}{g_y} \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{-1}{-1} \Rightarrow y = x$$

$$1^0 - x - x = 0 \Rightarrow 2x = 1^0 \Rightarrow x = 0.5, y = 0.5 \Rightarrow (0.5, 0.5, 2.5)$$

$$|H_f| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 > 0 \Rightarrow \text{نقطه } (0.5, 0.5, 2.5) \text{ ماکزیمم است}$$

سؤالات تستی فصل ۹

۱- اگر $f(x, y) = e^x / e^y (x^2 + y^2)$ ، آنگاه $f(-1, -2)$ کدام است؟

$$\frac{1}{5} e^{-1} \quad (1) \quad 5e^{-1} \quad (2) \quad 5e \quad (3) \quad \frac{1}{5} e^{-1} \quad (4)$$

۲- اگر $f(x, y) = \sin\left(\frac{1}{x+y}\right) e^{x+y}$ ، آنگاه $f(0, 2/\pi)$ کدام است؟

$$e^{2/\pi} \quad (1) \quad -e^{2/\pi} \quad (2) \quad \frac{\pi}{2} e^{2/\pi} \quad (3) \quad 1 \quad (4)$$

۳- فرض کنید $f(x, y) = x^2 + y^2$ ، اگر قلمرو (دامنه تعریف) $\{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ باشد، کدام یک از نگاره‌های زیر بی‌معنی است؟

$$f\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) \quad (1) \quad f\left(\frac{3}{2}, 0\right) \quad (2) \quad f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad (3) \quad f\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) \quad (4)$$

۴- فرض کنید $f(t) = (e^t + e^{-t})/2$ و $g(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 / x_3$ ، مقدار $(f \circ g)(0, 0, 1)$ کدام است؟

$$1 \quad (1) \quad \frac{1}{2} e \quad (2) \quad e \quad (3) \quad \text{صفر} \quad (4)$$

۵- دامنه تعریف تابع $f(x, y) = (x^2 + 2)(y^2 - 1) / \sin(xy)$ کدام است؟

$$\{(x, y) | xy \neq n\pi, n \in \mathbb{Z}\} \quad (1) \quad \{(x, y) | xy \neq n\pi, n \in \mathbb{Z}\} \quad (2) \quad \{(x, y) | xy \neq n\pi, n \in \mathbb{Z}\} \quad (3) \quad \{(x, y) | xy \neq n\pi, n \in \mathbb{Z}\} \quad (4)$$

۶- حوزه مقادیر تابع $z = \sqrt{x+y}$ کدام است؟

$$R_z = \{0\} \cup \mathbb{R}^+ \quad (1) \quad R_z = \mathbb{R} \quad (2) \quad R_z = \mathbb{R}^+ \quad (3) \quad R_z = \{0\} \cup \mathbb{R}^+ \quad (4)$$

۷- حوزه مقادیر تابع $z = \sqrt{1^0 - 4x^2 - 25y^2}$ کدام است؟

$$\{z | 0 \leq z \leq 1^0\} \quad (1) \quad \{z | z \geq 0\} \quad (2) \quad \{z | z \geq 1^0\} \quad (3) \quad \{z | 0 \leq z \leq 1^0\} \quad (4)$$

۸- دامنه تعریف تابع $f(x, y) = e^{1/x+y}$ کدام است؟

$$\{x \neq y\} \quad (1) \quad \text{همه نقاط صفحه به جز آنهایی که روی خط } y = x \text{ است.} \quad (2) \quad \text{همه نقاط صفحه به جز آنهایی که روی خط } y = -x \text{ است.} \quad (3) \quad \text{همه نقاط صفحه به جز آنهایی که روی خط } y = x \text{ است.} \quad (4)$$

۹- برد تابع $u = (x+y)\sqrt{z-2}$ کدام است؟

$$\mathbb{R} \quad (1) \quad \mathbb{R}^+ \quad (2) \quad \{u | u \geq 2\} \quad (3) \quad \mathbb{R} - \{2\} \quad (4)$$

۱۰- دامنه تعریف تابع $f(x, y) = \begin{cases} 1 & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$ کدام است؟

$$\mathbb{R} \quad (1) \quad \mathbb{R}^2 \quad (2) \quad \{0, 1\} \quad (3) \quad \text{هیچ کدام} \quad (4)$$

۱۱- دامنه و برد تابع $z = \sin\left(\frac{1}{x+y}\right)$ کدام است؟

(۱) $R_z = \{z | -1 \leq z \leq 1\}, D_z = \{(x, y) | x \neq -y\}$

(۲) $R_z = \{z | -1 \leq z \leq 1\}, D_z = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}\}$

(۳) $R_z = \{z | -\infty < z < +\infty\}, D_z = \{(x, y) | x \neq -y\}$

(۴) $R_z = \{z | -1 \leq z \leq 1\}, D_f = \{(x, y) | x = -y\}$

۱۲- کدام یک از گزاره‌های زیر صحیح است؟

(۱) دامنه تعریف تابع $f(x, y) = \ln xy$ عبارت از $\{(x, y) | xy \geq 0\}$ است.

(۲) دامنه تعریف تابع $f(x, y) = \sqrt{-x^2 - y^2}$ عبارت از $\{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}\}$ است.

(۳) برد تابع $f(x, y) = 25 - x^2 - y^2$ عبارت از $\{z | z \geq 25\}$ است.

(۴) موارد ۱ و ۲ صحیح‌اند.

۱۳- دامنه تعریف تابع حقیقی f از دو متغیر (x, y) به معادله $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 64}/y$ کدام است؟

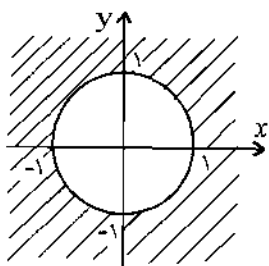
(۱) خارج دایره و محیط دایره $x^2 + y^2 = 64$ است.

(۲) داخل دایره و محیط دایره $x^2 + y^2 = 64$ است.

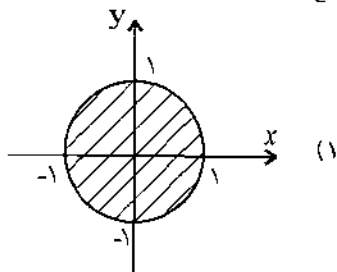
(۳) خارج دایره و محیط دایره $x^2 + y^2 = 64$ به جز نقاط واقع بر محور x ها می‌باشد.

(۴) خارج دایره و محیط دایره $x^2 + y^2 = 64$ به جز نقاط واقع بر محور y ها می‌باشد.

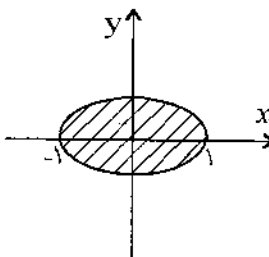
۱۴- تابع حقیقی z از دو متغیر (x, y) به معادله $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ مفروض است، شکل دامنه تعریف آن کدام است؟



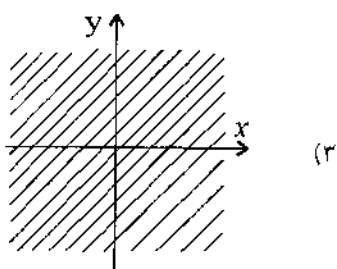
(۲)



(۱)



(۴)



(۳)

۱۵- دامنه تعریف تابع $z = f(x, y) = \sqrt{9 - x^2}/(y + 3)$ کدام است؟

(۱) $\{(x, y) | -3 \leq x \leq 3, y \neq -3\}$

(۲) $\{(x, y) | -3 \leq x \leq 3\}$

(۳) $\{(x, y) | -3 < x < 3, y \neq -3\}$

(۴) $\{(x, y) | -3 < x \leq 3\}$

۱۶- دامنه تعریف تابع $f(x, y) = \sqrt{16 - x^2 - 4y^2}$ کدام است؟

(۱) نقاط داخل و محیط دایره $x^2 + 4y^2 = 16$

(۲) نقاط خارج و محیط بیضی $x^2 + 4y^2 = 16$

(۳) نقاط خارج و محیط دایره $x^2 + 4y^2 = 16$

(۴) نقاط داخل و محیط بیضی $x^2 + 4y^2 = 16$

۱۷- دامنه تعریف تابع $f(x, y) = \sqrt{(x-y)/(x+y)}$ کدام است؟

(۱) $\{(x, y) | x \geq y, x > -y\} \cup \{(x, y) | x \leq y, x < -y\}$

(۲) $\{(x, y) | x \geq y, x \geq -y\} \cup \{(x, y) | x \leq y, x < -y\}$

(۳) $\{(x, y) | x \geq y, x > -y\} \cup \{(x, y) | x \leq y, x \leq -y\}$

(۴) هیچ کدام

۱۸- حوزه مقادیر (برد) تابع $z = 16 - x^2 - y^2$ کدام است؟

(۱) $z \leq 16$

(۲) $\mathbb{R}^2$

(۳) $\mathbb{R}$

(۴) $z \geq 16$

۱۹- برد تابع $z = xy - 4$ کدام است؟

(۱) $z \geq 4$

(۲) $\mathbb{R}$

(۳) $\mathbb{R}^2$

(۴) $z \leq -4$

۲۰- دامنه تعریف تابع $z = e^x / e^y (x^2 + y^2)$ کدام است؟

(۱) $\{(x, y) | x > 0, y > 0\}$

(۲) $\{(x, y) | x \in \mathbb{R}, y \neq 0\}$

(۳) $\{(x, y) | x, y \text{ حقیقی اند}\}$

(۴) $\{(x, y) | x \neq 0, y \neq 0\}$

۲۱- حاصل $\lim_{(x,y) \rightarrow (-1,-1)} e^{x^2+y^2}$ کدام است؟

(۱) e^2

(۲) e

(۳) ۱

(۴) صفر

۲۲- حاصل $\lim_{(x,y) \rightarrow (-1,2)} \{|x-3|/|y+2|\}^2$ کدام است؟

(۱) $-\frac{2}{3}$

(۲) $\frac{4}{9}$

(۳) $\frac{3}{4}$

(۴) $\frac{9}{4}$

۲۳- حاصل $\lim_{(x,y) \rightarrow (e,\pi)} \frac{\ln x}{\ln y + 1} (x^2 + y^2)$ کدام است؟

(۱) $2e^2$

(۲) $\frac{1}{\sqrt{e}}$

(۳) e^2

(۴) ۱

۲۴- حاصل $\lim_{(x,y) \rightarrow (\pi/2, \pi/4)} \sin x \cdot \sin y / \sqrt{2}$ کدام است؟

(۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(۲) $\sqrt{2}$

(۳) $\frac{1}{2}$

(۴) ۱

۲۵- حاصل $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} x^2(x^2+1)/y^2$ در امتداد مسیر $y = \sin \pi x / 2$ کدام است؟

(۱) ۱

(۲) $\frac{1}{2}$

(۳) $\frac{\pi}{2}$

(۴) ۲

۲۶- حاصل $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} y^2(x^2+1)/x$ در امتداد مسیر نیمساز ناحیه دوم کدام است؟

(۱) ۰

(۲) ۲

(۳) ۱

(۴) $\frac{1}{2}$

۲۷- حاصل $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,2)} (x^2-4)/(2y-4)$ در امتداد مسیر $y = x^2/2$ کدام است؟

(۱) ۱

(۲) ۰

(۳) ۲

(۴) هیچ کدام

۲۸- مقدار حد تابع $f(x, y) = \sin\left(\frac{1}{x+y}\right)$ در نقطه $(0, 0)$ برابر است با:

- (۱) ۰ (۲) ۱ (۳) ∞ (۴) دارای حد نیست

۲۹- مقدار حد تابع $f(x, y) = y(x^2 + 1)/x$ در نقطه $(0, 0)$ برابر است با:

- (۱) ∞ (۲) ۰ (۳) ۱ (۴) دارای حد نیست

۳۰- مقدار حد تابع $f(x, y) = x^2y/(x^2 + y^2)$ در نقطه $(0, 0)$ برابر است با:

- (۱) ۰ (۲) ۱ (۳) ∞ (۴) دارای حد نیست

۳۱- تابع $f(x, y) = \begin{cases} x^2y/(x^2 + y^2) & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ در نقطه $(0, 0)$ از لحاظ پیوستگی کدام است؟

- (۱) پیوسته است (۲) پیوسته نیست (۳) تنها پیوستگی چپ دارد (۴) تنها پیوستگی راست دارد

۳۲- تابع $f(x, y) = \begin{cases} x^2y/(x^2 + y^2) & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ در نقطه $(0, 0)$ از لحاظ پیوستگی کدام است؟

- (۱) پیوسته نیست (۲) پیوسته است (۳) فقط پیوستگی چپ دارد (۴) فقط پیوستگی راست دارد

۳۳- تابع $f(x, y) = \begin{cases} xy/(x^2 + y^2) & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ در نقطه $(0, 0)$:

- (۱) پیوسته است (۲) فقط پیوستگی چپ دارد (۳) ناپیوسته است (۴) فقط پیوستگی راست دارد

۳۴- تابع $f(x, y) = \begin{cases} \sin(x+y)/(x+y) & (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ در نقطه $(0, 0)$:

- (۱) ناپیوسته است (۲) پیوسته است (۳) فقط پیوستگی راست دارد (۴) فقط پیوستگی چپ دارد

۳۵- در تابع $f(x, y) = x^2(x+y)/(x^2 + y^2)$ اگر $f(0, 0) = 0$ باشد، آنگاه تابع f در نقطه $(0, 0)$:

- (۱) گسسته است (۲) پیوسته است (۳) فقط پیوستگی راست دارد (۴) هیچ کدام

۳۶- در تابع $f(x, y) = (x^2 + y^2 - x^2)/(x^2 + y^2)$ اگر $f(0, 0) = 0$ باشد، آنگاه تابع f در نقطه $(0, 0)$:

- (۱) پیوسته است (۲) گسسته است (۳) فقط پیوستگی چپ دارد (۴) فقط پیوستگی راست دارد

۳۷- مکان نقاط ناپیوستگی تابع $f(x, y) = (xy + 1)/(x^2 - y)$ کدام است؟

- (۱) دایره (۲) خط راست (۳) سهمی (۴) نیمساز ربع اول

۳۸- تابع $z = x - y - 5$ در کدام ناحیه پیوسته است؟

- (۱) $\mathbb{R}^2$ (۲) $\{(x, y) | x - y \neq 0\}$ (۳) $\{(x, y) | x - y \neq 5\}$ (۴) هیچ کدام

۳۹- مکان نقاط پیوستگی تابع $f(x, y) = e^{-(x^2 + y^2)}$ کدام است؟

- (۱) $\mathbb{R}^2$ (۲) $\{(x, y) | x^2 + y^2 \neq 0\}$ (۳) $\{(x, y) | x^2 + y^2 \neq 1\}$ (۴) هیچ کدام

۴۰- مکن نقاط ناپیوستگی تابع $z = x^2y^2/(x^2 + y^2 - 4)$ کدام است؟

(۱) نقاط واقع بر محیط دایره‌ای به مرکز $(0, 0)$ و شعاع ۴

(۲) نقاط واقع بر محیط دایره‌ای به مرکز $(0, 0)$ و شعاع ۲

(۳) نقاط واقع بر محیط بیضی به معادله $x^2 + y^2 = 4$

(۴) هیچ کدام

۴۱- اگر $f(x, y, z) = e^x \ln y + z$ ، آنگاه $f(\ln 3, 1, 2)$ کدام است؟

- (۱) $e^2 + 2$ (۲) ۲ (۳) ۵ (۴) نامعین

۴۲- اگر $f(x, y) = x^5 y^6$ ، آنگاه $f_{yyx}(x, y)$ کدام است؟

- (۱) $150 x^5 y^4$ (۲) $30 x^5 y^4$ (۳) $300 x^5 y^4$ (۴) $120 x^5 y^4$

۴۳- در تابع $z = e^x \cdot \sin y + \ln xy$ حاصل $\partial^2 z / \partial x^2 \partial y^2$ در نقطه $(0, 3\pi/2)$ کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) ۰ (۳) ۱ (۴) ۲

۴۴- حاصل $\frac{\partial^2}{\partial x^2 \partial y} \{x^2 y^2 - \sin \sqrt{y - \ln y}\}$ کدام است؟

- (۱) $6x^2 y$ (۲) $18xy$ (۳) $2xy - \sin \sqrt{y}$ (۴) $12xy$

۴۵- اگر $w = x^2 y + y^2 z + z^2 x$ باشد، $w_x + w_y + w_z$ برابر است با:

- (۱) $(x + y + z)$ (۲) $2(x + y + z)$ (۳) $(x + y + z)^2$ (۴) $2xyz - (x + y + z)^2$

۴۶- اگر $z = xy + y \ln xy$ باشد، عبارت $x \cdot \partial^2 z / \partial x^2 + y \cdot \partial^2 z / \partial x \partial y$ برابر است با:

- (۱) y (۲) x (۳) $\frac{1}{y}$ (۴) $\frac{1}{x}$

۴۷- $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin[(x + \Delta x) + y] - \sin(x + y)}{\Delta x}$ برابر است با:

- (۱) $\sin(x + y)$ (۲) $\cos(x + y)$ (۳) $\cos(x + y) + 1$ (۴) $-\cos(x + y)$

۴۸- اگر $z = \ln(x^2 + y^2)$ باشد، حاصل $\partial^2 z / \partial x^2 + \partial^2 z / \partial y^2$ کدام است؟

- (۱) ۰ (۲) ۱ (۳) -۲ (۴) $(x^2 + y^2)^{-2}$

۴۹- اگر $w = \cos(x + y) + \sin(x - y)$ باشد، آنگاه:

- (۱) $\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y}$ (۲) $\frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{\partial w}{\partial y}$ (۳) $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$ (۴) $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$

۵۰- تابع $w = f(y - z, z - x, x - y)$ جواب کدام معادله دیفرانسیل با مشتقات نسبی است؟

- (۱) $\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 1$ (۲) $\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y}$ (۳) $\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$ (۴) هیچ کدام

۵۱- اگر $f(x, y) = e^{-x} \cdot \sin(x + 2y)$ باشد، $f_x(0, \pi/4)$ کدام است؟

- (۱) ۰ (۲) ۱ (۳) -۱ (۴) e

۵۲- اگر $f(x, y) = 2x/(x - y)$ باشد، $f''_{xy}(1, 0)$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۲ (۳) ۲ (۴) هیچ کدام

۵۳- اگر $z = y^x$ باشد، $\partial^2 z / \partial x \partial y$ به ازای $x = y = 1$ کدام است؟

- (۱) $\ln 2$ (۲) ۰ (۳) ۲ (۴) ۱

۵۴- اگر $w = \ln(2x + 2y) + \tan(2x - 2y)$ باشد، کدام تساوی زیر صحیح است؟

- (۱) $\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y}$ (۲) $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$ (۳) $\frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{\partial w}{\partial y}$ (۴) $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$

۵۵- اگر $u = \sqrt{x^2 - 2y + z}$ و $v = xyz$ مقدار $\partial f / \partial z$ در نقطه $(1, 1, 2)$ کدام است؟

(۱) $-\frac{\sqrt{6}}{12}$ (۲) $-\frac{\sqrt{6}}{4}$ (۳) $-\frac{5\sqrt{6}}{8}$ (۴) $-\frac{5\sqrt{6}}{12}$

۵۶- اگر $z = x^{\sin y}$ باشد، z''_{xy} به ازای $x = e$ و $y = \pi/4$ کدام است؟

(۱) $\left(\frac{1-\sqrt{2}}{2}\right) e^{\sqrt{2}/2}$ (۲) $\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right) e^{\sqrt{2}/2}$ (۳) $\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right) e^{\sqrt{2}/2}$ (۴) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) e^{\sqrt{2}/2}$

۵۷- اگر $U = \ln(x+y+z)$ باشد، حاصل $\ln U_x + \ln U_y + \ln U_z$ کدام است؟

(۱) $-3U$ (۲) $3U$ (۳) $\frac{1}{3}U$ (۴) U^{-2}

۵۸- اگر $f(x, y, z) = x^2 e^{y+z}$ ، حاصل $\partial z / \partial y$ کدام است؟

(۱) $3x^2$ (۲) $3x^2 e^{y+z}$ (۳) -1 (۴) 1

۵۹- اگر $z = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ ، آن گاه z_{xx} برابر است با:

(۱) z_{yy} (۲) $\frac{1}{2} z_{yy}$ (۳) $-z_{yy}$ (۴) $\sqrt{z_{yy}}$

۶۰- اگر $w = f\left(\frac{xy}{x^2 + y^2}\right)$ باشد، حاصل $\partial w / \partial x$ کدام است؟

(۱) $w' \cdot \left(\frac{y^2 - x^2 y}{(x^2 + y^2)^2}\right)$ (۲) $w' \cdot \left(\frac{y^2 - x^2 y}{(x^2 + y^2)^2}\right)$
(۳) $\left(\frac{xy}{x^2 + y^2}\right) \left(\frac{y^2 - x^2 y}{(x^2 + y^2)^2}\right)$ (۴) هیچ کدام

۶۱- اگر $z = (x + 2y)^{xy}$ باشد، $\partial z / \partial x$ در نقطه $(1, 1)$ کدام است؟

(۱) $3 \ln 2$ (۲) $\ln 2 + \frac{1}{2}$ (۳) $3 \ln 2 + 1$ (۴) $\ln 2$

۶۲- اگر $z = f(y/x)$ باشد، عبارت $y^2 \cdot \partial^2 z / \partial y^2 + 2xy \cdot \partial^2 z / \partial x \partial y + x^2 \cdot \partial^2 z / \partial x^2$ برابر است با:

(۱) 0 (۲) $\frac{y^2}{x^2}$ (۳) $2f\left(\frac{y}{x}\right)$ (۴) 1

۶۳- درمیان هشتین یک تابع دومتغیره در یک نقطه بحرانی منفی است این نقطه:

(۱) نقطه می نیم است. (۲) یا نقطه عطف است یا نقطه زینی. (۳) نقطه ماکزیم است. (۴) نقطه زینی است.

۶۴- با فرض $w = \text{Arc tan}(y/x) + \text{Arc tan}(z/y) + \text{Arc tan}(x/z)$ ، حاصل $w''_x + w''_y + w''_z$ کدام است؟

(۱) 0 (۲) $\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$ (۳) w'_x (۴) $-\frac{2zy}{(x^2 + y^2)^2}$

۶۵- تابع $f(x, y) = \sin \sqrt{x^2 + y^2} / x + y$ مفروض است. $\frac{\partial f}{\partial x} / \frac{\partial f}{\partial y}$ برابر است با:

(۱) $\frac{x}{y}$ (۲) $-\frac{x}{y}$ (۳) $\frac{y}{x}$ (۴) $-\frac{y}{x}$

۶۶- دیرانسیل کامل تابع $z = \ln \frac{x+y}{x-y}$ کدام است؟

(۱) $\frac{2(ydx - xdy)}{x^2 - y^2}$ (۲) $\frac{2(xdx + ydy)}{x^2 - y^2}$ (۳) $\frac{2(xdx - ydy)}{x^2 - y^2}$ (۴) $\frac{2(ydx + xdy)}{x^2 - y^2}$

۶۷- دیرانسیل کامل تابع $z = \ln \sin x/y$ برابر است با:

(۱) $\cot \frac{x}{y} \left(\frac{ydx - xdy}{y^2}\right)$ (۲) $\tan \frac{x}{y} \left(\frac{ydx - xdy}{y^2}\right)$
(۳) $\cot \frac{x}{y} \left(\frac{xdy - ydx}{y^2}\right)$ (۴) $\tan \frac{y}{x} \left(\frac{xdy - ydx}{y^2}\right)$

۶۸- هرگاه $z = F(x^2 - y^2)$ ، مطلوب است $y \partial z / \partial x + x \partial z / \partial y$

$$\circ (1) \quad 2(y^2 - x^2) (2) \quad 1 (3) \quad 2(x^2 - y^2) (4)$$

۶۹- دیرانسیل کامل تابع $z = \text{Arc sin}(x/y)$ کدام است؟

$$\circ (1) \quad \frac{xdy - ydx}{y\sqrt{y^2 - x^2}} (2) \quad \frac{ydx - xdy}{y\sqrt{y^2 - x^2}} (3) \quad \frac{ydx - xdy}{\sqrt{y^2 - x^2}} (4) \quad \frac{xdy - ydx}{\sqrt{y^2 - x^2}}$$

۷۰- اگر $e^{xyz} = e^x + e^y + e^z$ باشد، dz به ازای $x = y = z = 0$ کدام است؟

$$\circ (1) \quad dx + dy (2) \quad -(dx + dy) (3) \quad dx - dy (4)$$

۷۱- اگر $z = x \sin y + y^2 \cos xy$ باشد، دیرانسیل مرتبه اول z در نقطه $(4, 0)$ برابر است با:

$$\circ (1) \quad 4dy (2) \quad 4dx (3) \quad -4dy (4) \quad -4dx$$

۷۲- اگر $F(x/z, y/z) = 0$ ، آنگاه $x \partial z / \partial x + y \partial z / \partial y$ برابر است با:

$$\circ (1) \quad 1 (2) \quad z (3) \quad -z (4)$$

۷۳- اگر $(xy)^z + z^z = \cos z$ باشد، دیرانسیل کامل z کدام است؟

$$\circ (1) \quad \frac{3x^2y^2dx + 3x^2y^2dy}{(3z^2 + \sin z)} (2) \quad \frac{3x^2y^2dx - 3x^2y^2dy}{(3z^2 + \sin z)} (3) \quad \frac{3x^2y^2dx - 3x^2y^2dy}{(3z^2 + \sin z)} (4) \quad \frac{3x^2y^2dx + 3x^2y^2dy}{(3z^2 + \sin z)}$$

۷۴- شیب خط مماس بر رویه $z = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2x^2 - 2x^2y^2 - 2y^2}$ در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر رویه کدام است؟

$$\circ (1) \quad -\frac{\sqrt{2}}{2} (2) \quad \frac{1}{\sqrt{2}} (3) \quad 2\sqrt{2} (4) \quad \text{هیچ کدام}$$

۷۵- اگر $z = f(x, y) = 3x^2 + 2xy - y^2$ باشد و $dx = 0.3$ و $dy = -0.2$ فرض شود، دیرانسیل کامل f در نقطه $(1, 4)$ کدام است؟

$$\circ (1) \quad 0.38 (2) \quad 0.54 (3) \quad 0.42 (4) \quad 0.12$$

۷۶- اگر $z = f(x, y) = x^2 + 2xy - y^2$ باشد و $\Delta x = 0.2$ و $\Delta y = -0.1$ فرض شود، نوکمل f در نقطه $(1, 2)$ کدام است؟

$$\circ (1) \quad -3.9601 (2) \quad 4.0596 (3) \quad 2.0808 (4) \quad 1.1803$$

۷۷- در تابع $f(x, y) = \begin{cases} xy(x^2 - y^2)/(x^2 + y^2) & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ حاصل $f'_x(0, y)$ کدام است؟

$$\circ (1) \quad -y (2) \quad y (3) \quad \frac{1}{y} (4) \quad y^2$$

۷۸- در تابع $z = y/x - x/y$ فرم ماتریسی d^2z در نقطه $(1, 1)$ کدام است؟

$$\circ (1) \quad \begin{bmatrix} dx & dy \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx & dy \end{bmatrix} (2) \quad \begin{bmatrix} dx & dy \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx & dy \end{bmatrix} (3) \quad \begin{bmatrix} dx & dy \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx & dy \end{bmatrix} (4) \quad \begin{bmatrix} dx & dy \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx & dy \end{bmatrix}$$

۷۹- صورت ماتریسی دیرانسیل مرتبه دوم تابع $z = x^2 + xy + y^2$ کدام است؟

$$\circ (1) \quad \begin{bmatrix} dx & dy \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx & dy \end{bmatrix} (2) \quad \begin{bmatrix} dx & dy \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx & dy \end{bmatrix} (3) \quad \begin{bmatrix} dx & dy \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx & dy \end{bmatrix} (4) \quad \begin{bmatrix} dx & dy \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx & dy \end{bmatrix}$$

۸۰- صورت ماتریسی دیفرانسیل مرتبه دوم $z = e^{xyt}$ به ازای $x = y = t = 1$ کدام است؟

$$\begin{aligned} (1) \quad [dx \ dy \ dt] \begin{bmatrix} e & ye & ye \\ ye & e & e \\ ye & ye & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dt \end{bmatrix} \\ (2) \quad [dx \ dy \ dt] \begin{bmatrix} ye & e & e \\ e & ye & e \\ e & e & ye \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dt \end{bmatrix} \\ (3) \quad [dx \ dy \ dt] \begin{bmatrix} e & e & ye \\ ye & e & e \\ ye & e & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dt \end{bmatrix} \\ (4) \quad [dx \ dy \ dt] \begin{bmatrix} e & e & e \\ e & e & e \\ e & e & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dt \end{bmatrix} \end{aligned}$$

۸۱- دیفرانسیل مرتبه دوم $z = x \ln(y/x)$ در نقطه $(1, 1)$ کدام است؟

$$\begin{aligned} (1) \quad d^2z = dx^2 + 2dxdy + dy^2 \\ (2) \quad d^2z = -dx^2 - 2dxdy + dy^2 \\ (3) \quad d^2z = -dx^2 + 2dxdy - dy^2 \\ (4) \quad d^2z = dx^2 - 2dxdy + dy^2 \end{aligned}$$

۸۲- تابع $z = yf(x/y) + F(x/y)$ در کدام یک از معادلات دیفرانسیل زیر صدق می‌کند؟

$$\begin{aligned} (1) \quad z_{xx} + 2z_{xy} + z_{yy} = 0 \\ (2) \quad z_{xx} - 2z_{xy} + z_{yy} = 0 \\ (3) \quad x^2 z_{xx} + 2xy z_{xy} + y^2 z_{yy} = 0 \\ (4) \quad x^2 z_{xx} - 2xy z_{xy} + y^2 z_{yy} = 0 \end{aligned}$$

۸۳- دیفرانسیل مرتبه دهم تابع $z = e^{x+y}$ کدام است؟

$$\begin{aligned} (1) \quad e^{x+y}(dx + dy)^{10} \\ (2) \quad e^{x+y}(dx + dy)^{11} \\ (3) \quad e^{x+y}(2dx + dy)^{11} \\ (4) \quad e^{x+y}(dx - dy)^{10} \end{aligned}$$

۸۴- در تابع $z = e^{x/y} \cdot \ln(x^2/y)$ مقدار $\partial^2 z / \partial x \partial x$ در نقطه $(1, 1)$ کدام است؟

$$(1) \quad e \quad (2) \quad 0 \quad (3) \quad 2e \quad (4) \quad 1$$

۸۵- در تابع $U = x^2 + y^2 + z^2$ در صورتی که $x = e^t \cos t$ و $y = e^t \sin t$ و $z = e^t$ باشد، dU/dt کدام است؟

$$(1) \quad e^{2t} \quad (2) \quad \sin^2 t + 2e^{2t} \quad (3) \quad 4e^{2t} \quad (4) \quad \sin t + \cos t + 2e^{2t}$$

۸۶- در تابع $w = xy + yz$ در صورتی که $x = e^t/t$ و $y = e^{-t}/t$ و $z = t^2$ باشد، $(dw/dt)_{t=1}$ کدام است؟

$$(1) \quad 0 \quad (2) \quad 2 \quad (3) \quad -2 \quad (4) \quad 2e^{-1}$$

۸۷- اگر $z = z(x, y)$ به صورت $z = e^{-(x+y+z)}$ بیان شده باشد، داریم:

$$(1) \quad \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} = 1 \quad (2) \quad \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \quad (3) \quad \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \quad (4) \quad \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 1$$

۸۸- اگر $z \sin x + z^2 + x \sin y + xyz = 0$ باشد $\partial z / \partial x$ در نقطه $(0, 0, 1)$ کدام است؟

$$(1) \quad -\frac{1}{2} \quad (2) \quad \frac{1}{2} \quad (3) \quad 1 \quad (4) \quad \text{هیچ کدام}$$

۸۹- اگر $U = \ln(x^2 + y^2 + 2t)$ باشد که در آن $x = r + s$ و $y = r - s$ و $t = 2rs$ است، مشتق تابع U نسبت به s کدام است؟

$$(1) \quad r + s \quad (2) \quad \frac{1}{r + s} \quad (3) \quad \frac{2}{r + s} \quad (4) \quad 2(r + s)$$

۹۰- اگر $x \ln yz - y \ln xz = 0$ باشد، z_x برابر است با:

$$(1) \quad \frac{zy(1 - \ln yz)}{x(x - y)} \quad (2) \quad -\frac{z(\ln yz - y)}{x(x - y)} \quad (3) \quad \frac{1 - \ln yz}{x - y} \quad (4) \quad \frac{zy(1 - \ln xy)}{x(x - y)}$$

۹۱- اگر $z^2 - 4xz + y^2 - 2 = 0$ باشد، z_y در نقطه $(1, -2, 2)$ کدام است؟

$$(1) \quad 1 \quad (2) \quad -1 \quad (3) \quad \frac{1}{2} \quad (4) \quad -\frac{1}{2}$$

۹۲- اگر $w = (x - y)(y - z)(z - x)$ ، آنگاه $w_x + w_y + w_z$ برابر است با:

(۱) $-w$ (۲) $(x - y - z)$ (۳) هیچ کدام (۴)

۹۳- اگر $z = x^x \sin(x/y) + y^y \cos(x/y)$ باشد، $x \cdot z_x + y \cdot z_y$ کدام است؟

(۱) $2z$ (۲) z (۳) $-2z$ (۴)

۹۴- اگر $z = x^x e^{y/t} + y^y e^{x/t} + t^t e^{x/y}$ باشد، حاصل $x \cdot \partial z / \partial x + y \cdot \partial z / \partial y + t \cdot \partial z / \partial t$ کدام است؟

(۱) z (۲) $3z$ (۳) هیچ کدام (۴)

۹۵- اگر $z = \ln \frac{x^x + y^y}{xy}$ باشد، $x \cdot z_x - y \cdot z_y$ کدام است؟

(۱) z (۲) $2z$ (۳) $\frac{1}{y} z$ (۴)

۹۶- اگر $z = \sqrt{xy + xt + yt}$ باشد، عبارت $x \partial z / \partial x + y \partial z / \partial y + t \partial z / \partial t$ برابر است با:

(۱) z (۲) $\frac{1}{y} z$ (۳) $2z$ (۴)

۹۷- اگر $z = \ln(x^x + xy + y^y)$ باشد، $x \cdot \partial z / \partial x + y \cdot \partial z / \partial y$ برابر است با:

(۱) $2z$ (۲) z (۳) 2 (۴)

۹۸- اگر $z = x f(y/x) - x^x - y^y$ باشد، عبارت $x \cdot z_x + y \cdot z_y$ برابر است با:

(۱) $z - x^x - y^y$ (۲) $-x^x - y^y$ (۳) z (۴) $x^x + y^y$

۹۹- تابع $z = (x^x + y^y) / (x^x - y^y)$ همگن از درجه ... است؟

(۱) یک (۲) صفر (۳) دو (۴) هیچ کدام

۱۰۰- تابع $f(x, y) = xy - \ln xy$:

(۱) همگن از درجه صفر است. (۲) همگن از درجه یک است. (۳) همگن از درجه دو است. (۴) همگن نیست.

۱۰۱- تابع $z = x^{-x} y \ln(y/x)$ همگن از درجه:

(۱) صفر است (۲) منفی یک است (۳) یک است (۴) هیچ کدام

۱۰۲- در تابع $z = 2x + 2y + y^2 + 2x^x + 5$ مقادیر (x, y) که به طور هم زمان در هر دو شرط $\partial z / \partial x = 0$ و

$\partial z / \partial y = 0$ صدق کند، کدام است؟

(۱) $(\frac{1}{2}, 1)$ (۲) $(-\frac{1}{2}, -1)$ (۳) $(\frac{1}{3}, -1)$ (۴) $(-\frac{1}{3}, 1)$

۱۰۳- اگر $z = x^x \cos 2y$ و $x = \sqrt{x^x + v^v}$ و $y = \tan^{-1}(u/v)$ ، آنگاه $\partial z / \partial v$ کدام است؟

(۱) $(2x \cos 2y) \left(\frac{v}{x}\right) + (-2x^x \sin 2y) \left(\frac{-u}{x^x}\right)$

(۲) $(2x \cos 2y) \left(\frac{u}{x}\right) + (-2x^x \sin 2y) \left(\frac{v}{x^x}\right)$

(۳) $(2x \cos 2y) + (-2x^x \sin 2y)$

(۴) هیچ کدام

۱۰۴- در تابع $z = \sin(x^x + 2 \cos y)$ ، $\partial^2 z / \partial x \partial y$ برابر است با:

(۱) $-4x \sin y (\cos(x^x + 2 \cos y))$ (۲) $4x \sin y (\cos(x^x + 2 \cos y))$

(۳) $-4x \sin y (\sin(x^x + 2 \cos y))$ (۴) $4x \sin y (\sin(x^x + 2 \cos y))$

۱۰۵- در تابع $z = e^{\ln x} e^{\ln y}$, $\partial^2 z / \partial x^2$ برابر است با:

- (۱) ۰ (۲) e (۳) ۱ (۴) $\ln xy$

۱۰۶- اگر $z = (xyt)^2$ باشد و $dx = dy = dt = 0.1$ و $dx^2 = dy^2 = dt^2 = 0.1$ آن‌گاه dz در نقطه $(1, 1, 1)$ کدام است؟

- (۱) 0.30 (۲) 3.3 (۳) 0.09 (۴) 0.30

۱۰۷- اگر $z = f(x, y)$ و $w = g(x, y)$ باشد، کدام تساوی زیر نادرست است؟

- (۱) $d(z + w) = dz + dw$ (۲) $d(z \cdot w) = zdw + wdz$
(۳) $d\left(\frac{z}{w}\right) = \frac{wdz - zdw}{w^2}$ (۴) هیچ‌کدام

۱۰۸- اگر $z = \sin^2(xy) + \cos^2(xy)$ باشد، dz برابر است با:

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) $dx + dy$ (۴) $dx - dy$

۱۰۹- برای تابع $z = \sin x - \cos y$ به‌ازای $dx = 1/2$ و $dy = -1/3$ مقدار dz در نقطه $(\pi/2, \pi/3)$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{\sqrt{3}}{6}$ (۲) $\frac{1}{6}$ (۳) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۴) $-\frac{1}{6}$

۱۱۰- کدام‌یک از توابع زیر در معادله $\partial^2 z / \partial x^2 + \partial^2 z / \partial y^2 = 0$ صدق می‌کند؟

- (۱) $z = \sin(x + y)$ (۲) $z = e \cos x$ (۳) $z = e^x \cos y$ (۴) $z = \ln xy$

۱۱۱- می‌نیمم نسبی تابع $f(x, y) = 3x^2 + 2xy + 2x + y^2 + y + 4$ کدام‌یک از نقاط زیر است؟

- (۱) $(0, 0)$ (۲) $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ (۳) $\left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)$ (۴) $\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$

۱۱۲- می‌نیمم نسبی عبارت $x^2 + y^2 - 6xy$ کدام است؟

- (۱) -6 (۲) -10 (۳) -8 (۴) -12

۱۱۳- تابع $z = x^2 + y^2 - 3xy$ مفروض است، نوع نقاط $(0, 0)$ و $(1, 1)$ کدام است؟

- (۱) ماکزیمم نسبی در $(0, 0)$ و نقطه زینی در $(1, 1)$
(۲) نقطه زینی در $(0, 0)$ و می‌نیمم نسبی در $(1, 1)$
(۳) نقطه زینی در $(0, 0)$ و می‌نیمم نسبی در $(1, 1)$
(۴) می‌نیمم نسبی در $(0, 0)$ و ماکزیمم نسبی در $(1, 1)$

۱۱۴- نقطه بحرانی تابع $z = 2xy - 5y^2 - 2x^2 + 4x + 4y - 4$ در چه وضعیتی است؟

- (۱) ماکزیمم (۲) می‌نیمم (۳) عطف (۴) زینی

۱۱۵- تابع $z = f(x, y) = 2x^2 - x^3 + 3y^2$ دارای:

- (۱) دو نقطه می‌نیمم و یک نقطه زینی است.
(۲) یک نقطه می‌نیمم، یک نقطه زینی و یک نقطه ماکزیمم است.
(۳) دو نقطه ماکزیمم و یک نقطه زینی است.
(۴) یک نقطه ماکزیمم و یک نقطه زینی است.

۱۱۶- نقطه بحرانی تابع $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$ کدام است؟

- (۱) $(0, 3, -9)$ می‌نیمم (۲) $(0, 3, -9)$ ماکزیمم (۳) $(0, 3, -9)$ زینی (۴) هیچ‌کدام

۱۱۷- نوع نقطه بحرانی تابع $z = 18x^2 - 32y^2 - 36x - 128y - 110$ کدام است؟

- (۱) زینی (۲) ماکزیم (۳) عطف (۴) می نیم

۱۱۸- نقطه بحرانی تابع $z = x^3 - 3x_1x_2 + 3x_1^2 + 4x_2x_2 + 6x_2^3$ کدام است؟

- (۱) $(0, 0, 0)$ می نیم (۲) $(0, 0, 0)$ ماکزیم (۳) $(0, 1, 1, 13)$ می نیم (۴) $(0, 1, 1, 13)$ ماکزیم

۱۱۹- مقدار می نیم تابع $z = x^2 - 2bxy + y^2$ کدام است؟ ($b > 0$)

- (۱) b^3 (۲) $-b^3$ (۳) ۰ (۴) مقدار می نیم ندارد

۱۲۰- اگر در تابع دومتغیره $z = f(x, y)$ داشته باشیم $\partial f / \partial x = 2x$ و $\partial f / \partial y = -2y$ ، نقطه بحرانی کدام است؟

- (۱) $(0, 0)$ ماکزیم (۲) $(0, 0)$ زینی (۳) $(0, 0)$ می نیم (۴) هیچ کدام

۱۲۱- به ازای چه مقادیری از a نقطه بحرانی $z = 2x^2 - ay^2$ زینی است؟

- (۱) $a < 0$ (۲) $-1 < a < 1$ (۳) $a > 0$ (۴) $a < -1, a > 1$

۱۲۲- نوع نقطه بحرانی $z = xy - \ln(x^2 + y^2)$ کدام است؟

- (۱) می نیم و زینی (۲) می نیم (۳) ماکزیم (۴) زینی

۱۲۳- در تابع $z = 2x^2 - 2xy + y^2 + 5x - 3y$ نقطه بحرانی کدام است؟

- (۱) $(-1, \frac{1}{2})$ (۲) $(-1, -\frac{1}{2})$ (۳) $(1, \frac{1}{2})$ (۴) $(1, -\frac{1}{2})$

۱۲۴- به ازای کدام مقدار m ، طول نقطه بحرانی تابع $z = x^2 + y^2 + mx - 4y + 8$ برابر ۱ است؟

- (۱) -2 (۲) 2 (۳) 1 (۴) -1

۱۲۵- تابع $z = 3x^2 - x^2 + 3y^2 + 4y$ دارای:

- (۱) یک نقطه ماکزیم و یک نقطه می نیم است. (۲) یک نقطه ماکزیم و یک نقطه زینی است.

- (۳) یک نقطه می نیم و یک نقطه زینی است. (۴) هیچ کدام

۱۲۶- نوع نقطه بحرانی تابع $z = \sin x + \sin y + \sin(x + y)$ کدام است؟ (x و y زاویای حاده اند)

- (۱) می نیم (۲) عطف (۳) زینی (۴) ماکزیم

۱۲۷- به ازای کدام مقدار a و b ، نقطه بحرانی تابع $z = ax^2 + xy + by^2 - 4x + 8y + 5$ یک نقطه می نیم است؟

($a, b > 0$)

- (۱) $ab < \frac{1}{4}$ (۲) $ab > \frac{1}{8}$ (۳) $ab < \frac{1}{8}$ (۴) $ab > \frac{1}{4}$

۱۲۸- نوع نقطه بحرانی تابع $z = f(x, y) = 4 \ln x + e^y - x - y$ کدام است؟

- (۱) ماکزیم (۲) می نیم (۳) زینی (۴) عطف

۱۲۹- نقطه بحرانی تابع $z = x^2 + y^2 - \ln xy$ کدام است؟ ($x > 0$ و $y > 0$)

- (۱) $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 + \ln 2)$ ماکزیم (۲) $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 + \ln 2)$ می نیم

- (۳) $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 - \ln 2)$ ماکزیم (۴) $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 - \ln 2)$ می نیم

۱۳۰- نقطه بحرانی تابع $z = f(x, y) = (x - 1)^2 - (y - 2)^2$ کدام است؟

- (۱) $(1, 2)$ می نیم (۲) $(1, 2)$ ماکزیم (۳) $(1, 2)$ زینی (۴) هیچ کدام

۱۳۱- در تابع $z = \ln x - x$ نقطه بحرانی کدام است؟

- (۱) $(1, 1)$ زینی (۲) $(1, 1)$ ماکزیم (۳) $(1, 1)$ زینی (۴) $(1, -1)$ ماکزیم

۱۳۲- به ازای چه مقادیری از a نقطه بحرانی تابع $z = x^2 + 4ay^2 - 4x$ می‌نیم است؟

- (۱) $a > 0$ (۲) $a < 0$ (۳) $-1 < a < 0$ (۴) $-1 < a < 1$

۱۳۳- به ازای چه مقادیری از a نقطه بحرانی تابع $z = -x^2 + ay^2 - 2x$ ماکزیم است؟

- (۱) $a < 0$ (۲) $a > 0$ (۳) $a > -1$ (۴) $a < -1$

۱۳۴- در تابع $z = xy$ با فرض $x + y = 6$ ، نقطه بحرانی کدام است؟

- (۱) $\min(3, 3, 9)$ (۲) $\max(3, 3, 9)$ (۳) $\min(6, 6, 36)$ (۴) $\max(6, 6, 36)$

۱۳۵- در تابع $z = x + y^2$ با قید $z = x + 2y = 4$ ، نقطه بحرانی کدام است؟

- (۱) $\max(2, 1, 3)$ (۲) $\min(2, 1, 3)$ (۳) $\max(0, 2, 4)$ (۴) $\min(0, 2, 4)$

۱۳۶- تابع $z = 3x^2 + 4y^2 - xy$ نسبت به محدودیت $2x + y = 21$ در کدام نقطه بحرانی است؟

- (۱) $(8, 5, 4, 264, 75)$ (۲) $(8, 5, 4, 216, 75)$ (۳) $(2, 17, 1134)$ (۴) $(2, 7, 1156)$

۱۳۷- طول نقطه ماکزیم تابع $z = 2x + y$ با شرط $x^2 + y^2 = 1$ کدام است؟ ($x, y > 0$)

- (۱) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ (۲) $\sqrt{5}$ (۳) $\frac{3}{\sqrt{5}}$ (۴) $\frac{2}{\sqrt{5}}$

۱۳۸- ماکزیم یا می‌نیم تابع $z = xy$ با شرط $2x + y = 4$ کدام است؟

- (۱) $\max z = 1$ (۲) $\max z = 2$ (۳) $\min z = 2$ (۴) $\min z = 1$

۱۳۹- در تابع $z = 1/x + 1/y$ با قید $x + y = 2$ ، نقطه بحرانی کدام است؟ ($x, y > 0$)

- (۱) $\min(1, 1, 2)$ (۲) $\max(1, 1, 2)$ (۳) $\min(2, 2, 1)$ (۴) $\max(2, 2, 1)$

۱۴۰- حداقل تابع $z = x^2 - xy$ با قید $2x + 3y = 5$ کدام است؟

- (۱) $\frac{11}{12}$ (۲) $\frac{13}{12}$ (۳) $\frac{10}{12}$ (۴) هیچ کدام

۱۴۱- نوع نقطه بحرانی تابع $z = (x-2)(y+3)$ نسبت به قید $x + 2y = 12$ کدام است؟

- (۱) زینی (۲) عطف (۳) می‌نیم (۴) ماکزیم

۱۴۲- ماکزیم مقدار تابع $z = y^2 - x^2$ با شرط $x + 2y = 6$ کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) ۱۲ (۳) ۱۵ (۴) ۱۸

۱۴۳- ماکزیم مقدار تابع $f(x, y, z) = ax + by + cz$ بر روی کره $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ کدام است؟ (a, b و c مقادیر ثابت حقیقی‌اند)

- (۱) $a^2 + b^2 + c^2$ (۲) $\max\{|a|, |b|, |c|\}$ (۳) $\max\{a^2, b^2, c^2\}$ (۴) $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

۱۴۴- اگر $L(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + xyz$ باشد، جواب معادله $F_x + F_y + F_z = 12$ در نقطه $(1, 1, a)$ کدام است؟

- (۱) $a = 1$ (۲) $a = -1$ (۳) $a = \frac{5}{4}$ (۴) $a = 2$

۱۴۵- تابع $z = f(x, y)$ در نقطه $M(a, b, f(a, b))$ بحرانی است. اگر دیفرانسیل مرتبه دوم تابع z در نقطه M بزرگتر از صفر باشد، آن‌گاه نقطه M :

- (۱) زینی است. (۲) می‌نیم است. (۳) ماکزیم است. (۴) عطف است.

تست‌های آزمون کارشناسی ارشد

«توابع چندمتغیره»

- تست‌های شماره ۱ الی ۴۹ آزمون‌های کارشناسی ارشد مجموعه علوم اقتصادی
- تست‌های شماره ۵۰ الی ۸۲ آزمون‌های کارشناسی ارشد مجموعه مدیریت
- تست‌های شماره ۸۳ الی ۱۱۹ آزمون‌های کارشناسی ارشد حسابداری

۱- برد تابع $z = xy - 2$ برابر است با:

$\mathbb{R}^2$ (۲) $\mathbb{R}$ (۱) $z \geq 2$ (۳) $z \leq -2$ (۴)

۲- در تابع $z = e^{x^2+y^2} + \ln y$ مقدار $\partial^2 z / \partial y \partial x$ در $x = y = 1$ کدام است؟

$4e^2$ (۱) $4e$ (۲) $8e^2$ (۳) $2e^2$ (۴)

۳- اگر $z = x^2 + y^2$ و $x = \rho \cos \theta$ و $y = \rho \sin \theta$ در نقطه $(\rho = 2, \theta = \pi/2)$ برابر است با:

۸ (۱) -1 (۲) 1 (۳) 4 (۴) صفر

۴- در تابع $z = x^2 + y^2 + xy$ مقدار $d^2 z$ در نقطه $x = y = 1$ به ازای $dx = 0.1$ و $dy = 0.2$ برابر است با:

0.16 (۱) 0.14 (۲) 0.12 (۳) 0.18 (۴)

۵- در تابع $z = xy/(x^2 + y^2)$ درجه همگنی کدام است؟

۱) غیرهمگن (۲) ۲ (۳) صفر (۴) همگن خطی

۶- به ازای چه مقداری از a ، نقطه بحرانی $z = x^2 + ay^2$ یک نقطه زینی است؟

$a > 0$ (۱) $a < 0$ (۲) $-1 < a < 1$ (۳) $a < -1, a > 1$ (۴)

۷- تابع $f(x, y) = x^2 + y^2 - 4x + 6y + 25$ در کدام یک از نقاط زیر می‌نیم است؟

$(3, -2)$ (۱) $(2, 2)$ (۲) $(3, 2)$ (۳) $(2, -3)$ (۴)

۸- در تابع $z = xy + x^2$ نقطه بحرانی کدام است؟

$(1, 2)$ (۱) $(1, 1)$ (۲) $(1, -1)$ (۳) $(0, 0)$ (۴)

۹- تابع $z = 5x^2 + 6y^2 - xy$ نسبت به محدودیت $x + 2y = 24$ در کدام نقطه بحرانی است؟

$(6, 9)$ (۱) $(5, 6)$ (۲) $(1, 1)$ (۳) $(0, 0)$ (۴)

۱۰- حوزه مقادیر (Range) تابع دوتغیره $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ کدام است؟

$[-3, 0]$ (۱) $[-3, +3]$ (۲) $\mathbb{R}^2$ (۳) $[0, 3]$ (۴)

۱۱- تابع $F(x, y) = \begin{cases} x^2 y / (x^2 + y^2) & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ در نقطه $(0, 0)$ از لحاظ پیوستگی کدام است؟

۱) پیوسته نیست (۲) پیوسته است (۳) تنها پیوستگی چپ دارد (۴) تنها پیوستگی راست دارد

۱۲- اگر $z = f(y/x)$ باشد، $\partial z / \partial x$ در نقطه $x = y = 2$ کدام است؟

$2f'(1)$ (۱) $-\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{4}f'(1)$ (۳) $-\frac{1}{4}f'(1)$ (۴)

۱۳- اگر چنانچه $Z = U^2 + V^2$ و $U = e^{x^2+y^2}$ و $V = x/y$ باشد، در این صورت Z'_x در نقطه $x = y = 1$ عبارتست از:

$4e^2 + 2$ (۱) $2e^2 + 4e^2$ (۲) $2e^2 + 2e^2$ (۳) $6e^2$ (۴)

۱۴- اگر ماتریس هسین یک تابع دو متغیره در یک نقطه بحرانی برابر با $\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$ باشد، آن نقطه:

(۱) زینی (۲) ماکزیمم (۳) می نیمم (۴) ماکزیمم و یا می نیمم است

۱۵- تابع $F(x, y, z) = (x + y + z) / \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

(۱) همواره یک تابع همگن از درجه یک می باشد. (۲) یک تابع همگن با درجه همگنی صفر است. (۳) یک تابع همگن نیست. (۴) یک تابع همگن با درجه همگنی $1/2$ می باشد.

۱۶- قلمرو یا دامنه تعریف (Domain) تابع $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ کدام است؟

(۱) نقاط محیط دایره $x^2 + y^2 = 4$ (۲) نقاط خارج دایره $x^2 + y^2 = 4$ (۳) نقاط داخل دایره $x^2 + y^2 = 4$ (۴) صفحه اعداد حقیقی

۱۷- در تابع $z = x^2 + y^2 - xy$ مقدار z'_x به ازای $x = 2$ و $y = 1$ کدام است؟

(۱) $-\frac{1}{2}$ (۲) $-\frac{1}{2z}$ (۳) $\frac{1}{z}$ (۴) $\frac{1}{z}$

۱۸- اگر $z = x^2 + y^2$ و $x = \rho \cos \theta$ و $y = \rho \sin \theta$ باشند، در این صورت جواب $(\partial z / \partial \rho)^2 + (\partial z / \partial \theta)^2$ برابر است با:

(۱) $x^2 + y^2$ (۲) $x^2 - y^2$ (۳) $4(x^2 + y^2)$ (۴) $2(x^2 + y^2)$

۱۹- حد تابع $f(x, y) = \begin{cases} x^2 y^2 (x^2 - y^2) / (x^2 + y^2) & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ در نقطه $(0, 0)$ کدام است؟

(۱) حد ندارد (۲) صفر (۳) فقط حد راست +۱ دارد (۴) تنها حد چپ صفر دارد

۲۰- تابع کابرداگلاس $z = a K^{x^2+y^2} L^{x^2+y^2}$ مفروض است، در این تابع درجه همگنی و نسبت بازده به مقیاس کدام است؟

(۱) ۱، نزولی (۲) ۱، ثابت (۳) ۱/۲، نزولی (۴) ۱/۲، صعودی

۲۱- به ازای چه مقادیری از a نقطه بحرانی $z = ax^2 + xy + y^2$ یک نقطه زینی شکل است؟

(۱) $a > 1$ (۲) $a < \frac{1}{4}$ (۳) $a > \frac{1}{4}$ (۴) به ازای کلیه مقادیر a

۲۲- به ازای چه مقادیری از x و y تابع مقید $z = -x^2 - 2y + xy$ ماکزیمم است؟

(۱) $(1, 3)$ (۲) $(\frac{1}{2}, \frac{7}{2})$ (۳) $(\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$ (۴) $(3, 1)$

۲۳- تابع $f(x, y) = \begin{cases} x^2 y^2 / (x^2 + y^2) & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ در نقطه $(0, 0)$ از لحاظ پیوستگی کدام است؟

(۱) پیوسته است (۲) فقط پیوستگی چپ دارد (۳) پیوسته نیست (۴) فقط پیوستگی راست دارد

۲۴- اگر $z = \arctan \frac{x-y}{x+y}$ باشد، آن گاه $\partial y / \partial x$ برابر خواهد بود با:

(۱) $\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{1 - \tan z}{1 + \tan z}$ (۲) $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\tan z + 1}{\tan z - 1}$ (۳) $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1 - \tan z}{1 + \tan z}$ (۴) $\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{\tan z - 1}{\tan z + 1}$

۲۵- اگر $z = f(y/x)$ باشد، $\partial z / \partial x$ در نقطه $x = y = 2$ کدام است؟

(۱) $-\frac{1}{2} f'(1)$ (۲) $-\frac{1}{2} f'(1)$ (۳) $2 f'(1)$ (۴) $\frac{1}{2} f'(1)$

۲۶- برد تابع $f(x, y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$ کدام است؟

(۱) $[0, 5]$ (۲) $(0, 5)$ (۳) $\mathbb{R}^2$ (۴) $\mathbb{R}$

۲۷- در تابع $z = x^y + y^x$ ، $\partial z / \partial x$ برابر است با:

$$(۱) yx^{y-1} + y^x \ln y \quad (۲) xy^{x-1} \quad (۳) x^y \ln x + xy^{x-1} \quad (۴) xy^{x-1} + y \ln x$$

۲۸- در تابع $z = \ln(x^y y^x)$ مقدار $d^2 z$ در نقطه $x = y = 1$ کدام است؟

$$(۱) d^2 z = -2(dx^2 + dy^2) \quad (۲) d^2 z = 3(dx^2 + dy^2) \quad (۳) d^2 z = 2dx^2 + 2dy^2 - 4dxdy \quad (۴) \text{ صفر}$$

۲۹- به ازای کدام مقدار a و b نقطه بحرانی تابع $z = ax^2 + xy + by^2$ یک نقطه زینی شکل است؟

$$(۱) ab > 1 \quad (۲) ab < \frac{1}{4} \quad (۳) ab > \frac{1}{4} \quad (۴) \text{ به ازاء کلیه مقادیر } a \text{ و } b$$

۳۰- نقطه بحرانی تابع $z = 8x - 2x^2 + 12xy - 12y^2 + 6y$ در چه وضعیتی است؟

$$(۱) \text{ ماکزیمم} \quad (۲) \text{ عطف} \quad (۳) \text{ می-نیم} \quad (۴) \text{ زینی}$$

۳۱- نقطه بحرانی تابع $z = xy$ با قید $x + y = 4$ کدام است؟

$$(۱) (0, 4, 0) \text{ می-نیم} \quad (۲) (0, 4, 0) \text{ ماکزیمم} \quad (۳) (2, 2, 4) \text{ ماکزیمم} \quad (۴) (2, 2, 4) \text{ می-نیم}$$

۳۲- تابع $z = 4x^2 - 2xy + 6y^2$ با قید $x + y = 12$ حل شده و مقادیر بحرانی $x = 32$ و $y = 30$ و $\lambda = -276$ به دست آمده است. اگر تابع با قید $2x + 2y = 26$ حل شود، مقدار بهینه z چه قدر خواهد شد؟

$$(۱) 9660 \quad (۲) 10212 \quad (۳) 9936 \quad (۴) 10488$$

۳۳- اگر $\tan^{-1}(y/x) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ باشد، dy در نقطه $x = 1$ کدام است؟

$$(۱) \frac{1+y}{1-y} dx \quad (۲) \frac{1-y}{1+y} dx \quad (۳) \frac{1}{y} dx \quad (۴) y dx$$

۳۴- در تابع $z = (x^2 + 1)/(y^2 + 1)$ برد (Range) کدام است؟

$$(۱) \mathbb{R} \quad (۲) \mathbb{R}^+ \quad (۳) \mathbb{R} - \{0\} \quad (۴) \mathbb{R}^+ + \{0\}$$

۳۵- در تابع $z = x \ln(1 + y/x) + y \ln(1 + x/y)$ حاصل عبارت $\partial z / \partial x + \partial z / \partial y$ برابر است با:

$$(۱) \ln \frac{(x+y)^2}{xy} \quad (۲) \ln \frac{x-y}{x+y} \quad (۳) \ln \frac{(x-y)^2}{xy} \quad (۴) \ln \frac{x+y}{xy}$$

۳۶- هرگاه $F(x + y + z, x^2 + y^2 + z^2) = 0$ باشد، در این صورت z_x کدام است؟

$$(۱) -(F_1 + 2yF_2)/F_1 + 2zF_2 \quad (۲) -(F_1 + 2yF_2)/F_1 + 2zF_2 \quad (۳) -(F_1 + 2zF_2)/2xF_2 + F_1 \quad (۴) -(F_1 + 2zF_2)/2xF_2 + F_1$$

۳۷- اگر $z = e^{x/y} + e^{y/z} + \log x - \log y$ باشد، نوع تابع کدام است؟

$$(۱) \text{ غیر همگن} \quad (۲) \text{ همگن درجه یک} \quad (۳) \text{ همگن درجه صفر} \quad (۴) \text{ همگن درجه } -1$$

۳۸- با فرض آنکه تابع f از نقطه $A(0, 1)$ می‌گذرد و داشته باشیم $e^x dy + ye^x dx + x^2 dy + 2xy dx = 0$ مقدار y به ازای $x = 1$ کدام است؟

$$(۱) -(1 + e) \quad (۲) 1 + e \quad (۳) -\frac{1}{1+e} \quad (۴) \frac{1}{1+e}$$

۳۹- در نقطه بحرانی مقدار تابع $z = e^{(x-1)^2 + y^2 + 1}$ و نوع آن کدام است؟

$$(۱) e^{-2} \text{ می-نیم} \quad (۲) e^{-2} \text{ ماکزیمم} \quad (۳) e^2 \text{ می-نیم} \quad (۴) e^{-1} \text{ ماکزیمم}$$

۴۰- اگر داشته باشیم $z = f(K, L)$ و $z = g(x, y)$ و $d = h(x, y)$ مقدار z_x کدام است؟

$$(۱) z_x = z_K \cdot K_x + z_L \cdot L_x \quad (۲) z_x = z_K \cdot K_x + z_L \cdot L_x \quad (۳) z_x = z_L \cdot L_x \quad (۴) z_x = 0$$

- ۴۱- در تابع $z = \sin(y/x) + x^{x/y}$ مقدار $x.z_x + y.z_y$ کدام است؟
 (۱) ۰ (۲) z (۳) $-z$ (۴) $2z$
- ۴۲- نقطه بحرانی تابع f به معادله $z = x^7 - xy + y^2 - 3x$ کدام است؟
 (۱) $(1, 1, -2)$ (۲) $(2, 1, -3)$ (۳) $(0, 2, 4)$ (۴) $(0, 3, 9)$
- ۴۳- در سؤال قبل نوع نقطه کدام است؟
 (۱) زینی (۲) عطف (۳) ماکزیمم (۴) می‌نیمم
- ۴۴- برد یا حوزه مقادیر تابع حقیقی f به معادله $z = \sqrt{10 - x^2 - 2y^2}$ کدام است؟
 (۱) R (۲) R^+ (۳) $R^+ \cup \{0\}$ (۴) $[0, \sqrt{10}]$
- ۴۵- در تابع حقیقی دو متغیری $z = x^2 + 2xy + 4y^2$ به ازای $dx = dy = 0$ مقدار dz کدام است؟
 (۱) $0, 0, 7$ (۲) $0, 12$ (۳) $0, 14$ (۴) $0, 17$
- ۴۶- درجه همگنی تابع $f(x, y) = x/(x^2 + y^2) + yx/(x^2 + y^2)$ کدام است؟
 (۱) -1 (۲) ۰ (۳) ۱ (۴) همگن نیست
- ۴۷- اگر $z = f(x^2 + y^2, x/y)$ باشد z'_x کدام است؟
 (۱) $f'_1 + f'_2$ (۲) $f'_x + f_{x/y}$ (۳) $(x^2 + y^2)f'_x + \frac{x}{y}f'_y$ (۴) $2xf'_1 + \frac{1}{y}f'_2$
- ۴۸- نقطه بحرانی تابع $z = x^2 + 2xy + 2y^2 + 10$ کدام است؟
 (۱) $(0, 1, 12)$ (۲) $(0, 0, 10)$ (۳) $(1, 1, 15)$ (۴) $(1, 0, 11)$
- ۴۹- نوع نقطه بحرانی سؤال ۴۸ کدام است؟
 (۱) زینی (۲) عطف (۳) ماکزیمم (۴) می‌نیمم
- ۵۰- اگر تابع $z = x/y - y/x$ مفروض باشد، عبارت $x\partial z/\partial x + y\partial z/\partial y$ در $x = y = 1$ کدام است؟
 (۱) -1 (۲) -2 (۳) ۱ (۴) ۰
- ۵۱- مختصات می‌نیمم تابع $z = x^2 - 2x + y^2 - 4y + 10$ کدام است؟
 (۱) $(0, 0, 10)$ (۲) $(1, 2, 5)$ (۳) $(1, 1, 2)$ (۴) $(2, 1, 9)$
- ۵۲- در تابع $z = e^{xy} + xy$ در نقطه $x = y = 0$ $\partial^2 z/\partial x \partial y$ کدام است؟
 (۱) ۲ (۲) ۰ (۳) ۳ (۴) ۱
- ۵۳- دیفرانسیل کامل تابع $z = x^2 + y^2 + 2xy$ در نقطه $x = y = 1$ کدام است؟
 (۱) $dx + dy$ (۲) $4dx + 4dy$ (۳) $2dx + dy$ (۴) $2dx + 2dy$
- ۵۴- نقطه بحرانی تابع $z = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 12$ کدام است؟
 (۱) $(1, 1, 10)$ می‌نیمم (۲) $(1, 1, 10)$ ماکزیمم (۳) $(0, 0, 8)$ می‌نیمم (۴) $(0, 0, 8)$ ماکزیمم
- ۵۵- در تابع $z = x^2 + y^2$ با فرض $x + y = 2$ نقطه بحرانی کدام است؟
 (۱) $(1, 1, 2)$ می‌نیمم (۲) $(1, 1, 2)$ ماکزیمم (۳) $(0, 2, 4)$ ماکزیمم (۴) $(2, 0, 4)$ ماکزیمم
- ۵۶- در تابع $z = 1/x + 1/y$ حاصل $x.\partial z/\partial x + y.\partial z/\partial y$ کدام است؟
 (۱) $-z$ (۲) z (۳) $2z$ (۴) $3z$

۵۷- در عبارت $0 = x^2 + y^2 + z^2 - 3xyz$ مقدار $\partial z / \partial x$ در نقطه $x = y = z = 1$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) -۲ (۳) -۱ (۴) ۱

۵۸- اگر $z = x/y - y/x + 5$ باشد، حاصل عبارت $\partial z / \partial x + y \partial z / \partial y$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۲ (۳) z (۴) صفر

۵۹- ماکزیم تابع $z = xy$ در صورتی که $x + y = 8$ باشد، کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) ۴ (۳) ۸ (۴) ۹

۶۰- در تابع $z = 4y^2 + 2x - x^2 + 8$ مقدار z در نقطه ماکزیم کدام است؟

- (۱) ۸ (۲) ۱۱ (۳) ۹ (۴) ۱۰

۶۱- اگر $u = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ باشد، مقدار $\partial^2 u / \partial x^2$ برای $x = 1$ و $y = 1$ کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{15}$ (۲) $\frac{3}{25}$ (۳) $\frac{4}{25}$ (۴) $\frac{5}{25}$

۶۲- اگر داشته باشیم $1 + xyz = e^{x+y+z}$ مقدار z_x برای $x = y = z = 0$ کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $-\frac{2}{3}$ (۴) $-\frac{3}{2}$

۶۳- در تابع $z = x^2 + y^2 - xy$ مقدار dz برای $x = y = 1$ و $dx = dy = 0.1$ کدام است؟

- (۱) 0.1 (۲) 0.2 (۳) 1.2 (۴) 2.2

۶۴- مقدار ماکزیم تابع $z = 6 + 3y^2 - 2x^2$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۶ (۴) ۸

۶۵- نقطه بحرانی تابع $z = 2x^2 - 2xy + y^2 + 5x - 3y$ چگونه است؟

- (۱) می نیم (۲) ماکزیم (۳) زنی (۴) عطف

۶۶- برد تابع $z = \sqrt{4 - 2x^2 - y^2}$ کدام است؟

- (۱) $[0, 2]$ (۲) $\mathbb{R}^+$ (۳) $[0, 2]$ (۴) $[0, 4]$

۶۷- در تابع دومتغیره $u = \ln \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$ مقدار $\partial^2 u / \partial x^2 + \partial^2 u / \partial y^2$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۰ (۳) $x - a$ (۴) $y - b$

۶۸- نقطه بحرانی تابع $z = 4 - x^2 - y^2$ کدام است؟

- (۱) $(0, 0, 4)$ می نیم (۲) $(1, 1, 2)$ ماکزیم (۳) $(1, 1, 2)$ می نیم (۴) $(0, 0, 4)$ ماکزیم

۶۹- مقدار ماکزیم تابع $z = -x^2 - y^2 + 1$ با شرط $x - y = 0$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) صفر (۳) -۱ (۴) ۲

۷۰- طول نقطه ماکزیم تابع $z = 4 - x^2 - y^2$ با شرط $x + y = 2$ کدام است؟

- (۱) ۰ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) -۱

۷۱- در تابع دو متغیره $z = xe^y + ye^x$ حاصل عبارت $\partial^2 z / \partial x^2 + \partial^2 z / \partial y^2$ کدام است؟

- (۱) ye^x (۲) $e^x + e^y$ (۳) z (۴) xe^y

۷۲- اگر $z = xy$ باشد، مقدار dz در نقطه $x = y = 1$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) $dxdy$ (۳) $dx + dy$ (۴) $dx + dy + dxdy$

۷۳- مقدار ماکزیم تابع $z = 2^0 - x^2 - 4y^2 + 8y + 2x$ کدام است؟

- ۱۵ (۱) ۲۰ (۲) ۲۴ (۳) ۲۵ (۴)

۷۴- حداکثر تابع $z = xy$ اگر $x + y = 16$ باشد، کدام است؟

- ۳۲ (۱) ۴۸ (۲) ۶۴ (۳) ۲۵۶ (۴)

۷۵- اگر $Z = U^2 + V^2 - 2UV$ و $U = r \cos \theta$ و $V = r \sin \theta$ باشد، $\partial z / \partial \theta$ کدام است؟

- (۱) $(2U - 2V)(-r \sin \theta)$ (۲) $(2V - 2U)(r \cos \theta)$ (۳) $-2r^2 \cos 2\theta$ (۴) $-2r^2 \sin 2\theta$

۷۶- اگر داشته باشیم $z = x^2/2y^2 + y^2/2x^2$ مقدار $x \cdot \partial z / \partial x + y \cdot \partial z / \partial y$ کدام است؟

- (۱) z (۲) صفر (۳) $2z$ (۴) $\frac{x^2}{y^2}$

۷۷- از تابع ضمنی $x^2 - y^2 + xyz - xy = 0$ مقدار $\partial z / \partial x$ در نقطه $(1, 1, 1)$ برابر کدام است؟

- (۱) -2 (۲) -1 (۳) 1 (۴) 2

۷۸- مختصات نقطه بحرانی تابع $z = x^2 + 2y^2 + 2x - 4y$ کدام است؟

- (۱) $(0, 0, 0)$ (۲) $(1, 1, 1)$ (۳) $(1, -1, 1)$ (۴) $(-1, 1, -3)$

۷۹- اگر داشته باشیم $\begin{cases} z = x^2 - y^2 \\ x = t \cos t \\ y = t \sin t \end{cases}$ در نقطه $t = \pi/4$ ، dz/dt کدام است؟

- (۱) $-\frac{\pi^2}{8}$ (۲) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۴) π

۸۰- در تابع دوستیری $z = x^2 + 4xy + 2y^2$ ، مقدار d^2z کدام است؟

- (۱) $12dx dy$ (۲) $2dx^2 + 2dy^2$ (۳) $2d^2x + 2d^2y$ (۴) $2dx^2 + 4dy dx + 2dy^2$

۸۱- برد (Range) تابع حقیقی $z = x^2/(x^2 + y^2)$ کدام است؟

- (۱) R (۲) R^+ (۳) $[0, 1]$ (۴) $R^+ \cup \{0\}$

۸۲- ارتفاع نقطه بحرانی تابع $z = 2x^2 - xy + y^2 + 1$ کدام است؟

- (۱) 0 (۲) 2 (۳) 4 (۴) 10

۸۳- می‌نیم تابع $z = x^2 + y^2$ با توجه به شرط $x + 2y = 1$ کدام است؟

- (۱) 10 (۲) 24 (۳) 20 (۴) 18

۸۴- در تابع $z = y \ln x + xe^y$ مقدار $\partial^2 z / \partial x \partial y$ در نقطه $(1, 0, 1)$ کدام است؟

- (۱) 2 (۲) 3 (۳) 1 (۴) صفر

۸۵- اگر $z = e^{y/x}$ باشد حاصل $x \cdot \partial z / \partial x + y \cdot \partial z / \partial y$ کدام است؟

- (۱) $z(xy)^{-1}$ (۲) صفر (۳) z (۴) xyz

۸۶- نقطه بحرانی تابع $z = x^2 + y^2 - 2x + 4y + 2$ کدام است؟

- (۱) $(1, -2, -3)$ ماکزیم (۲) $(-1, 2, 17)$ می‌نیم (۳) $(-1, 2, 17)$ ماکزیم (۴) $(1, -2, -3)$ می‌نیم

۸۷- دیفرانسیل کامل $z = x \ln y + e^{1/x}$ در نقطه $x = y = 1$ کدام است؟

- (۱) $dy - dx$ (۲) $dy - edx$ (۳) $dy + dx$ (۴) $dy + edx$

۸۸- $\partial z / \partial x$ در عبارت $z = x^2 y^2 z^2 = xyz$ در نقطه $x = y = z = 1$ کدام است؟

- (۱) ۲- (۲) -۱ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) ۱

۸۹- در تابع دومتغیره $U = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ مقدار $\partial^2 U / \partial x \partial y$ به ازای $x = y = 1$ کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) ۱

۹۰- اگر $z = \ln(x^2 + y^2)$ باشد مقدار $\partial^2 z / \partial x^2 + \partial^2 z / \partial y^2$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) $\frac{1}{x^2 + y^2}$ (۴) $\frac{xy}{x^2 + y^2}$

۹۱- اگر $z = x/y - y/x$ باشد، حاصل $xz'_x + yz'_y$ کدام است؟

- (۱) -z (۲) z (۳) ۲z (۴) ۰

۹۲- اگر $z = x^2 + y^2$ ، $dx = dy = 1$ و $x = y = 2$ مقدار dz کدام است؟

- (۱) 0.2 (۲) 0.4 (۳) 0.8 (۴) ۱

۹۳- مقدار ماکزیمم تابع $z = -x^2 + 2x - y^2 + 4y + 20$ کدام است؟

- (۱) ۱۵ (۲) ۱۸ (۳) ۲۰ (۴) ۲۵

۹۴- نقطه بحرانی تابع $z = x^2 + y^2$ با شرط $x + y = 4$ کدام است؟

- (۱) $(2, 1, 10)$ (۲) $(0, 4, 16)$ (۳) $(2, 2, 8)$ (۴) $(1, 3, 10)$

۹۵- از رابطه $3x^2 + 2y^2 - 5z^2 + xyz = c$ مقدار $\partial z / \partial x$ به ازای $x = y = z = 1$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{7}{3}$ (۲) $-\frac{4}{9}$ (۳) $\frac{7}{9}$ (۴) $\frac{5}{4}$

۹۶- اگر $z = x^2 + y^2$ باشد، $xz'_x + yz'_y$ کدام است؟

- (۱) z (۲) ۲z (۳) ۳z (۴) ۴z

۹۷- در تابع $z = (x + y)/(x - y)$ مقدار z'_x در نقطه نظیر $x = 2$ و $y = 1$ کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) ۲

۹۸- نقطه بحرانی تابع $z = xy - x - y$ با کدام مختصات است؟

- (۱) $(1, -1, -1)$ (۲) $(-1, 1, -1)$ (۳) $(1, 0, -1)$ (۴) $(1, 1, -1)$

۹۹- نقطه بحرانی تابع $z = xy - x - y$ چگونه است؟

- (۱) ماکزیمم مطلق (۲) ماکزیمم نسبی (۳) می نیمم نسبی (۴) زینی

۱۰۰- دیفرانسیل مرتبه اول تابع $z = x^2 + y^2$ در ازای $x = y = 1$ و $dx = dy = 0.1$ کدام است؟

- (۱) 0.1 (۲) 0.2 (۳) 0.4 (۴) 0.6

۱۰۱- مقدار ماکزیمم یا می نیمم تابع $z = xy$ با شرط $x + y = 2$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۰۲- در سؤال قبل، نقطه بحرانی چگونه است؟

- (۱) زینی (۲) عطف (۳) می نیمم (۴) ماکزیمم

۱۰۳- دامنه تابع $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ کدام است؟

- (۱) $x^2 + y^2 \geq 4$ (۲) $x^2 + y^2 < 4$ (۳) $x^2 + y^2 > 4$ (۴) $x^2 + y^2 \leq 4$

۱۰۴- برد تابع $z = \sqrt{9 - x^2 - 2y^2}$ کدام است؟

- (۱) $[0, 3]$ (۲) $[0, 9]$ (۳) $[0, 4]$ (۴) $\mathbb{R}^+$

۱۰۵- اگر $z = x^2 + y^2$ باشد، d^2z کدام است؟

- (۱) $dx^2 + dy^2$ (۲) $2dx^2 + 2dy^2$ (۳) $2dx^2 + 4dxdy + 2dy^2$ (۴) $2dx^2 - 4dxdy + dy^2$

۱۰۶- اگر $z = x^2 + y^2 - 2x$ باشد، نقطه بحرانی این تابع کدام است؟

- (۱) $(-1, 0, 2)$ (۲) $(1, 0, -1)$ (۳) $(0, 1, 1)$ (۴) $(0, 0, 0)$

۱۰۷- اگر $z = (x^2 + y^2)/2xy$ باشد، مقدار تابع $\partial z/\partial x$ در $x = 2$ و $y = 1$ کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{8}$ (۲) $\frac{3}{16}$ (۳) $\frac{5}{16}$ (۴) $\frac{1}{2}$

۱۰۸- اگر $z = x/2y + 2y/x$ باشد، مقدار $x.z'_x + y.z'_y$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) z (۳) ۱ (۴) $2z$

۱۰۹- اگر $z = x^2 + y^2 + xy$ باشد، مقدار dz در نقطه $x = 1$ و $y = 1$ کدام است؟

- (۱) $2dz + 2dy + dxdy$ (۲) $3dx + 3dy$ (۳) $dx + dy + 2dxdy$ (۴) صفر

۱۱۰- اگر تابع هدف $z = x^2 + y^2$ و قید $x + y = 4$ باشد، در نقطه بحرانی مقدار z کدام است؟

- (۱) ۱۶ (۲) ۸ (۳) ۴ (۴) ۲

۱۱۱- اگر $U = r \cos \theta$ و $V = r \sin \theta$ باشد، مقدار $\partial z/\partial r$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) $(2V - 2U) \cos \theta$ (۳) $2r - 4r \sin \theta \cos \theta$ (۴) $(2U - 2UV) \sin \theta$

۱۱۲- اگر داشته باشیم $z = x^2/2y^2 + 2y^2/x^2$ ، مقدار $x.\partial z/\partial x + y.\partial z/\partial y$ کدام است؟

- (۱) ۰ (۲) z (۳) $2z$ (۴) $3z$

۱۱۳- در معادله ضمنی $z^2 + x^2 + y^2 - 5xyz + 3x - 2zy = 0$ ، مقدار $\partial z/\partial x$ در نقطه $(1, 1, 2)$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{2}$ (۲) $-\frac{1}{3}$ (۳) ۰ (۴) ۱

۱۱۴- برد تابع $Z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ به معادله Z کدام است؟

- (۱) $\mathbb{R}$ (۲) $\mathbb{R}^+$ (۳) $\mathbb{R} \cup \{0\}$ (۴) $[0, 3]$

۱۱۵- نقطه بحرانی تابع $z = x^2 + y^2$ نسبت به قید $x + 2y = 5$ کدام است؟

- (۱) $(1, 2, 5)$ (۲) $(3, 1, 10)$ (۳) $(0, \frac{5}{2}, \frac{25}{4})$ (۴) $(5, 0, 25)$

۱۱۶- در مسأله قبل نوع نقطه بحرانی کدام است؟

- (۱) می‌نیم (۲) زینی (۳) عطف (۴) ماکزیم

۱۱۷- اگر داشته باشیم $z = f(x^2 + 2y^2, 4x^2y)$ ، مقدار $\partial z/\partial x$ به ازای $x = 2$ و $y = 1/2$ کدام است؟

- (۱) $8f'_1 + 2f'_2$ (۲) $4f'_1 + 8f'_2$ (۳) $6f'_1 + 4f'_2$ (۴) $4f'_1 + 4f'_2$

۱۱۸- اگر f تابعی حقیقی به معادله $2x^2 + y^2 - z^2 - 2xyz = 0$ باشد، در نقطه $x = y = z = 1$ ، مقدار z'_x کدام است؟

- (۱) -2 (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) ۲

۱۱۹- اگر $U = q_1q_2r = 160$ و $4q_1 + 8q_2 = 160$ باشد، مقدار ماکزیم تابع مقید U چقدر است؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۲۰ (۳) ۱۰۰ (۴) ۲۰۰

سری‌ها

۱-۱۰ دنباله

اگر در تابع $u_n = f(n)$ دامنه، مجموعه اعداد صحیح غیرمنفی باشد، u_n یک دنباله است. ضابطه تابع یعنی $u_n = f(n)$ موسوم به جمله عمومی یا جمله n ام دنباله است، که مشخص‌کننده قاعده تشکیل جمله‌هاست، در این صورت به n مقادیر مختلف ۱ و ۲ و ۳ و ... را نسبت می‌دهیم.

$$u_1 = f(1), \quad u_2 = f(2), \quad \dots, \quad u_n = f(n)$$

جمله اول دنباله جمله دوم دنباله جمله n ام دنباله

به بیان دیگر، دنباله عبارت است از مجموعه زوج‌های مرتبی که به صورت $(n, f(n))$ است، که در آن n یک عدد صحیح غیرمنفی است. چون قلمرو همه دنباله‌ها یکی است، برای نمایش دنباله از نماد $\{u_n\}$ هم می‌توان استفاده کرد (مسئله ۱).

۲-۱۰ حد یک دنباله

دنباله $u_n = f(n)$ را در نظر می‌گیریم، بنا به تعریف حد این تابع هنگامی که n به سمت بی‌نهایت میل می‌کند برابر L است، یعنی:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$$

۱-۲-۱۰ دنباله هم‌گرا

اگر دنباله‌ای چون $u_n = f(n)$ حد داشته باشد، دنباله هم‌گراست، یعنی:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = L$$

۲-۲-۱۰ دنباله واگرا

اگر دنباله‌ای چون $u_n = f(n)$ هم‌گرا نباشد، واگراست. به بیان دیگر اگر در رابطه فوق L بی‌نهایت (نامعین) باشد، دنباله واگراست (مسئله ۲).

۳-۱۰ دنباله‌های خاص

تعریف: دنباله‌ای چون $\{u_n\}$ موسوم است به:

(۱) صعودی اگر به ازای هر n داشته باشیم $u_1 \leq u_2 \leq \dots \leq u_n$ و یا به طور خلاصه $u_n \leq u_{n+1}$.

(۲) نزولی اگر به ازای هر n داشته باشیم $u_1 \geq u_2 \geq \dots \geq u_n$ و یا به طور خلاصه $u_n \geq u_{n+1}$.

(۳) یکنوا اگر دنباله صعودی یا نزولی باشد (مسئله ۳).

تعریف: عدد c را یک «کرانه بالایی» دنباله $\{u_n\}$ می‌نامیم هرگاه به ازای هر عدد صحیح و مثبت n داشته باشیم $u_n \leq c$ و عدد c را یک «کرانه پایینی» دنباله $\{u_n\}$ می‌نامیم هرگاه به ازای هر عدد صحیح و مثبت n داشته باشیم $u_n \geq c$.

تعریف: دنباله‌ای چون $\{u_n\}$ را کران‌دار می‌نامیم اگر و تنها اگر کرانه بالا و کرانه پایینی داشته باشد.

۱۰-۴ چند قضیه مهم

(۱) هر دنباله کران دار یکنوا، همگراست. یعنی دارای یک حد متناهی است.

(۲) هر دنباله یکنوا همگرا، کراندار است.

(۳) فرض کنید $\{u_n\}$ یک دنباله صعودی و c یک کرانه بالایی آن باشد. در این صورت $\{u_n\}$ همگراست و $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \leq c$.

(۴) فرض کنید $\{u_n\}$ یک دنباله نزولی و c یک کرانه پایینی آن باشد، در این صورت $\{u_n\}$ همگراست و $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \geq c$.

۱۰-۵ سری

اگر $\{u_n\}$ دنباله‌ای باشد و $S_n = \sum_{i=1}^n u_i = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$ آن‌گاه دنباله $\{S_n\}$ را یک سری نامحدود و یا سری می‌نامند. اعداد $u_1, u_2, u_3, \dots$ جملات سری نامحدود نام دارند. داریم $S_1 = u_1$ و $S_2 = u_1 + u_2$ و $\dots$ و $S_k = \sum_{i=1}^k u_i = u_1 + u_2 + \dots + u_k$ و $\dots$ مجموع جزئی k ام سری مفروض نام دارد.

۱۰-۶ تعریف همگرایی و واگرایی

اگر $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ سری نامحدود و با مجموع‌های جزئی $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$ باشد، آن‌گاه چنانچه $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ وجود داشته باشد و برابر با S باشد، می‌گوییم سری مفروض همگراست و S مجموع این سری نامحدود است. اگر $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ وجود نداشته باشد سری واگراست و مجموع ندارد. به بیان دیگر در سری واگرا S برابر بی‌نهایت بوده و یا اصولاً حد S وجود ندارد (مسئله ۴).

۱۰-۶-۱ سری هارمونیک

سری که به شکل زیر است، سری هارمونیک (همسازه) نامیده می‌شود.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

سری هارمونیک یک سری واگراست.

۱۰-۶-۲ سری هندسی

سری که به شکل زیر است، سری هندسی نامیده می‌شود.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} + \dots$$

r قدرنسبت تصاعد هندسی است و برابر $r = u_n / u_{n-1}$ است.

قضیه: اگر $|r| < 1$ ، سری هندسی همگرا و به مجموع $a / (1 - r)$ می‌گراید. و اگر $|r| \geq 1$ ، سری هندسی واگراست (مسئله ۵).

۱۰-۶-۳ آزمون جمله n ام

اگر سری نامتناهی $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ همگرا باشد، آن‌گاه $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ است.^۱ از این قضیه نتیجه می‌شود که اگر $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \neq 0$ ،

و یا اگر این حد وجود نداشته باشد، آن‌گاه سری $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ واگراست (مسئله ۶).

(۱) اگر تعداد جملات سری محدود باشد، سری را یک سری محدود نامند.

(۲) این قضیه شرط لازم همگرایی است. لازم به تذکر است که اگر $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ نتیجه‌ی نمی‌گیریم و باید به آزمون دیگری

متوسل شویم.

۱۰-۶-۴ آزمون چندجمله‌ای

اگر $P(n)$ و $Q(n)$ به ترتیب چندجمله‌ای‌های با درجات p و q باشند، $\sum_{n=1}^{+\infty} P(n)/Q(n)$ ، آن‌گاه:

(۱) اگر $q > p + 1$ ، سری هم‌گراست.

(۲) اگر $q \leq p + 1$ ، سری واگراست (مسئله ۷).

۱۰-۷ قضایای مربوط به نوع سری‌ها

(۱) اگر از یک سری تعداد محدودی از جملات را حذف کنیم، نوع سری تغییر نمی‌کند.

(۲) اگر جملات یک سری را در عدد معینی ضرب کنیم، نوع سری تغییر نمی‌کند.

(۳) اگر دو سری هم‌گرا u_n و v_n را در نظر بگیریم، مجموع و تفاضل نظیر به نظیر این دو سری، سری‌های هم‌گرا خواهد بود.

(۴) اگر دو سری با جملات مثبت واگرا باشد، مجموع نظیر به نظیر این دو سری نیز واگراست و نمی‌تواند آن‌ها ممکن است واگرا یا هم‌گرا باشد.

(۵) اگر سری u_n هم‌گرا و سری v_n واگرا باشد، مجموع نظیر به نظیر این دو سری واگراست (مسئله ۸).

۱۰-۸ سری نامحدود با جملات مثبت

اگر تمام جملات یک سری نامحدود مثبت باشند، آن را سری نامحدود با جملات مثبت نامند و دنباله مجموع‌های جزئی این سری صعودی است.

قضیه: سری نامحدود مثبت، هم‌گراست اگر و تنها اگر دنباله مجموع‌های جزئی آن دارای کرانه بالا باشد.

۱۰-۸-۱ آزمون مقایسه

فرض کنید $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ یک سری مثبت باشد (مسئله ۹):

(۱) اگر $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ سری مثبتی باشد که می‌دانیم هم‌گراست، و $u_n \leq v_n, \forall n$ ، آن‌گاه $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ هم‌گراست.

(۲) اگر $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ سری مثبتی باشد که می‌دانیم واگراست، و $u_n \geq v_n, \forall n$ ، آن‌گاه $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ واگراست.

۱۰-۸-۲ آزمون مقایسه حد

فرض کنید $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ و $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ دو سری مثبت باشند (مسئله ۱۰):

(۱) اگر $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n/v_n = L > 0$ ، آن‌گاه یا هر دو سری هم‌گرا هستند یا هر دو واگرايند.

(۲) اگر $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n/v_n = 0$ ، و اگر $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ هم‌گرا باشد، آن‌گاه $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ هم‌گراست.

(۳) اگر $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n/v_n = +\infty$ ، و اگر $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ هم‌گرا باشد، آن‌گاه $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ واگراست.

۱۰-۸-۳ آزمون p

در سری $\sum_{n=1}^{+\infty} 1/n^p = 1/1^p + 1/2^p + \dots + 1/n^p + \dots$ که در آن p ثابت دلخواه است:

(۱) اگر $p > 1$ ، نوع سری هم‌گراست.

(۲) اگر $p \leq 1$ ، نوع سری واگراست (مسئله ۱۱).

۱۰-۸-۴ آزمون دالامبر

در سری $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ عبارت $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1}/u_n = L$ را تشکیل می‌دهیم:

(۱) اگر $L > 1$ ، سری واگراست.

(۲) اگر $L < 1$ ، سری هم‌گراست.

(۳) اگر $L = 1$ ، نتیجه‌ای نمی‌توان گرفت (مسئله ۱۲).

۱۰-۸-۵ آزمون کوشی

در سری مثبت $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ عبارت $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{u_n} = L$ را تشکیل می‌دهیم:

(۱) اگر $L > 1$ ، سری واگراست.

(۲) اگر $L < 1$ ، سری هم‌گراست.

(۳) اگر $L = 1$ ، نتیجه‌ای نمی‌توان گرفت (مسئله ۱۳).

۱۰-۸-۶ آزمون انتگرال

فرض کنید f تابعی باشد که پیوسته، نزولی، و مقدارش به ازای هر $x \geq 1$ مثبت است در این صورت سری نامتناهی:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f(n) = f(1) + f(2) + \dots + f(n) + \dots$$

(۱) هم‌گراست وقتی انتگرال نامتناهی $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ وجود داشته باشد.

(۲) واگراست وقتی که $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b f(x) dx = +\infty$ (مسئله ۱۴).

۱۰-۹ سری‌های متناوب

سری‌هایی که جملاتشان به تناوب مثبت و منفی‌اند، سری‌های متناوب نامند، اگر به ازای تمام اعداد صحیح و مثبت n ، $u_n > 0$ ، u_n آن‌گاه سری:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} u_n = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots + (-1)^{n+1} u_n + \dots$$

و سری:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n u_n = -u_1 + u_2 - u_3 + u_4 - \dots + (-1)^n u_n + \dots$$

را سری متناوب گویند.

۱۰-۹-۱ آزمون سری‌های متناوب

اگر اعداد $u_1, u_2, u_3, \dots$ و $u_n, \dots$ یک در میان مثبت و منفی باشند و

اولاً: جملات از نظر قدرمطلق نزولی باشند، یعنی $|u_n| < |u_{n+1}|$ یا $|u_1| > |u_2| > |u_3| > \dots$

ثانیاً: حد جمله عمومی برابر صفر باشد، یعنی $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

آن‌گاه سری متناوب $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ هم‌گراست و مجموع جملات آن از جمله اول سری کوچک‌تر است (مسئله ۱۵).

(۱) وقتی در سری‌ها با فاکتوریل مواجه باشیم، بهترین آزمون، آزمون دالامبر است.

۲-۹-۱۰ چند تعریف

- (۱) می‌گوییم سری $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ مطلقاً هم‌گراست، اگر سری $\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|$ هم‌گرا باشد.
- (۲) اگر سری $\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|$ واگرا بوده و سری $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ هم‌گرا باشد، سری $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ به‌طور مشروط هم‌گراست.
- (۳) اگر سری $\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|$ واگرا باشد، جز در حالتی که سری $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ متناوب باشد، نوع سری را در حالت کلی نمی‌توان تعیین کرد.
- قضیه:** اگر سری نامتناهی $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ مطلقاً هم‌گرا باشد، هم‌گرا هم هست.

۳-۹-۱۰ آزمون نسبت^۱

فرض کنید $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ یک سری نامتناهی که در آن هر u_n ذ‌صفر است، در این صورت:

- (۱) اگر $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_{n+1}/u_n| = L < 1$ ، سری مفروض مطلقاً هم‌گراست.
- (۲) اگر $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_{n+1}/u_n| = L > 1$ یا اگر $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_{n+1}/u_n| = +\infty$ ، سری واگراست.
- (۳) اگر $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_{n+1}/u_n| = L = 1$ ، نتیجه‌ای نمی‌توان گرفت (مسأله ۱۶).

۱۰-۱۰ سری‌های توانی

جملات یک سری تاکنون جملات یک دنباله بوده‌اند، یعنی، توابع حقیقی که دامنه آن‌ها اعداد صحیح غیرمنفی بوده‌اند. اکنون فرض می‌کنیم این جملات علاوه بر اینکه توابعی از اعداد صحیح‌اند، توابعی یک‌منغیره، از متغیر مستقلی مانند x ، هستند. تعریف سری توانی برحسب $(x - a)$ ، سری به‌صورت زیر است:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (x - a)^n = c_0 + c_1(x - a) + c_2(x - a)^2 + \dots + c_n(x - a)^n + \dots$$

حالت خاصی از سری فوق وقتی به‌دست می‌آید که $a = 0$ است، در این صورت سری به‌صورت یک سری توانی برحسب x درمی‌آید که عبارت است از:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n + \dots$$

موضوع هم‌گرایی و واگرایی چنین سری‌هایی، به‌وضوح، به مقدار واقعی فرض شده برای x بستگی دارد. یک سری توانی برحسب x (یا برحسب $x = 0$) ممکن است بازای تمام مقادیر x هم‌گرا یا بازای هیچ مقدار دیگر x به‌جز $x = 0$ هم‌گرا نباشد و یا ممکن است بازای بعضی از مقادیر x هم‌گرا و برای بقیه واگرا باشد.

تعریف: اگر یک سری توانی بازای مجموعه مقادیر x در فاصله $-R < x < R$ هم‌گرا باشد، در این صورت فاصله $-R < x < R$ موسوم به فاصله هم‌گرایی و R شعاع هم‌گرایی است.

نکات مهم:

- ۱- اگر شعاع هم‌گرایی سری توانی $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ برابر R باشد، فاصله هم‌گرایی یکی از بازه‌های $(-R, R)$ ، $[-R, R]$ ، $(-R, R]$ ، یا $[-R, R)$ است.

(۱) آزمون نسبت غالباً برای تعیین اینکه یک سری مفروض مطلقاً هم‌گراست یا نه، به‌کار می‌رود.

۲- اگر شعاع همگرایی سری توانی $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(x-a)^n$ برابر R باشد، فاصله همگرایی یکی از بازه‌های $(a-R, a+R)$ ، $[a-R, a+R]$ ، $(a-R, a+R]$ یا $[a-R, a+R)$ است.

۱۰-۱۰-۱۱ آزمون دالامبر برای سری توانی

در به‌کار بردن آزمون دالامبر مجبوریم قدرمطلق جملات را در نظر بگیریم. زیرا نمی‌توانیم مطمئن باشیم که همه جملات سری مثبت هستند.

(۱) سری توانی برحسب x باشد، یعنی $u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ اگر $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_{n+1}/u_n| = L$ باشد، در این صورت:

(الف) اگر $L = 0$ ، سری به‌ازای جميع مقادیر x هم‌گراست.

(ب) اگر $L \neq 0$ ، سری به‌ازای جميع مقادیر x واقع در فاصله $-1/L < x < 1/L$ هم‌گرا و خارج از این فاصله واگراست، نقاط انتهایی نیز باید جداگانه بررسی شود.

(۲) سری توانی برحسب $(x-a)$ باشد، یعنی $u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(x-a)^n$ اگر $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_{n+1}/u_n| = L$ باشد، در این صورت:

(الف) اگر $L = 0$ ، سری به‌ازای جميع مقادیر x هم‌گراست.

(ب) اگر $L \neq 0$ ، سری به‌ازای جميع مقادیر x واقع در فاصله $a - 1/L < x < a + 1/L$ هم‌گرا و خارج از این فاصله هم‌گراست، نقاط انتهایی نیز باید جداگانه بررسی شود (مسئله ۱۷).

۱۰-۱۰-۲ چند قضیه مهم

(۱) اگر سری $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ به‌ازای $x = x_1$ ($x_1 \neq 0$) هم‌گرا باشد، آنگاه به‌ازای همه مقادیر x با شرط $|x| < |x_1|$ مطلقاً هم‌گراست.

(۲) اگر سری $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ به‌ازای $x = x_2$ واگرا باشد، آنگاه به‌ازای همه مقادیر x با شرط $|x| < |x_2|$ واگراست.

(۳) اگر سری $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ داده شده باشد، دقیقاً یکی از شرایط زیر برقرار است:

(الف) سری هم‌گراست تنها وقتی که $x = 0$.

(ب) سری به‌ازای همه مقادیر x مطلقاً هم‌گراست.

(ج) عددی چون $R > 0$ وجود دارد که سری به‌ازای تمام مقادیری از x که در $|x| < R$ صادق‌اند مطلقاً هم‌گراست و به‌ازای تمام مقادیری از x که در $|x| > R$ صدق می‌کنند، واگراست.

۱۰-۱۱-۱۱ سری تیلور

تابع f را به‌صورت یک سری توانی برحسب x در نظر بگیرید، یعنی فرض کنید:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n + \dots \quad (10-11)$$

شعاع همگرایی این سری $R > 0$ است، گوئیم چنین تابعی بر $(-R, R)$ بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر است، مشتق‌گیری‌های متوالی از تابع (۱۰-۱۱) نتیجه می‌دهد:

$$f^{(n)}(x) = n(n-1)(n-2)\dots(3)2c_n + \dots + (n+1)(n)(n-1)\dots 2c_{n+1}x + \dots \quad (11-10)$$

که $f^{(n)}(x) = d^n f(x)/dx^n$ همان مشتق مرتبه n ام تابع $f(x)$ است. اگر $x = 0$ آن‌گاه هریک از مشتق‌های متوالی به یک جمله از سری تبدیل می‌شود، یعنی:

$$f(0) = c_0, f'(0) = c_1, f''(0) = 2c_2 \text{ یا } \frac{f''(0)}{2} = c_2, \dots, f^{(n)}(0) = n!c_n \quad (3-10)$$

پس بنابر (۱-۱۰) و (۳-۱۰)، سری توانی f برحسب x را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \dots \quad (4-10)$$

در حالت کلی‌تر، تابع f را به صورت یک سری توانی برحسب $(x-a)$ در نظر بگیرید، یعنی فرض کنید:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \dots + c_n(x-a)^n + \dots \quad (5-10)$$

اگر شعاع همگرایی این سری R باشد، آن‌گاه f بر $(a-R, a+R)$ بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر است، مشتق‌گیری‌های متوالی از تابع (۵-۱۰) نتیجه می‌دهد:

$$f^{(n)}(x) = n(n-1)(n-2)\dots(3)2c_n + (n+1)(n)(n-1)\dots 2c_{n+1}(x-a) + \dots$$

$$f^{(n)}_x = n!c_n + (n+1)(n)(n-1)\dots 2c_{n+1}(x-a) + \dots \quad (6-10)$$

اگر $x = a$ آن‌گاه هریک از مشتق‌های متوالی به یک جمله از سری تبدیل می‌شود، زیرا $(a-a=0)$.

$$f(a) = c_0, f'(a) = c_1, f''(a) = 2c_2 \text{ یا } \frac{f''(a)}{2} = c_2, \dots, f^{(n)}(a) = n!c_n \text{ یا } \frac{f^{(n)}(a)}{n!} c_n \quad (7-10)$$

پس بنابر (۵-۱۰) و (۷-۱۰)، سری توانی f برحسب x را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n + \dots \quad (8-10)$$

سری (۸-۱۰) به سری تیلور f در a موسوم است. در حالت خاص در (۷-۱۰) وقتی که $a=0$ ، همان (۴-۱۰) است که سری مک‌لورن نامیده می‌شود، نتیجه تحلیل فوق این است که اگر سری توانی برای تابعی مفروض برحسب جملاتی به صورت توان‌هایی از $(x-a)$ موجود باشد، آن‌گاه ضرایب باید توسط $c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$ داده شوند (مسئله ۱۸ و ۱۹).

نکات مهم:

در زیر بسط مک‌لورن چند تابع معرفی می‌شود:

$$\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots, R = \infty \quad (1)$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots, R = \infty \quad (2)$$

$$\sin hx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots, -\infty < R < +\infty \quad (3)$$

$$\cos hx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots, -\infty < R < +\infty \quad (4)$$

$$\sin^{-1} x = x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2 \times 4} \frac{x^5}{5} + \frac{1 \times 3 \times 5}{2 \times 4 \times 6} \frac{x^7}{7} + \dots, |x| < 1 \quad (5)$$

$$\cos^{-1} x = \frac{\pi}{2} - \left(x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1 \times 3}{2 \times 4} \frac{x^5}{5} + \dots \right), |x| < 1 \quad (6)$$

مسائل نمونه فصل ۱۰

۱. اگر $u_n = 2n/(n+1)$ ، آنگاه $f(1)$ ، $f(2)$ ، $f(3)$ را بیابید.

۲. دنباله $u_n = n/(2n+1)$ هم‌گراست یا واگرا؟

۳. صعودی یا نزولی بودن دنباله $\{n/(n+1)\}$ را تعیین کنید.

(۱۶-۴). سری‌های زیر هم‌گراست یا واگرا؟

$$\begin{array}{llll} ۴) u_n = \frac{1}{n(n+1)} & ۵) u_n = \frac{1}{2^{n-1}} & ۶) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n}{2n+1} & ۷) \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots \\ ۸) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} & ۹) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} & ۱۰) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n+1} & ۱۱) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \\ ۱۲) u_n = \frac{1}{n!} & ۱۳) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n} & ۱۴) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt{\ln(n+1)}} & ۱۵) u_n = (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \\ ۱۶) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{2^n} & & & \end{array}$$

۱۷. در سری توانی $u_n = (-1)^{n+1}(x-1)^n/n$ ، اولاً: فاصله هم‌گرایی را بیابید. ثانیاً: به‌ازای چه مقادیری از x سری توانی هم‌گراست؟

۱۸. تابع $f(x) = \ln x$ را به سری تیلور، حول نقطه $x=1$ بسط دهید.

۱۹. سری مک‌لورن مربوط به e^x را تعیین کنید.

پاسخ مسائل نمونه فصل ۱۰

۱.

$$f(1) = 1, f(2) = \frac{2}{3}, f(3) = \frac{3}{4}$$

بنابراین چند تا از زوج‌های مرتب دنباله f عبارتند از $(1, 1)$ و $(2, 2/3)$ و $(3, 3/4)$.

۲.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} \text{ است}$$

۳.

$$u_1 = \frac{1}{2}, u_2 = \frac{2}{3}, u_3 = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4} \Rightarrow \text{دنباله صعودی است}$$

یا

$$u'_n = \frac{n+1-n}{(n+1)^2} = \frac{1}{(n+1)^2} > 0 \Rightarrow \text{دنباله صعودی است}$$

۴.

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$s_1 = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}, s_2 = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = 1 - \frac{1}{3}, \dots,$$

$$s_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \Rightarrow s_n = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - 0 = 1 \Rightarrow \text{هم‌گراست } u_n$$

۵.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} + \cdots$$

یک سری هندسی با ضوابط $a = 1$ و $r = 1/2$ است. سری هم‌گراست زیرا $|r| < 1$ و مجموع سری ۲ است چون $a/(1-r) = 2$.

۶.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n}{2n+1} = \frac{1}{2} \neq 0 \Rightarrow u_n \text{ واگراست}$$

۷.

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)}, \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+n} \Rightarrow P(n) = 1, Q(n) = n^2+n$$

درجات $P(n)$ و $Q(n)$ به ترتیب $p = 0$ و $q = 2$ ، بنابراین سری هم‌گراست.

۸. سری $\sum_{n=1}^{+\infty} 1/n$ سری هارمونیک است و واگرا و چون جملات این سری در عدد ثابت $1/2$ ضرب شده است، بنا به قضیه ۲ سری مفروض نیز واگراست.

۹.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \cdots$$

با مقایسه جمله n ام این سری با جمله n ام سری هارمونیک واگرا داریم:

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n} \quad \text{به ازای هر عدد صحیح و مثبت } n.$$

با توجه به آزمون مقایسه (۲) سری مفروض واگراست.

۱۰.

$$u_n = \frac{1}{2n+1}, v_n = \frac{1}{n}, \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{2n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} > 0$$

بنابراین $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ هر دو هم‌گرا یا هر دو واگرا می‌باشند، اما $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ واگراست، در نتیجه سری مفروض واگراست.

$$11. \sum_{n=1}^{+\infty} 1/\sqrt{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} 1/n^{1/2}, p = 1/3 < 1, \text{ بنابراین سری مفروض واگراست.}$$

۱۲.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{n!}}{\frac{n!}{(n+1)!}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1$$

در نتیجه u_n هم‌گراست.

۱۳.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^n} \right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0 < 1 \Rightarrow \text{سری هم‌گراست}$$

۱۴. فرض کنید $f(x) = 1/(x+1)\sqrt{\ln(x+1)}$. در این صورت به ازای هر $x \geq 1$ پیوسته و مقدارش مثبت است، همچنین اگر $1 \leq x_1 < x_2$ ، آن‌گاه $f(x_1) > f(x_2)$ ، لذا به ازای هر $x \geq 1$ نزولی است بنابراین:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{\ln(x+1)}} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b [\ln(x+1)]^{-\frac{1}{2}} \frac{dx}{x+1} = \lim_{b \rightarrow +\infty} 2\sqrt{\ln(x+1)} \Big|_1^b = +\infty$$

سری مفروض واگراست.

۱۵. داریم $|u_n| = 1/n$ بنابراین اولاً جملات از نظر قدرمطلق نزولی است زیرا $1 > 1/2 > 1/3 > \dots$ ثانیاً $\lim_{n \rightarrow \infty} 1/n = 0$ در نتیجه u_n هم‌گراست.

۱۶. داریم $u_n = (-1)^n n/2^n$ و $u_{n+1} = (-1)^{n+1} (n+1)/2^{n+1}$ بنابراین:

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \frac{n+1}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n} = \frac{n+1}{2n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \text{سری مطلقاً هم‌گراست}$$

۱۷

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} \frac{(x-1)^{n+1}}{n+1}}{(-1)^n \frac{(x-1)^n}{n}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| -\frac{n}{n+1} (x-1) \right| = |x-1|$$

بنابراین فاصله هم‌گرایی $0 < x < 2$ است. نقاط انتهایی باید بررسی شود. اگر $x = 0$ باشد سری به صورت $u_n = -1/n$ است که با توجه به آزمون p ($p = 1$)، واگراست. اگر $x = 2$ باشد سری به صورت $u_n = (-1)^{n+1} 1/n$ است و $|u_{n+1}| < |u_n|$ ، بنابراین سری متناوب هم‌گراست. از این رو سری اصلی به ازای $0 < x \leq 2$ هم‌گراست.

۱۸

$$f(x) = \ln x, f'(x) = \frac{1}{x}, f''(x) = -\frac{1}{x^2}, f'''(x) = \frac{2}{x^3}, \dots, f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} \frac{(n-1)!}{x^n} (x-a)^{n-1}$$

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n + \dots$$

$$f(x) = 0 + (x-1) - \frac{1}{2!} (x-1)^2 + \frac{1}{3!} (x-1)^3 + \dots + (-1)^{n+1} \frac{(n-1)!}{x^n} (x-a)^n + \dots$$

۱۹

$$f(x) = e^x, f'(x) = e^x, f''(x) = e^x, \dots, f^{(n)}(x) = e^x$$

در $a = 0$

$$f(0) = e^0 = 1, f'(0) = e^0 = 1, \dots, f^{(n)}(0) = e^0 = 1$$

$$e^x = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n + \dots$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

سؤالات تستی فصل ۱۰

۱- جملات دنباله $f(n) = \begin{cases} 1 & n \text{ فرد} \\ \frac{1}{n+1} & n \text{ زوج} \end{cases}$ کدام است؟

۱) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$ ۲) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$ ۳) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$ ۴) $1, 3, 5, 7, \dots$

۲- کدام یک از گزاره‌های زیر درباره دنباله $\{4n^2/(2n^2+1)\}$ صادق است؟

۱) هم‌گراست و به ۲ می‌گراید ۲) واگراست ۳) هم‌گراست و به ۴ می‌گراید ۴) واگراست و به ۴ می‌گراید.

۳- دنباله $u_n = 2/1, 3/3, 4/5, 5/7, \dots$

(۱) صعودی است (۲) واگراست (۳) هم‌گراست (۴) هیچ‌کدام

۴- دنباله $u_n = 2^{n+1} - 2$

(۱) واگراست (۲) هم‌گراست (۳) گاهی صعودی و گاهی نزولی است (۴) نه صعودی و نه نزولی است

۵- بزرگ‌ترین جمله دنباله $u_n = n^2/2^n$ کدام است؟

(۱) ۱ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{9}{8}$ (۴) $\frac{36}{64}$

۶- کدام یک از دنباله‌های زیر هم‌گرا نیست؟

(۱) $\{\sqrt{n^2+1} - n\}$ (۲) $\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n}\right\}$ (۳) $\left\{\frac{n+(-1)^n}{\sqrt{n}}\right\}$ (۴) $\{e^{-n}\}$

۷- کدام یک از دنباله‌های زیر صعودی است؟

(۱) $\{(-1)^n\}$ (۲) $\left\{\frac{2}{n^2+2}\right\}$ (۳) $\left\{\frac{n-4}{2n+1}\right\}$ (۴) $\left\{\frac{1}{n}\right\}$

۸- در دنباله $u_n = \begin{cases} 2n & n \text{ فرد} \\ 2u_{n-1} & n \text{ زوج} \end{cases}$ ، $u_1 + 3u_2 + \dots + u_n$ کدام است؟

(۱) 2^n (۲) $6 \cdot 2^n$ (۳) 6^n (۴) $24 \cdot 4^n$

۹- کدام یک از گزاره‌های زیر درباره دنباله $\left\{\frac{1+2(10^n)}{5+3(10^n)}\right\}$ صادق است؟

(۱) هم‌گراست و به $2/3$ می‌گراید (۲) واگراست و به $2/3$ می‌گراید
(۳) هم‌گراست و به $3/8$ می‌گراید (۴) واگراست و به $3/8$ می‌گراید

۱۰- کدام یک از دنباله‌های زیر هم‌گراست؟

(۱) $u_n = \frac{\ln n}{n}$ (۲) $u_n = \frac{2n^2}{e^{2n}}$ (۳) $u_n = \sqrt[n]{n}$ (۴) همه موارد ۱ و ۲ و ۳

۱۱- دنباله $\{u_n\}$ با $u_1 = 3$ و $u_{n+1} = u_{n+2} + u_n$ مفروض است، جمله چهارم این دنباله کدام است؟

(۱) ۵ (۲) ۷ (۳) ۹ (۴) ۱۱

۱۲- دنباله $\{u_n\}$ با $u_1 = 1$ و $u_{n+1} = 3u_n$ مفروض است، کدام گزاره درست است؟

(۱) جمله عمومی آن $u_n = (3)^{n-1}$ و واگراست. (۲) جمله عمومی آن $u_n = (3)^{n-1}$ و هم‌گراست.
(۳) جمله عمومی آن $u_n = (3)^{n-2}$ و واگراست. (۴) جمله عمومی آن $u_n = (3)^{n-2}$ و هم‌گراست.

۱۳- سری نامتناهی $\sum_{n=1}^{+\infty} 1/n(n+1)$ مفروض است، مجموع جزئی سوم این سری کدام است؟

(۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{3}{4}$

۱۴- سری $\sum_{n=1}^{+\infty} 1/3^{n-1}$

(۱) هم‌گراست و مجموع سری $3/2$ است. (۲) هم‌گراست و مجموع سری $2/3$ است.
(۳) واگراست و مجموع سری $2/3$ است. (۴) واگراست و مجموع سری نامعین است.

۱۵- سری $\sum_{n=1}^{+\infty} (1/4^n + 1/4^n)$:

(۱) هم‌گراست (۲) واگراست (۳) ممکن است هم‌گرا باشد (۴) ممکن است واگرا باشد

۱۶- سری $1/2 + 3/4 + 7/8 + \dots$:

(۱) هم‌گراست به ۱ (۲) واگراست (۳) هم‌گراست به ۲ (۴) هیچ‌کدام

۱۷- مقدار عبارت $S = 2 + 2/3 + 2/9 + 2/27 + \dots$ برابر است با:

(۱) ۶ (۲) ۹ (۳) ۳ (۴) ۱۲

۱۸- کدام یک از سری‌های زیر هم‌گراست؟

(۱) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{3^n}$ (۲) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ (۳) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^{n+2}}$ (۴) هر سه مورد

۱۹- مجموع سری $6 + 4 + 8/3 + \dots + 6(2/3)^{n-1} + \dots$ کدام است؟

(۱) ۱۲ (۲) ۲۸ (۳) ۶۴ (۴) ۱۸

۲۰- آزمون انتگرال برای کدام یک از سری‌های نامتناهی زیر به‌کار نمی‌آید؟

(۱) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2 + \sin n}{n^2}$ (۲) $\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n} \sin n$ (۳) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ (۴) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n \ln n}$

۲۱- کدام یک از سری‌های زیر واگراست؟

(۱) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}$ (۲) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ (۳) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ (۴) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}$

۲۲- حد سری $1/1 \times 2 + 1/2 \times 3 + 1/3 \times 4 + \dots$ برابر است با:

(۱) ۰ (۲) ۱ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) حد ندارد

۲۳- مجموع سری هندسی $\sum_{n=1}^5 2(1/3)^{n-1}$ کدام است؟

(۱) $2\left(\frac{80}{81}\right)$ (۲) $2\left(\frac{121}{81}\right)$ (۳) $2\left(\frac{81}{100}\right)$ (۴) $2\left(\frac{81}{80}\right)$

۲۴- سری $u_n = (1 + 3/n)^{n^2}$:

(۱) هم‌گراست به e^2 (۲) واگراست (۳) نه هم‌گرا و نه واگراست (۴) هم‌گراست به ۳

۲۵- سری $\sum_{n=1}^{+\infty} 2^n/n!$:

(۱) هم‌گراست به صفر (۲) واگراست (۳) هم‌گرا به ۱ است (۴) هیچ‌کدام

۲۶- سری $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln n/\sqrt{n+1}$:

(۱) هم‌گراست به $1/2$ (۲) واگراست (۳) نه واگرا و نه هم‌گراست (۴) هم‌گراست به صفر

۲۷- جمله عمومی یک سری $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ و می‌دانیم $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$:

(۱) واگراست (۲) هم‌گراست به صفر (۳) هم‌گراست به $1/2$ (۴) هیچ‌کدام

$$-۲۸ \quad \text{سری } \sum_{n=1}^{+\infty} 1/n(n-1)(n-2)\cdots(3)(2)(1)$$

(۱) واگراست (۲) هم‌گرا به ۱ است (۳) نه واگرا و نه هم‌گراست (۴) هم‌گرا به صفر است

$$-۲۹ \quad \text{شعاع هم‌گرایی } \sum_{n=1}^{+\infty} n!/n^n \text{ کدام یک از مقادیر زیر است؟}$$

(۱) ∞ (۲) ۰ (۳) ۱ (۴) e

$$-۳۰ \quad \text{فرض کنید } \sum_{i=1}^n u_i = s_n = \ln\left(\frac{1}{n+1}\right) \text{ کدام است؟}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \ln \frac{n+1}{n} \quad (۴) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \ln \frac{1}{n(n+1)} \quad (۳) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \ln \frac{1}{n} \quad (۲) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \ln \frac{1}{n+1} \quad (۱)$$

$$-۳۱ \quad \text{سری } 1/5 + 1/5^2 + 1/5^3 + \cdots$$

(۱) هم‌گراست به ۱/۴ (۲) هم‌گراست به ۱/۵ (۳) واگراست (۴) هیچ‌کدام

$$-۳۲ \quad \text{فاصله هم‌گرایی متغیر } x \text{ و شعاع هم‌گرایی } R \text{ برای سری } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (x-1)^n / 2^n (3n-1) \text{ کدام است؟}$$

$$-2 < x < -1, R = -2 \quad (۲) \quad 0 < x \leq 2, R = 1 \quad (۱)$$

$$-1 < x < 3, R = 2 \quad (۴) \quad 1 < x < 3, R = 2 \quad (۳)$$

$$-۳۳ \quad \text{سری } u_n = \left(\frac{n}{4n+2}\right)^n$$

(۱) هم‌گراست به ۱ (۲) واگراست به ۱ (۳) هم‌گراست به ۱/۴ (۴) واگراست به ۱

$$-۳۴ \quad \text{سری } \sum_{n=1}^{+\infty} n^n / a^n n! \text{ در صورتی هم‌گراست که:}$$

$$a < e \quad (۱) \quad a > e \quad (۲) \quad a > \frac{1}{e} \quad (۳) \quad a \in \mathbb{R} \quad (۴)$$

$$-۳۵ \quad \text{شعاع هم‌گرایی سری } \sum_{n=0}^{+\infty} n! x^n \text{ کدام است؟}$$

$$R = 1 \quad (۱) \quad R = \frac{1}{e} \quad (۲) \quad R = 0 \quad (۳) \quad \text{هیچ‌کدام} \quad (۴)$$

$$-۳۶ \quad \text{فاصله هم‌گرایی سری } \sum_{n=0}^{+\infty} n^n x^n \text{ کدام است؟}$$

$$(-\infty, +\infty) \quad (۱) \quad \{0\} \quad (۲) \quad [-1, 1) \quad (۳) \quad [0, +\infty) \quad (۴)$$

$$-۳۷ \quad \text{سری } \sum_{n=1}^{+\infty} 2^n x^n / n!$$

(۱) دارای فاصله هم‌گرایی $(-\infty, +\infty)$ است. (۲) برای هر $x \in \mathbb{R}$ هم‌گراست.

(۳) برای $x = 0$ واگراست. (۴) موارد ۱ و ۲ صحیح‌اند.

$$-۳۸ \quad \text{در سری توانی } 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots$$

(۱) اگر $x = -1$ باشد سری واگراست. (۲) اگر $x = 1$ نباشد سری واگراست.

(۳) فاصله هم‌گرایی $1 < x < -1$ است. (۴) موارد ۱ و ۲ و ۳ صحیح‌اند.

$$-۳۹ \quad \text{در سری } u_n = x^n / n! \text{ شعاع هم‌گرایی کدام است؟}$$

$$R = 0 \quad (۱) \quad R = 1 \quad (۲) \quad R = \infty \quad (۳) \quad \text{هیچ‌کدام} \quad (۴)$$

۴۰- در سری $u_n = x^n/n^2$ فاصله همگرایی کدام است؟

(۱) $-1 \leq x \leq 1$ (۲) $-\infty < x < +\infty$ (۳) $-1 < x < 1$ (۴) $-2 < x \leq 2$

۴۱- سری $u_n = (-1)^{n+1} x^{n-1}/(2n-3)2^{n-1}$ برای مقادیر ... همگراست.

(۱) $-2 < x < 2$ (۲) $-2 \leq x \leq 2$ (۳) $-2 \leq x < 2$ (۴) $-2 < x \leq 2$

۴۲- سری $u_n = (-1)^{n+1} \frac{n+1}{2n+1}$

(۱) واگراست (۲) همگراست (۳) نه همگرا و نه واگراست (۴) هیچ کدام

۴۳- سری $u_n = (\ln n/100)^n$

(۱) همگراست (۲) واگراست (۳) نه همگرا و نه واگراست (۴) متناوب است

۴۴- سری $\sum_{n=1}^{+\infty} 3^n/n^2$

(۱) همگراست (۲) همگرای مطلق است (۳) واگراست (۴) هیچ کدام

۴۵- برای سری توانی $\frac{1}{3}x - \frac{2^2}{5}x^2 + \frac{3^2}{8}x^3 - \frac{4^2}{11}x^4 + \dots$ جمله عمومی کدام است؟

(۱) $\frac{n^2}{3n-1}x^n$ (۲) $(-1)^{n+1} \frac{n^2}{3n-1}x^n$

(۳) $\frac{(-1)^{n+1}n^2}{2n-1}x^n$ (۴) $(-1)^{n+1} \frac{n^2}{2n-1}x^n$

۴۶- جمله دوم بسط مک‌لورن $f(x) = \sin x \cos x$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{4}x^2$ (۲) $\frac{2}{3}x^2$ (۳) $-\frac{2}{3}x^2$ (۴) $-\frac{1}{4}x^2$

۴۷- با استفاده از سری مک‌لورن تابع $f(x) = \sin x$ کدام است؟

(۱) $x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$ (۲) $x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots$

(۳) $x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$ (۴) $x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots$

۴۸- تابع f با ضابطه $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ تعریف شده است. سری مک‌لورن مربوط به f کدام است؟

(۱) $0 + 0 + 0 + \dots$ (۲) $0 - 1 + 0 - 1 + \dots$

(۳) $0 + 1 + 0 + \dots$ (۴) $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$

۴۹- با استفاده از بسط مک‌لورن تابع $f(x) = \ln(1-x)$ کدام است؟

(۱) $-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots$ (۲) $x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!} + \dots$

(۳) $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$ (۴) $x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$

۵۰- بسط تابع $f(x) = 1/(1+x)^2$ برحسب توان‌های $(x-2)$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{3} - \frac{2}{3}(x-2) + \frac{2}{3}(x-2)^2 + \dots$ (۲) $\frac{1}{3^2} - \frac{2}{3^2}(x-2) + \frac{2}{3^2}(x-2)^2 + \dots$

(۳) $\frac{1}{3^2} + \frac{2}{3^2}(x-2) + \frac{2}{3^2}(x-2)^2 + \dots$ (۴) $\frac{1}{3!} - \frac{2}{3!}(x-2) + \frac{2}{3!}(x-2)^2 + \dots$

۵۱- در بسط تابع $1 < |x|$ و $f(x) = \ln(1+x)/x$ برحسب قوای x ضریب x^r کدام است؟

$$1) -\frac{1}{r} \quad 2) -\frac{1}{r} \quad 3) \frac{1}{r} \quad 4) \frac{1}{r}$$

۵۲- بسط تابع $f(x) = (1+x)^\lambda$ که در آن λ عددی حقیقی است، برحسب توان‌های x کدام است؟

$$\begin{aligned} 1) & 1 + \lambda x + \frac{\lambda(\lambda-1)}{2!}x^2 + \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)}{3!}x^3 + \dots \\ 2) & 1 - \lambda x + \frac{\lambda(\lambda-1)}{2!}x^2 - \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)}{3!}x^3 + \dots \\ 3) & \lambda + \frac{\lambda-1}{2!}x^2 + \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)}{3!}x^3 + \dots \\ 4) & \lambda - \frac{\lambda-1}{2!}x^2 + \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)}{3!}x^3 - \dots \end{aligned}$$

۵۳- جمله عمومی بسط تابع $f(x) = \sin x$ در سری مک‌لورن کدام است؟

$$1) \frac{x^{r_{n+1}}}{(r_{n+1})!} (-1)^{n+1} \quad 2) \frac{x^{r_{n+1}}}{(r_{n+1})!} (-1)^{n+1} \quad 3) \frac{x^{r_{n+1}}}{(r_{n+1})!} (-1)^n \quad 4) \frac{x^{r_{n+1}}}{(r_{n+1})!} (-1)^n$$

۵۴- تابع $f(x) = \ln x$ را به سری تیلور، حول نقطه $x=1$ بسط دهید.

$$\begin{aligned} 1) & (x-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 + \dots \\ 2) & (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3!}(x-1)^3 + \dots \\ 3) & (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 + \dots \\ 4) & (x-1) + \frac{1}{2!}(x-1)^2 + \frac{1}{3!}(x-1)^3 + \dots \end{aligned}$$

۵۵- با استفاده از سری مک‌لورن تابع $f(x) = a^x$ کدام است؟

$$\begin{aligned} 1) & 1 - x \ln a + \frac{x^2}{2!} \ln^2 a - \dots \\ 2) & x + x \ln a + x^2 \ln^2 a + \dots \\ 3) & 1 + x \ln a + \frac{x^2}{2!} \ln^2 a + \dots \\ 4) & 1 + x \ln a + \frac{x^2}{2!} \ln^2 a + \dots \end{aligned}$$

۵۶- با استفاده از سری مک‌لورن تابع $f(x) = \cos x$ کدام است؟

$$\begin{aligned} 1) & 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \\ 2) & 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \\ 3) & 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \\ 4) & 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \end{aligned}$$

۵۷- با استفاده از سری مک‌لورن تابع $f(x) = \cosh x$ کدام است؟

$$\begin{aligned} 1) & 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots \\ 2) & x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \\ 3) & 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \\ 4) & x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \end{aligned}$$

۵۸- بسط تابع $f(x, y) = e^{x+y}$ به سری مک‌لورن کدام است؟

$$\begin{aligned} 1) & 1 + 1!(x+y) + 2!(x+y)^2 + \dots \\ 2) & 1 - \frac{1}{1!}(x+y) + \frac{1}{2!}(x+y)^2 - \dots \\ 3) & 1 - 1!(x+y) + 2!(x+y)^2 - \dots \\ 4) & 1 + \frac{1}{1!}(x+y) + \frac{1}{2!}(x+y)^2 + \dots \end{aligned}$$

۵۹- بسط تابع $f(x) = x^2 - 2x^2 + 5x - 7$ برحسب قوای $(x-1)$ کدام است؟

$$\begin{array}{ll} ۱) (x-1)^2 + (x-1) + 3 & ۲) (x-1)^2 + (x-1) + 4 \\ ۳) (x-1)^2 + (x-1) + 3 & ۴) (x-1)^2 + (x-1) + 1 \end{array}$$

۶۰- تابع $f(x) = \tan x$ برحسب قوای $(x - \pi/4)$ کدام است؟

$$\begin{array}{ll} ۱) \tan x = 1 + 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{4}{1!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{8}{2!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 + \dots \\ ۲) \tan x = 1 + 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{4}{1!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{16}{3!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 + \dots \\ ۳) \tan x = 1 + \left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{4}{1!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{16}{2!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 + \dots \\ ۴) \tan x = 1 + \frac{1}{1!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{4!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{1}{6!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 + \dots \end{array}$$

تست‌های آزمون کارشناسی ارشد

«سری‌ها»

• تست‌های شماره ۱ الی ۷ آزمون‌های کارشناسی ارشد مجموعه علوم اقتصادی

۱- اگر $s = 2 + 1/2! + 1/3! + 1/4! + \dots$ باشد، در این صورت s برابر است با:

$$\begin{array}{llll} ۱) \infty & ۲) 2 & ۳) 3 & ۴) 2 < s < 3 \end{array}$$

۲- با استفاده از سری مک‌لورن می‌توان نشان داد:

$$\begin{array}{ll} ۱) e^x = x + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^3}{2!} + \frac{x^4}{3!} + \dots + \frac{x^n}{(n-1)!} + \dots \\ ۲) e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \\ ۳) e^x = x + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \\ ۴) هیچ‌کدام \end{array}$$

۳- سری $5 + 5^2/2! + 5^3/3! + \dots$

۱) هم‌گراست
۲) واگراست

۳) جمله عمومی ندارد
۴) حد جمله عمومی آن وقتی n به سمت ∞ میل می‌کند برابر است با ∞

۴- جمله عمومی بسط تابع $F(x) = \ln(1+x)$ به سری مک‌لورن کدام است؟

$$\begin{array}{llll} ۱) \frac{x^n}{n+1} & ۲) \frac{x^n}{n!} & ۳) \frac{x^n}{n} & ۴) \frac{x^n}{(n+1)!} \end{array}$$

۵- در سری $U_n = x^n/(n+1)$ فاصله و شذاع هم‌گرایی عبارت است از:

$$\begin{array}{ll} ۱) R = \infty, -\infty < x < +\infty & ۲) R = 2, -2 < x < 2 \\ ۳) R = 1, |x| \leq 1 & ۴) R = 1, |x| < 1 \end{array}$$

۶- مجموع سری $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots$ کدام‌یک از مقادیر زیر است؟

$$\begin{array}{llll} ۱) 2 & ۲) \infty & ۳) 1 & ۴) \frac{1}{2} \end{array}$$

۷- مجموع $\sum_{n=1}^{\infty} 1/(n^2 + n)$ کدام است؟

$$\begin{array}{llll} ۱) 3 & ۲) \infty & ۳) 2 & ۴) 2 \end{array}$$

معادلات دیفرانسیل

۱-۱۱ تعریف معادله دیفرانسیل

معادله دیفرانسیل، معادله‌ای است که مشتمل بر مشتقات یک یا چند تابع باشد. اگر معادله دیفرانسیل مشتمل بر مشتق‌های یک تابع یک‌متغیره باشد، $y = f(x)$ ، معادله دیفرانسیل معمولی است. اگر این معادله دیفرانسیل مشتمل بر مشتق‌های جزئی یک تابع دو متغیره، $f(x, y) = 0$ ، یا چند متغیره، $f(x, y, z) = 0$ ، مستقر باشد آن را معادله دیفرانسیل، با مشتق‌های جزئی می‌نامند. معادله دیفرانسیل را در حالت کلی به صورت‌های زیر نشان می‌دهند (مسئله ۱).

$$\begin{aligned} F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) &= 0 \\ F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) &= 0 \\ F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \dots, \frac{\partial^nz}{\partial y^n}\right) &= 0 \end{aligned}$$

۲-۱۱ مرتبه و درجه یک معادله دیفرانسیل

مرتبه یک معادله دیفرانسیل، برابر بزرگ‌ترین مرتبه مشتق موجود در معادله دیفرانسیل است و درجه یک معادله دیفرانسیل توان بزرگ‌ترین مرتبه مشتق موجود در معادله است. (مسئله ۲)

۳-۱۱ تشکیل معادلات دیفرانسیل

به‌طور کلی خانواده منحنی‌های $y = f(x, c_1, c_2, \dots, c_n)$ را که مشتمل بر n پارامتر مستقل $c_1, c_2, \dots, c_n$ است، در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم معادله دیفرانسیل این خانواده منحنی را تشکیل دهیم، برای این منظور کافی است از این تابع n بار مشتق گرفته و بین تابع و مشتقات آن ثابت c_i را حذف کنیم، یعنی:

$$\begin{aligned} y' &= f'(x, c_1, c_2, \dots, c_n) \\ y'' &= f''(x, c_1, c_2, \dots, c_n) \\ &\vdots \\ y^{(n)} &= f^{(n)}(x, c_1, c_2, \dots, c_n) \end{aligned}$$

اگر بین این روابط ثابت‌های c_i را حذف کنیم، یک معادله دیفرانسیل مرتبه n خواهیم داشت (مسئله ۳):

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

۴-۱۱ جواب‌های یک معادله دیفرانسیل

معادله دیفرانسیل مرتبه n ام $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ را در نظر می‌گیریم، هر تابعی مانند $y = f(x)$ که در این معادله صدق کند، به‌طوری که داشته باشیم $F(x, f(x), f'(x), \dots, f^{(n)}(x)) = 0$ جواب معادله دیفرانسیل فوق

نامند. به بیان دیگر جواب معادله دیفرانسیل معمولی، تابعی است که در آن مشتق‌ها یا دیفرانسیل‌ها وجود ندارند و ضمناً در معادله دیفرانسیل صدق می‌کند. چنین جوابی بسته به اینکه ثابت دلخواه (ثابت انتگرال‌گیری) مشخص شده و یا نشده باشد، ممکن است جواب عمومی یا خصوصی باشد.

۱۱-۴-۱ جواب عمومی معادله دیفرانسیل

جواب عمومی یک معادله دیفرانسیل مرتبه n به صورت صریح $y = f(x, c_1, c_2, \dots, c_n)$ و یا به صورت ضمنی $f(x, y, c_1, c_2, \dots, c_n) = 0$ است. اگر معادله دیفرانسیل از مرتبه یک باشد، جواب عمومی آن مشتمل بر یک ثابت دلخواه است، اگر معادله دیفرانسیل از مرتبه دو باشد، جواب عمومی آن مشتمل بر دو ثابت دلخواه است و به طور کلی اگر معادله دیفرانسیل از مرتبه n باشد، جواب عمومی آن مشتمل بر n ثابت دلخواه است (مسئله ۴).

۱۱-۴-۲ جواب خصوصی معادله دیفرانسیل

جواب خصوصی یک معادله دیفرانسیل، جوابی است که می‌توان آن را از جواب عمومی با نسبت دادن مقادیر خاصی (شرایط مرزی یا شرایط اولیه) به ثابت‌های دلخواه در جواب عمومی به دست آورد. بدیهی است که با تغییر شرایط مرزی جواب خصوصی جدیدی به دست می‌آید، لذا می‌توان نتیجه گرفت که بی‌نهایت جواب خصوصی وجود دارد (مسائل ۴ و ۵).

۱۱-۵ حل معادلات دیفرانسیل

منظور از حل معادله دیفرانسیل $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ ، یافتن جواب عمومی، جواب خصوصی و جواب غیرعادی است^۱. به طور کلی پیدا کردن جواب عمومی یک معادله دیفرانسیل همواره امکان‌پذیر نیست. در زیر به نحوه حل برخی معادلات دیفرانسیل می‌پردازیم.

۱۱-۵-۱ معادله دیفرانسیل $\frac{d^n y}{dx^n} = f(x)$

اگر یک معادله دیفرانسیل را بتوان به صورت $d^n y/dx^n = f(x)$ نوشت، جواب آن را می‌توان به روش مستقیم، با انتگرال‌گیری (متوالی) به دست آورد (مسئله ۶).

۱۱-۵-۲ معادله دیفرانسیل جدا

اگر یک معادله دیفرانسیل را بتوان به صورت $f(x)dx + g(y)dy = 0$ نوشت، یعنی متغیرهای x و y را کاملاً از هم جدا کنیم، بنا به تعریف این معادله را «معادله دیفرانسیل جدا» می‌نامند. لازم به تذکر است که در معادله فوق f تنها تابعی از x و g نیز تنها تابعی از y است. جواب معادله دیفرانسیل جدا را می‌توان با انتگرال‌گیری از طرفین معادله فوق، یعنی $\int f(x)dx + \int g(y)dy = c$ ، به دست آورد (مسئله ۷).

۱۱-۵-۳ معادله دیفرانسیل همگن

اگر یک معادله دیفرانسیل را بتوان به صورت $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ نوشت، بنا به تعریف این معادله را «معادله دیفرانسیل همگن» می‌نامند. اگر $M(x, y)$ و $N(x, y)$ توابعی همگن از یک درجه باشند، با تغییر متغیر $y = tx$ می‌توان متغیرها را از هم جدا نمود و با انجام عملیات زیر جواب آن را به دست آورد.

۱- در معادله دیفرانسیل به جای y عبارت tx را قرار می‌دهیم.

۲- می‌دانیم $y = tx \Rightarrow dy = tdx + xdt$ سپس به جای dy نیز عبارت مساوی آن را قرار می‌دهیم.

۳- پس از ساده کردن معادله دیفرانسیل، یک معادله دیفرانسیل جدا برحسب x و t خواهیم داشت.

(۱) از پرداختن به جواب غیرعادی صرف‌نظر می‌کنیم.

۴- معادله را بنا به روش گفته شده در (۱۱-۵-۲) حل نموده و جواب آن را بر حسب x و t به دست می آوریم.

۵- به جای t مقدار مساوی آن y/x را قرار می دهیم.

۶- y را به دست می آوریم (مسئله ۸).

۱۱-۵-۴ معادله دیفرانسیل کامل

اگر یک معادله دیفرانسیل را بتوان به صورت $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ نوشت، بنا به تعریف این معادله را «معادله دیفرانسیل کامل» می نامند اگر داشته باشیم $\partial M / \partial y = \partial N / \partial x$ برای به دست آوردن جواب آن عملیات زیر را انجام می دهیم. ۱- از $M(x, y)$ نسبت به x انتگرال می گیریم و ثابت انتگرال گیری را با تابعی از y ، به صورت $\varphi(y)$ عوض می کنیم، یعنی:

$$\int M(x, y)dx = f(x, y) + \varphi(y)$$

۲- از تابع به دست آمده در بالا نسبت به y مشتق می گیریم و آن را با $N(x, y)$ مساوی قرار می دهیم و با به دست آوردن $\frac{\partial}{\partial y} \varphi(y)$ معادله را حل می کنیم. یعنی:

$$\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \varphi(y) = N(x, y) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y} \varphi(y) = N(x, y) - \frac{\partial f}{\partial y}$$

۳- برای یافتن $\frac{\partial}{\partial y} \varphi(y)$ نسبت به y انتگرال می گیریم. یعنی:

$$\int \frac{\partial}{\partial y} \varphi(y) dy = \varphi(y)$$

۴- با توجه به مراحل ۱ و ۳ جواب معادله دیفرانسیل به صورت زیر است (مسئله ۹):

$$f(x, y) + \varphi(y) = c$$

۱۱-۵-۵ معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول

اگر معادله دیفرانسیل به صورت $y' + y.f(x) = g(x)$ باشد، بنا به تعریف «معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول» است. برای به دست آوردن جواب آن عملیات زیر را انجام می دهیم (مسئله ۱۰).

۱- از رابطه زیر فکتور انتگرال A را می یابیم.

$$A = e^{\int f(x)dx}$$

۲- از رابطه زیر جواب عمومی را محاسبه می کنیم.

$$y = \frac{c}{A} + \frac{1}{A} \int A.g(x)dx$$

به طور مشابه برای معادله دیفرانسیل $x'.f(y) = g(y)$ داریم:

$$A = e^{\int f(y)dy}$$

$$x = \frac{c}{A} + \frac{1}{A} \int A.g(y)dy$$

۱۱-۵-۶ معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم همگن

این معادله دیفرانسیل به صورت $Ay'' + By' + Cy = 0$ می‌باشد. برای حل آن معادله درجه دوم $Ak^2 + Bk + C = 0$ را تشکیل می‌دهیم، ریشه‌های آن را (k_1, k_2) به دست می‌آوریم (مسئله ۱۱).

۱- اگر $\Delta > 0$ ، دو ریشه k_1 و k_2 ، آن‌گاه $y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x}$

۲- اگر $\Delta = 0$ ، ریشه مضاعف $k_1 = k_2$ ، آن‌گاه $y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 x e^{k_1 x}$

۳- اگر $\Delta < 0$ ، ریشه مختلط $a + bi$ ، آن‌گاه $y = e^{ax}(c_1 \cos bx + c_2 \sin bx)$

تذکره: روابط گفته شده، برای حل معادله دیفرانسیل خطی مرتبه n همگن نیز به طور مشابه صادق است. به عنوان نمونه معادله کمکی برای معادله دیفرانسیل $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$ به صورت $a_n k^n + a_{n-1} k^{n-1} + \dots + a_1 k + a_0 = 0$ است. اگر این معادله دارای n ریشه مجزای $k_1, k_2, \dots, k_n$ باشد در این صورت جواب عمومی معادله به صورت زیر است:

$$y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x} + \dots + c_n e^{k_n x}$$

۱۱-۵-۷ معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم غیرهمگن

این معادله دیفرانسیل به صورت کلی $Ay'' + By' + Cy = f(x)$ می‌باشد. برای حل آن معادله درجه دوم $Ak^2 + Bk + C = 0$ را تشکیل می‌دهیم و ریشه‌های آن را (k_1, k_2) به دست می‌آوریم (مسئله ۱۲).

۱- اگر $\Delta > 0$ ، دو ریشه k_1 و k_2 ، آن‌گاه $y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x} + G(x)$

۲- اگر $\Delta = 0$ ، ریشه مضاعف $k_1 = k_2$ ، آن‌گاه $y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 x e^{k_1 x} + G(x)$

۳- اگر $\Delta < 0$ ، ریشه مختلط $a + bi$ ، آن‌گاه $y = e^{ax}(c_1 \cos bx + c_2 \sin bx) + G(x)$

برای تعیین $G(x)$ حالت‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

الف) اگر $f(x)$ مقداری ثابت باشد، یعنی $f(x) = D$ ، آن‌گاه $G(x) = D/C$.

ب) اگر $f(x)$ تابعی درجه اول از x باشد، آن‌گاه $G(x) = ax + b$.

ج) اگر $f(x)$ تابعی درجه دوم از x باشد، آن‌گاه $G(x) = ax^2 + bx + c$.

د) اگر $f(x)$ تابعی از e^x باشد، $G(x) = ae^x$ و اگر به وسیله $G(x) = ae^x$ نتوانیم ضریب a را تعیین کنیم، باید از $G(x) = ax e^x$ استفاده کنیم و اگر مجدداً به جواب نرسیدیم از $G(x) = ax^2 e^x$ استفاده می‌کنیم.

ه) برای تعیین ضرایب نامعین تابع $G(x)$ در موارد فوق (ب، ج، د) بایستی $G'(x)$ و $G''(x)$ را محاسبه کنیم و توابع $G(x)$ و $G'(x)$ و $G''(x)$ را به ترتیب به جای y و y' و y'' قرار دهیم و از اتحاد دو طرف ضرایب نامعین محاسبه شود.

مسائل نمونه فصل ۱۱

۱. روابط زیر معادلات دیفرانسیل می‌باشند.

الف) $y'' - 2y' + y = x^2$ ب) $y''' - y' = 0$ ج) $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + xy \frac{\partial z}{\partial x} - 3z^2 = 0$

۲. مرتبه و درجه معادلات دیفرانسیل در مسئله ۱ را بیابید.

۳. معادله دیفرانسیل خانواده منحنی‌های $y = ce^{2x}$ را بیابید.

۴. شیب یک منحنی در هر نقطه از آن به صورت $y' = x^2 - 2x + 1$ است. با فرض آنکه منحنی این تابع از نقطه $(0, 2)$ بگذرد، جواب عمومی و خصوصی آن را بیابید.

۵. نشان دهید که $y = ce^{2x}$ یک جواب معادله $y' = 2y$ است.

۶. جواب عمومی معادله دیفرانسیل $d^2 y/dx^2 = 8x - 1/x^2$ را بیابید.

(۱) معادله کمکی یا مفسر است.

۷. جواب عمومی معادله دیفرانسیل $(1+x^2)y' + xy = 0$ را بیابید. سپس جواب خصوصی را طوری تعیین کنید که از نقطه $(1, 0)$ بگذرد.

۸. جواب عمومی معادله دیفرانسیل $(x+y)dx + (x-y)dy = 0$ را بیابید. سپس جواب خصوصی را برای $c = 0$ تعیین کنید.

۹. معادله دیفرانسیل $(x+y)dx + (y^2+x)dy = 0$ را حل کنید.

۱۰. جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y' + 2y = 6$ را بیابید. سپس جواب خصوصی آن را در شرایطی که اگر $x = 0$ باشد $y = 1$ است، به دست آورید.

۱۱. جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y'' - 3y' + 2y = 0$ را بیابید.

۱۲. جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y'' - 6y' + 9y = 2e^x$ را بیابید.

پاسخ مسائل نمونه فصل ۱۱

۲. الف) معادله دیفرانسیل مرتبه دوم و درجه اول ب) معادله دیفرانسیل مرتبه سوم و درجه دوم ج) معادله دیفرانسیل مرتبه سوم و درجه اول.

۳.

$$\begin{cases} y = cx^2 \\ y' = 2cx \end{cases} \Rightarrow \frac{y}{y'} = \frac{cx^2}{2cx} \Rightarrow \frac{y}{y'} = \frac{x}{2} \Rightarrow y'x - 2y = 0$$

۴.

$$y' = x^2 - 2x + 1 \Rightarrow dy = (x^2 - 2x + 1)dx \Rightarrow y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x + c \xrightarrow{(+,2)}$$

$$2 = c \Rightarrow y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x + 2$$

۵.

$$y = ce^{2x} \Rightarrow y' = 2ce^{2x} \xrightarrow{\text{جاگذاری در معادله}} 2ce^{2x} = 2ce^{2x}$$

۶.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 8x - \frac{1}{x^3} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 4x^2 + \frac{1}{x} + c_1 \Rightarrow y = \frac{4}{3}x^3 + \ln x + c_1x + c_2$$

۷. این معادله دیفرانسیل یک معادله دیفرانسیل جدا می باشد، زیرا می توان نوشت:

$$(1+x^2)y' + xy = 0 \Rightarrow (1+x^2)\frac{dy}{dx} + xy = 0 \Rightarrow (1+x^2)dy + (xy)dx = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{x}{1+x^2}dx + \frac{1}{y}dy = 0 \Rightarrow \int \frac{x}{1+x^2}dx + \int \frac{1}{y}dy = c \Rightarrow \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \ln(y) = c$$

$$\ln(y)(1+x^2) = c \Rightarrow y\sqrt{1+x^2} = c^e \xrightarrow{e^c=c} y\sqrt{1+x^2} = c \quad \text{جواب عمومی}$$

$$y\sqrt{1+x^2} = c \xrightarrow{(+,1)} \sqrt{1+0} = c \Rightarrow c = 1 \Rightarrow y\sqrt{1+x^2} = 1 \quad \text{جواب خصوصی}$$

۸. هر دو تابع همگن درجه همگنی یک می‌باشند.

$$(x + tx)dx + (x - tx)(tdx + xdt) = 0 \Rightarrow (x + tx + tx - t^2x)dx + (x^2 - tx^2)dt = 0$$

$$(x + 2tx - t^2x)dx + (x^2 - tx^2)dt = 0 \Rightarrow x(1 + 2t - t^2)dx + x^2(1 - t)dt = 0$$

$$\frac{1}{x}dx + \frac{1-t}{1+2t-t^2}dt = 0 \Rightarrow \int \frac{1}{x}dx + \int \frac{1-t}{1+2t-t^2}dt = c \Rightarrow \frac{1}{2} \ln(1+2t-t^2) + \ln x = c$$

$$\ln x(1+2t-t^2)^{\frac{1}{2}} = c \Rightarrow x(1+2t-t^2)^{\frac{1}{2}} = e^c \xrightarrow{e^c=c} x \left(1 + \frac{2y}{x} - \frac{y^2}{x^2} \right)^{\frac{1}{2}} = c$$

$$x \left(\frac{x^2 + 2yx - y^2}{x^2} \right)^{\frac{1}{2}} = c \Rightarrow x^2 + 2yx - y^2 = c \quad \text{جواب عمومی}$$

$$c = 0 \Rightarrow x^2 + 2yx - y^2 = 0 \quad \text{جواب خصوصی}$$

۹. این معادله دیفرانسیل کامل است زیرا $\partial N / \partial x = 1$ و $\partial M / \partial y = 1$ بنابراین:

$$1) \int (x+y)dx = \frac{1}{2}x^2 + xy + \varphi(y) \quad 2) x + \frac{\partial}{\partial y} \varphi(y) = y^2 + x \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y} \varphi(y) = y^2$$

$$3) \int y^2 dy = \frac{1}{3}y^3 \quad 4) \frac{1}{2}x^2 + xy + \frac{1}{3}y^3 = c$$

برای بررسی صحت جواب کافی است از رابطه فوق دیفرانسیل کامل بگیریم، یعنی:

$$x dx + y dx + x dy + y^2 dy = 0 \Rightarrow (x+y)dx + (y^2+x)dy = 0$$

که همان معادله دیفرانسیل است.

۱۰.

$$A = c \int e^{tx} dx = e^{tx} \Rightarrow y = \frac{c}{e^{tx}} + \frac{1}{e^{tx}} \int 2e^{tx} dx = ce^{-tx} + e^{-tx}(2e^{tx})$$

$$y = ce^{-tx} + 2e^{-tx} \Rightarrow y = ce^{-tx} + 2 \quad \text{جواب عمومی}$$

$$(x=0, y=1) \Rightarrow 1 = ce^0 + 2 \Rightarrow c = -2 \Rightarrow y = -2e^{-tx} + 2 \quad \text{جواب خصوصی}$$

۱۱.

$$k^2 - 3k + 2 = 0, \Delta = 9 - 4 = 5, (k-1)(k-2) = 0 \Rightarrow k_1 = 1, k_2 = 2$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$$

۱۲.

$$k^2 - 6k + 9 = 0, \Delta = 36 - 36 = 0, (k-3)^2 = 0 \Rightarrow k_1 = k_2 = 3$$

$$y = c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x} + G(x)$$

$$G(x) = ae^x \Rightarrow G'(x) = ae^x \Rightarrow G''(x) = ae^x$$

$$G''(x) - 6G'(x) + 9G(x) = 2e^x \Rightarrow ae^x - 6ae^x + 9ae^x = 2e^x$$

$$4ae^x = 2e^x \Rightarrow 4a = 2 \Rightarrow a = \frac{1}{2} \Rightarrow G(x) = \frac{1}{2}e^x$$

$$y = c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x} + \frac{1}{2}e^x$$

سؤالات تستی فصل ۱۱

۱- به ترتیب مرتبه و درجه معادله دیفرانسیل $x - dy/dx = (d^2y/dx^2)^2$ کدام است؟

- (۱) دوم، سوم (۲) سوم، دوم (۳) دوم، اول (۴) دوم، دوم

۲- کدام عبارت زیر نادرست است؟

- (۱) $(dy/dx)^2 = 1 - y^2$ ، یک معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه اول و درجه دوم است.
 (۲) $\partial^2 y / \partial x^2 + xy \partial y / \partial x - x^2 = 0$ ، یک معادله دیفرانسیل جزئی مرتبه سوم و درجه اول است.
 (۳) $d^2y/dx^2 + (dy/dx)^2 + y = 2$ ، یک معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه دوم و درجه دوم است.
 (۴) $(d^2y/dx^2)^2 - x (d^2y/dx^2)^2 = 0$ ، یک معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه چهارم و درجه سوم است.

۳- کدام معادله دیفرانسیل زیر دارای مرتبه سوم و درجه دوم است؟

- (۱) $y'''' - y'' + y = x$ (۲) $y'''' + 3y''' - y = x$ (۳) $y'''' - y'' + y = 0$ (۴) $y'''' - y'' + y = x$

۴- معادله دیفرانسیل خانواده سهمی‌های $y = \frac{1}{4}cx^2$ کدام است؟

- (۱) $y'x - y = 0$ (۲) $y'x - 2y = 0$ (۳) $y'x + y = 0$ (۴) $y'x + 2y = 0$

۵- کدام عبارت زیر نادرست است؟

- (۱) اگر معادله دیفرانسیل از درجه دو باشند، جواب عمومی آن مشتمل بر دو پارامتر دلخواه است.
 (۲) برای یک معادله دیفرانسیل بی‌نهایت جواب خصوصی وجود دارد.
 (۳) مرتبه یک معادله دیفرانسیل، برابر بزرگ‌ترین مرتبه مشتق موجود در معادله دیفرانسیل است.
 (۴) جواب خصوصی یک معادله دیفرانسیل، جوابی است که می‌توان آن را از جواب عمومی با نسبت دادن مقاداری خاص به ثابت‌های دلخواه به دست آورد.

۶- شیب یک منحنی در هر نقطه آن به صورت $y' = e^x + x - 1$ است، با فرض آنکه منحنی این تابع از نقطه $(1, 0)$ بگذرد، جواب خصوصی آن کدام است؟

- (۱) $y = e^x + \frac{1}{4}x^2$ (۲) $y = e^x + \frac{1}{4}x^2 - 1$ (۳) $y = e^x + 2x$ (۴) $y = e^x + \frac{1}{4}x^2 - x$

۷- جواب عمومی معادله دیفرانسیل $dy/dx - \sin x + x = 0$ کدام است؟

- (۱) $y = \cos x + \frac{1}{4}x^2 + c$ (۲) $y = -\cos x - \frac{1}{4}x^2 + c$
 (۳) $y = -\cos x + \frac{1}{4}x^2 + c$ (۴) $y = \cos x - \frac{1}{4}x^2 + c$

۸- جواب عمومی معادله دیفرانسیل $dx = (1 - \cos 2y)dy$ کدام است؟

- (۱) $y - x - \frac{1}{4} \sin 2y = c$ (۲) $y - x - \frac{1}{4} \sin 2y = c$
 (۳) $y - x + \frac{1}{4} \sin 2y = c$ (۴) $y - x - \frac{1}{4} \sin 2y = c$

۹- جواب خصوصی معادله دیفرانسیل $dy = (\cos x + 2x)dx$ به ازای $c = 0$ کدام است؟

- (۱) $y = -\sin x + x^2$ (۲) $y = -\sin x - x^2$ (۳) $y = \sin x + x^2$ (۴) $y = \sin x - x^2$

۱۰- جواب خصوصی معادله دیفرانسیل $d^2y/dx^2 = 4x^2 - x^{-2}$ به ازای $c_1 = c_2 = 0$ کدام است؟

- (۱) $y = x^2 + \frac{1}{x}$ (۲) $y = \frac{1}{5}x^5 - \ln x$ (۳) $y = x^5 + \ln x$ (۴) $y = \frac{1}{5}x^5 + \ln x$

۱۱- جواب عمومی معادله دیفرانسیل $(x+y)dx = xdy$ کدام است؟

$y = e^{y/x} + c$ (۴) $y = e^c e^{y/x}$ (۳) $x = ce^{x/y}$ (۲) $x = ce^{y/x}$ (۱)

۱۲- کدام گزینه، یک جواب معادله $x^2 dy/dx + y = x^2$ است؟

$y = \frac{x^2}{3} - \frac{c}{x}$ (۴) $y = \frac{x}{3} - \frac{c}{x}$ (۳) $y = \frac{x^2}{3} + \frac{c}{x}$ (۲) $y = \frac{x}{3} + \frac{c}{x}$ (۱)

۱۳- جواب خصوصی معادله دیفرانسیل $\cot y dx + \cot x dy = 0$ به ازای $y = x = 0$ کدام است؟

$\sin y = \csc x$ (۴) $\sin y = \sec x$ (۳) $\cos y = \sec x$ (۲) $\cos y = \csc x$ (۱)

۱۴- جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y^2 dx - x^2 dy = 0$ کدام است؟

$c(y^2 - x^2) = x^2 y^2$ (۴) $y^2 - x^2 = cx^2 y^2$ (۳) $c(x^2 - y^2) = x^2 y^2$ (۲) $x^2 - y^2 = cx^2 y^2$ (۱)

۱۵- جواب عمومی معادله دیفرانسیل $(xe^{y/x} + y)dx = xdy$ کدام است؟

$\ln x - e^{-y/x} = c$ (۴) $\ln x - e^{y/x} = c$ (۳) $\ln x + e^{y/x} = c$ (۲) $\ln x + e^{-y/x} = c$ (۱)

۱۶- جواب عمومی معادله دیفرانسیل $(x+1)dy/dx + y^2 = 0$ کدام است؟

$y = \frac{c}{\ln(x+1)}$ (۴) $y = \frac{1}{\ln c(x+1)}$ (۳) $y = c \ln(x+1)$ (۲) $y = \ln c(x+1)$ (۱)

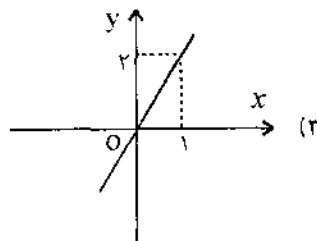
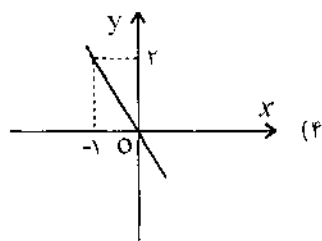
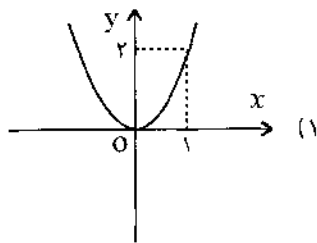
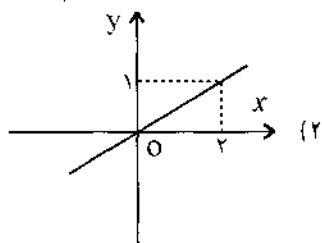
۱۷- جواب عمومی معادله دیفرانسیل $(x^2 + y^2)dx + 2xydy = 0$ کدام است؟

$x(x^2 + 3xy^2) = c$ (۴) $1 + \frac{3y^2}{x^2} = c$ (۳) $x^2 + 3xy^2 = c$ (۲) $x^2 + 3y^2 = c$ (۱)

۱۸- جواب خصوصی معادله دیفرانسیل $(x^2 + y^2)dx - 2xydy = 0$ گذرنده از نقطه $(1, 0)$ کدام است؟

$x = y^2 - x^2$ (۴) $x^2 = x^2 - y^2$ (۳) $x^2 = y^2 - x^2$ (۲) $x = x^2 - y^2$ (۱)

۱۹- نمودار جواب خصوصی معادله دیفرانسیل $dy/dx = y/x$ در شرایطی که اگر $y = 2$ باشد $x = 1$ است، کدام است؟



۲۰- جواب خصوصی معادله دیفرانسیل $(x - y \tan y/x) dx + x \tan y/x dy = 0$ گذرنده از نقطه $(1, 0)$ کدام است؟

$x \cdot \sec y = 1$ (۴) $x \cdot \csc \frac{y}{x} = 1$ (۳) $x \cdot \sec \frac{y}{x} = 0$ (۲) $x \cdot \sec \frac{y}{x} = 1$ (۱)

۲۱- جواب عمومی معادله دیفرانسیل $(x+y)dx + (x-2y)dy = 0$ کدام است؟

$$x^2 + 2xy - 2y^2 = c \quad (۲)$$

$$x^2 + 2xy - 2y = c \quad (۱)$$

$$\frac{1}{y}x^2 - xy - y^2 = 0 \quad (۴)$$

$$\frac{1}{y}x^2 + xy - y = c \quad (۳)$$

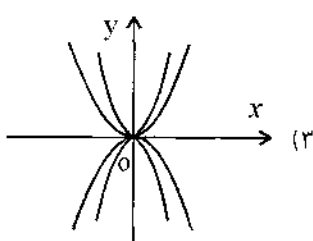
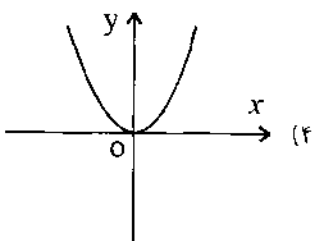
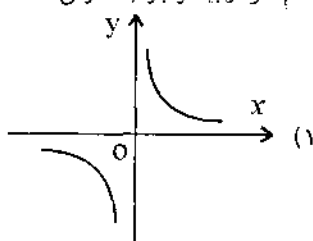
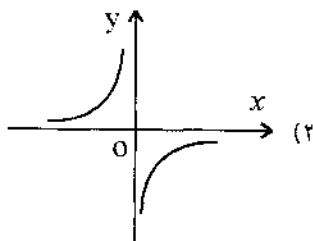
۲۲- جواب خصوصی معادله دیفرانسیل $\cos y dx - (x \sin y - y^2)dy = 0$ در شرایطی که اگر $x = 2$ باشد $y = 0$ است، کدام است؟

$$2x \cos y + y^2 = 6 \quad (۴) \quad x \cos y + y^2 = 0 \quad (۳) \quad x \cos y + \frac{1}{y}y^2 = 6 \quad (۲) \quad 2x \cos y + y^2 = 2 \quad (۱)$$

۲۳- جواب خصوصی معادله دیفرانسیل $3x^2 + 1 + e^y \cdot y' = 0$ را طوری بیابید که از نقطه $(1, 0)$ بگذرد.

$$x^2 + x + e^y = 1 \quad (۴) \quad x^2 + x + e^y = 0 \quad (۳) \quad x^2 + x + e^y - 2 = 0 \quad (۲) \quad x^2 + x + e^y - 3 = 0 \quad (۱)$$

۲۴- کدام نمودار بیانگر جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y'x - 2y = 0$ است؟



۲۵- جواب عمومی معادله دیفرانسیل $(\ln y + y^2 + ye^{xy})dx + (x/y + 2xy^2 + xe^{xy})dy = 0$ کدام است؟

$$\frac{1}{y} + 2y^2 + e^{xy} + xye^{xy} = c \quad (۲)$$

$$x \ln y + xy^2 + e^{xy} + y = c \quad (۱)$$

$$x \ln y + xy^2 + e^{xy} = c \quad (۴)$$

$$\frac{1}{y} + 2y^2 + xye^{xy} = c \quad (۳)$$

۲۶- جواب خصوصی معادله دیفرانسیل $(x \sin y - y)y' = \cos y$ در نقطه $(1, 0)$ کدام است؟

$$2(x \cos y - 1) + y^2 = 0 \quad (۲)$$

$$2x \cos y + y^2 = 0 \quad (۱)$$

$$\cos y + y^2 = 0 \quad (۳)$$

$$x \cos y + y^2 = 0 \quad (۴)$$

۲۷- جواب عمومی معادله دیفرانسیل $ye^x - x + (e^x + 1)y' = 0$ کدام است؟

$$2y(e^x - 1) - x^2 = c \quad (۲)$$

$$2y(e^x + 1) - x^2 = c \quad (۱)$$

$$y(e^x - 1) + x^2 = c \quad (۴)$$

$$y(e^x + 1) - x^2 = c \quad (۳)$$

۲۸- جواب عمومی معادله دیفرانسیل $(2x^2y + xy^2 + e^x)dx + (x^2 + x^2y + \sin y)dy = 0$ کدام است؟

$$2x^2y + x^2y^2 + 2e^x - 2 \cos y = c \quad (۲)$$

$$x^2y + \frac{1}{y}x^2y^2 - e^x - \cos y = c \quad (۱)$$

$$x^2y + \frac{1}{y}x^2y^2 + e^x + \cos y = c \quad (۴)$$

$$2x^2y + x^2y^2 + 2e^x + 2 \cos y = c \quad (۳)$$

۲۹- جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y' + 2y = 4x$ کدام است؟

$$\begin{array}{ll} y = ce^{2x} + 2x - 1 & (۱) \\ y = ce^{-2x} + e^{-2x} - 1 & (۲) \\ y = ce^{-2x} + e^{-2x} - 1 & (۳) \end{array}$$

۳۰- جواب خصوصی معادله دیفرانسیل $y' + 2xy = xe^{-x^2}$ از نقطه $(0, 2)$ کدام است؟

$$\begin{array}{ll} y = 2e^{-x^2}(1 + x^2) & (۱) \\ y = 2e^{-x^2}(2 + x^2) & (۲) \\ y = 2e^{-x^2}(2 + x^2) & (۳) \end{array}$$

۳۱- جواب عمومی معادله دیفرانسیل $x^2 dy + (y - 2xy - 2x^2)dx = 0$ کدام است؟

$$\begin{array}{ll} y = x^2(ce^{1/x} + 2) & (۱) \\ y = x^2(ce^{1/x} + 1) & (۲) \\ y = x^2(2ce^{1/x} + 1) & (۳) \end{array}$$

۳۲- جواب خصوصی معادله دیفرانسیل $dx/dy + x = e^{-y}$ که از مبدأ مختصات می‌گذرد، کدام است؟

$$\begin{array}{llll} x = e^{-y}(1 + y) & (۱) & x = ye^{-y} & (۲) \\ y = xe^{-x} & (۳) & y = e^{-x}(1 + x) & (۴) \end{array}$$

۳۳- جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y' + ay = e^{mx}$ کدام است؟

$$\begin{array}{ll} y = ce^{-ax} + \frac{e^{mx}}{a+m} & (۱) \\ y = ce^{-ax} + (a+m)e^{mx} & (۲) \\ y = ce^{-ax} + \frac{e^{(a+m)x}}{a+m} & (۳) \end{array}$$

۳۴- جواب عمومی معادله دیفرانسیل $2ydx = (y^2 + x)dx$ کدام است؟

$$\begin{array}{llll} x = cy^{1/2} + \frac{1}{y}y^2 & (۱) & y = cx^{1/2} + \frac{1}{x}x^2 & (۲) \\ y = cx^{1/2} + \frac{1}{x}x^2 & (۳) & x = cy^{1/2} + \frac{1}{y}y^2 & (۴) \end{array}$$

۳۵- معادله دیفرانسیل خانواده هذلولی‌های $y = c/x$ کدام است؟

$$\begin{array}{ll} (۱) \text{ یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول و درجه یک است.} & (۲) \text{ یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول و درجه دو است.} \\ (۳) \text{ یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم و درجه یک است.} & (۴) \text{ یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم و درجه دو است.} \end{array}$$

۳۶- جواب خصوصی معادله دیفرانسیل $y'' - 6y' + 5y = 1$ به ازای $c_1 = c_2 = 0$ کدام است؟

$$\begin{array}{llll} y = 5 & (۱) & y - 5 = 0 & (۲) \\ 5y = 1 & (۳) & y = 1 & (۴) \end{array}$$

۳۷- جواب خصوصی معادله دیفرانسیل $d^2y/dx^2 - 10(dy/dx) + 25y = 5$ به ازای $c_1 = c_2 = 1$ کدام است؟

$$\begin{array}{llll} y = e^x(1 + x) & (۱) & y = 2e^x + \frac{1}{5} & (۲) \\ y = 2e^x & (۳) & y = e^x(1 + x) + \frac{1}{5} & (۴) \end{array}$$

۳۸- جواب خصوصی معادله دیفرانسیل $y'' + 2y' + 2y = 2$ به ازای $c_1 = c_2 = 1$ کدام است؟

$$\begin{array}{ll} y = e^{-x}(\cos x + \sin x) + 1 & (۱) \\ y = e^{-2x}(\cos x - \sin x) + 1 & (۲) \end{array}$$

۳۹- جواب خصوصی معادله دیفرانسیل $y'' + 4y = 2e^x$ به ازای $c_1 = c_2 = 2/5$ کدام است؟

$$\begin{array}{ll} y = \frac{2}{5}(\cos 2x + \sin 2x) + e^x & (۱) \\ y = \cos 2x + \sin 2x + \frac{2}{5}e^x & (۲) \\ y = \frac{2}{5}(\cos 2x + \sin 2x + e^x) & (۳) \end{array}$$

۴۰. جواب خصوصی معادله دیفرانسیل $y'' + y' + 2y = 2x^2$ کدام است؟

$$y = x^2 + x - \frac{1}{4} \quad (۴) \quad y = x^2 + x - 6 \quad (۳) \quad y = x^2 - x - 1 \quad (۲) \quad y = x^2 - x - \frac{1}{4} \quad (۱)$$

۴۱. جواب خصوصی معادله دیفرانسیل $y'''' - y''' - 9y'' - 11y' - 4y = 0$ بازاری $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 1$ کدام است؟

$$y = e^{2x} + (x^2 + x + 1)e^{-x} \quad (۲) \quad y = e^{2x}(x^2 + x + 1) \quad (۱)$$

$$y = e^{2x} + (x^2 + x + 1)e^{-x} \quad (۴) \quad y = (x^2 + x + 1)e^{-x} \quad (۳)$$

۴۲. جواب خصوصی معادله دیفرانسیل $y'' - 4y' + 8y = 0$ بازاری $c_1 = c_2 = 1$ کدام است؟

$$y = e^{2x}(\cos 2x + \sin 2x) \quad (۲) \quad y = e^{2x}(\cos 2x + \sin 2x) \quad (۱)$$

$$y = e^x(\cos x + \sin x) \quad (۴) \quad y = e^{2x}(\cos x + \sin x) \quad (۳)$$

۴۳. جواب خصوصی معادله دیفرانسیل $y'' - y = xe^x$ بازاری $c_1 = c_2 = 1/2$ کدام است؟

$$y = \frac{1}{4}(e^x + e^{-x} + x^2 e^x) - x e^x \quad (۲) \quad y = \frac{1}{4}(e^{-x} + x e^x) \quad (۱)$$

$$y = \frac{1}{4}(e^x + e^{-x} + x^2 e^x) \quad (۴) \quad y = \frac{1}{4}(e^x + x^2 e^x) \quad (۳)$$

۴۴. معادله دیفرانسیل خانواده منحنی‌های $y = ax + bx^2$ کدام است؟

$$2x^2 y'' - 2xy' - 2y = 0 \quad (۲) \quad x^2 y'' + 2x^2 y' + 4xy = 0 \quad (۱)$$

$$x^2 y'' + 2xy' - 2y = 0 \quad (۴) \quad x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0 \quad (۳)$$

۴۵. در کدام گزینه زیر، معادله دیفرانسیل در جواب داده شده در آن صدق نمی‌کند؟

$$y = c_1 + c_2 x, y'' = 0 \quad (۲) \quad y = c_1(x^2 + c_2), y' = xy'' \quad (۱)$$

$$y = \frac{c+x}{x^2+1}, y' = \frac{1-2xy}{x^2+1} \quad (۴) \quad y = c \sin x, y'' - y = 0 \quad (۳)$$

تست‌های آزمون کارشناسی ارشد

«معادلات دیفرانسیل»

• تست‌های شماره ۱ الی ۴ آزمون‌های کارشناسی ارشد مجموعه علوم اقتصادی

۱- جواب معادله دیفرانسیل $y'' + 4y = 0$ کدام است؟

$$\sin 2x + c \quad (۱) \quad -\frac{1}{4}x^2 + c \quad (۲) \quad cx + c^2 \quad (۳) \quad \text{هیچ‌کدام} \quad (۴)$$

۲- جواب عمومی معادله دیفرانسیل $(y+1)dx - \tan x dy = 0$ عبارت است از:

$$y = c \sin x - 1 \quad (۲) \quad y = c \tan x + 1 \quad (۳) \quad y = c \cos x + 1 \quad (۲) \quad y = c \sin x + 1 \quad (۱)$$

۳- جواب خصوصی معادله $y'' - 2y' + 2y = e^{2x}$ بازاری $c_1 = c_2 = 0$ کدام است؟

$$\frac{2}{3}e^{2x} \quad (۴) \quad \frac{1}{4}e^{2x} \quad (۳) \quad \frac{1}{3}e^{2x} \quad (۲) \quad \frac{1}{4}e^{2x} \quad (۱)$$

۴- جواب عمومی معادله دیفرانسیل $(y+2)dx + \tan x dy = 0$ عبارت است از:

$$y = \frac{c}{|\sin x|} - 2 \quad (۴) \quad y = c|\cos x| - 2 \quad (۳) \quad y = \frac{c}{|\cos x|} \quad (۲) \quad y = c|\sin x| + 2 \quad (۱)$$

معادلات تفاضلی

۱-۱۲ تعریف معادله تفاضلی

اگر $y_x = f(x)$ یک دنباله باشد هر رابطه بین تفاضلات محدود این دنباله را یک معادله تفاضلی گویند. به بیان دیگر یک معادله تفاضلی رابطه‌ای مشتمل بر مقادیر یک متغیر غیرمستقل به ازای مجموعه‌ای جدا از مقادیر متغیر مستقل (یا وقفه) می‌باشد.

تغییر y زمانی که x از x تا $x+1$ انجام شود، تفاضل مرتبه اول، Δy_x ، است و آن را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\Delta y_x = y_{x+1} - y_x$$

به همین ترتیب تفاضل مرتبه دوم y_x ، به صورت زیر است (مسئله ۱):

$$\Delta^2 y_x = y_{x+2} - 2y_{x+1} + y_x$$

و تفاضل مرتبه سوم y_x ، به صورت زیر است:

$$\Delta^3 y_x = y_{x+3} - 3y_{x+2} + 3y_{x+1} - y_x$$

و تفاضل مرتبه n ام y_x ، به صورت زیر است:

$$\Delta^n y_x = \Delta(\Delta^{n-1} y_x) = y_{x+n} - C_n^1 y_{x+(n-1)} + C_n^2 y_{x+(n-2)} - \dots + (-1)^n y_x$$

$$\Delta^n y_x = \sum_{i=0}^n \frac{n!}{(n-i)!i!} (-1)^i y_{x+(n-i)}$$

صورت کلی معادله تفاضلی مرتبه n برحسب y و n تفاضل اولیه‌اش به شکل زیر است:

$$F(x, y_x, \Delta y_x, \Delta^2 y_x, \dots, \Delta^n y_x) = 0$$

توجه شود که Δy_x نیز تابعی از x است. Δ ، عملگر یا اپراتور است و قاعده محاسبه Δy_x را از دنباله $y_0, y_1, y_2, \dots$ به دست می‌دهد. صورت کلی معادله تفاضلی را با استفاده از رابطه گریگوری-نیوتن نیز نمایش می‌دهند.

$$F(x, y_x, y_{x+h}, y_{x+2h}, \dots, y_{x+nh}) = 0$$

ممکن است $h = 1$ باشد (در عبارت‌های قبلی چنین فرض شده بود)، یعنی داریم:

$$F(x, y_x, y_{x+1}, y_{x+2}, \dots, y_{x+n}) = 0$$

(۱) این رابطه موسوم به فرمول گریگوری-نیوتن است.

۱۲-۲ درجه و مرتبه یک معادله تفاضلی

در معادله تفاضلی $F(x, y_x, y_{x+h}, \dots, y_{x+nh}) = 0$ ، اگر y_{x+nh} مقدار y با بیش‌ترین اندیس باشد توان جبری آن را درجه تفاضلی گویند. اگر کم‌ترین اندیس و بیش‌ترین اندیس y را در نظر بگیریم، اختلاف تعداد h ها را مرتبه معادله تفاضلی گویند (مسئله ۲).

۱۲-۳ معادلات تفاضلی خطی

اگر در صورت معادله تفاضلی، تابع تنها از درجه اول باشد، معادله از نوع تفاضلی است. صورت کلی معادله تفاضلی خطی مرتبه m به صورت زیر است:

$$a_0(x)y_{x+m} + a_1(x)y_{x+(m-1)} + \dots + a_{m-1}(x)y_{x+1} + a_m(x)y_x = g(x)$$

که در آن $a_n, \dots, a_1, a_0, g$ تابعی از x (و نه از y) بوده و برای مقادیر $x = 0, 1, 2, \dots$ تعریف شده‌اند. در رابطه فوق اگر $g(x) = 0$ باشد، معادله تفاضلی را معادله خطی همگن گویند.

۱۲-۴ تشکیل معادلات تفاضلی

دنباله n پارامتر مستقل $y_x = f(x, c_1, c_2, \dots, c_n)$ را در نظر گرفته، می‌توان نوشت:

$$y_x = f(x, c_1, c_2, \dots, c_n)$$

$$y_{x+1} = f(x+1, c_1, c_2, \dots, c_n)$$

$$\vdots$$

$$y_{x+n} = f(x+n, c_1, c_2, \dots, c_n)$$

اگر بین $n+1$ معادله فوق پارامترهای $c_n, \dots, c_2, c_1$ را حذف کنیم، خواهیم داشت:

$$F(x, y_x, y_{x+1}, \dots, y_{x+n}) = 0$$

که یک معادله تفاضلی مرتبه n است (مسئله ۳).

۱۲-۵ جواب‌های معادلات تفاضلی

جواب یک معادله تفاضلی، رابطه‌ای تابعی است که مشتق‌ها تفاضلی‌ها نباشد و برای جمیع مقادیر صحیح غیرمنفی تعریف شده باشد و همچنین در معادله تفاضلی صدق کند. چنین جوابی بسته به اینکه پارامترهای مستقل مشخص شده و یا نشده‌اند ممکن است جواب عمومی یا خصوصی باشد.

۱۲-۵-۱ جواب عمومی معادله تفاضلی

دنباله n پارامتری مستقل از هم $y_x = f(x, c_1, c_2, \dots, c_n)$ را در نظر می‌گیریم، معادله تفاضلی این معادله به صورت $F(x, y_x, y_{x+1}, \dots, y_{x+n}) = 0$ بدیهي است که دنباله y_x در معادله تفاضلی صدق می‌کند، دنباله y_x را جواب عمومی معادله تفاضلی گویند. اگر معادله تفاضلی مرتبه اول باشد جواب عمومی آن دارای یک پارامتر مستقل است و اگر معادله تفاضلی مرتبه دوم باشد جواب عمومی آن دارای دو پارامتر مستقل است و به‌طور کلی اگر معادله تفاضلی مرتبه n باشد جواب عمومی آن دارای n پارامتر مستقل است.

۱۲-۵-۲ جواب خصوصی معادله تفاضلی

فرض می‌کنیم $y_x = f(x, c_1, c_2, \dots, c_n)$ جواب عمومی معادله تفاضلی $F(x, y_x, y_{x+1}, \dots, y_{x+n}) = 0$ باشد، اگر شرط یا شرایط خاصی را در نظر بگیریم به طوری که برخی یا تمامی پارامترهای مستقل محاسبه شود، جواب به دست آمده موسوم به جواب خصوصی معادله تفاضلی است (مسئله ۴).

۱۲-۶-۲ جواب‌های مستقل خطی

قضیه: مجموع n تابع $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ مستقل خطی هستند اگر و فقط اگر درمیان زیر مخالف صفر باشد، در غیر این صورت این توابع وابسته خطی هستند^۱ (مسئله ۵).

$$C = \begin{vmatrix} f_1(0) & f_2(0) & \dots & f_n(0) \\ f_1(1) & f_2(1) & \dots & f_n(1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1(n-1) & f_2(n-1) & \dots & f_n(n-1) \end{vmatrix}$$

قضیه: اگر $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ n ریشه مستقل خطی یک معادله تفاضلی خطی مرتبه n باشند، در این صورت جواب عمومی به صورت زیر است (مسئله ۶).

$$y_x = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots + c_n f_n(x)$$

۱۲-۷-۲ حل معادلات تفاضلی

در این قسمت به نحوه حل برخی از معادلات تفاضلی می‌پردازیم.

۱۲-۷-۱ معادله تفاضلی خطی مرتبه اول

این معادله به صورت زیر است:

$$y_{x+1} = Ay_x + B$$

که در آن A و B اعداد ثابت و $A \neq 0$ است. جواب عمومی آن عبارت است از:

$$y_x = A^x \left(y_0 - \frac{B}{1-A} \right) + \frac{B}{1-A}, \quad A \neq 1$$

$$y_x = y_0 + Bx, \quad A = 1$$

y_0 به عنوان ثابت دلخواه جواب عمومی است. اگر y_0 معلوم باشد، جواب خصوصی معادله به دست می‌آید (مسئله ۷).

۱۲-۷-۲ معادله تفاضلی خطی مرتبه دوم

این معادله تفاضلی به صورت کلی

$$Ay_{x+2} + By_{x+1} + Cy_x = f(x)$$

می‌باشد، برای حل آن معادله درجه دوم $Ak^2 + Bk + C = 0$ را تشکیل می‌دهیم و ریشه‌های آن (k_1, k_2) را به دست می‌آوریم.

(۱) یعنی اگر $0 \neq C$ توابع مستقل خطی و اگر $0 = C$ توابع وابسته خطی هستند.

۱- اگر $\Delta > 0$ ، دو ریشه k_1 و k_2 ، آن‌گاه:

۲- اگر $\Delta = 0$ ، ریشه مضاعف $k_1 = k_2$ ، آن‌گاه:

۳- اگر $\Delta < 0$ ، ریشه مختلط $a \pm bi$ ، آن‌گاه:

در حالت (۳) داریم $\tan \theta = b/a$ و $r = \sqrt{a^2 + b^2}$.

برای تعیین y^* دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

الف) اگر $f(x) = 0$ باشد، آن‌گاه $y^* = 0$ است.

ب) اگر $f(x)$ مقدار ثابتی باشد، یعنی $f(x) = D$ در معادله $Ay_{x+2} + By_{x+1} + Cy_x = D$ باید به‌جای

$f(x) = y^*$ ، $f(x) = y_x$ را قرار داد. در صورتی که y^* به‌طریق فوق به‌دست نیامد، باید $f(x) = xy^*$ را قرار دهیم و

اگر باز هم به‌دست نیامد $f(x) = x^2 y^*$ (مسئله ۸).

مسائل نمونه فصل ۱۲

۱. اگر $y = x^2 - 3$ باشد، تفاضل مرتبه دوم آن را بیابید.

۲. در هر یک از معادلات تفاضلی زیر درجه و مرتبه آن‌ها را تعیین کنید.

الف) $y_{x+2} - y_{x+1} + xy_x = 0$ ب) $3y_{x+2} - 5y_{x+1} = 0$

۳. معادله تفاضلی دنباله $y_x = c_1 2^x + c_2 3^x + 3x^2 + 2$ را تشکیل دهید.

۴. نشان دهید $y_x = x + c$ یک جواب معادله $y_{x+1} - y_x = 1$ است. اگر $y_0 = 2$ باشد جواب خصوصی آن را پیدا کنید.

۵. توابع $5x$ ، 1 ، x^2 و x^3 وابسته خطی هستند یا مستقل خطی؟

۶. در معادله تفاضلی $2y_{x+2} - 5y_{x+1} + 2y_x = 0$ جواب‌های $(3)^x$ و $(1/2)^x$ صدق می‌کنند، مطلوب است جواب عمومی معادله تفاضلی.

۷. جواب عمومی معادله تفاضلی $2y_{x+1} - 4y_x = 3$ را بیابید و به‌ازاء $5/2$ جواب خصوصی آن را تعیین کنید.

۸. جواب عمومی معادله تفاضلی $16y_{x+2} + 16y_{x+1} + 5y_x = 0$ را بیابید و همچنین جواب خصوصی آن را اگر $y_0 = 1$ و $y_1 = 1$ باشد پیدا کنید.

پاسخ مسائل نمونه فصل ۱۲

۱.

$$\Delta^2 y_x = y_{x+2} - 2y_{x+1} + y_x = [(x+2)^2 - 3] - 2[(x+1)^2 - 3] + x^2 - 3 \Rightarrow$$

$$\Delta^2 y_x = x^2 + 4x + 4 - 3 - 2x^2 - 4x - 2 + 6 + x^2 - 3 = 2$$

۲. الف) مرتبه سوم و درجه اول ب) مرتبه اول و درجه اول

۳.

$$-2 \begin{cases} y_x = c_1 2^x + c_2 4^x + 3x^2 + 2 \\ y_{x+1} = 2c_1 2^x + 4c_2 4^x + 3(x+1)^2 + 2 \end{cases}$$

ابتدا c_1 را حذف می‌کنیم:

$$y_{x+1} - 2y_x = 2c_2 4^x - 3x^2 + 6x + 1$$

در رابطه فوق x را به $x+1$ بدل می‌کنیم:

$$-4 \begin{cases} y_{x+1} - 2y_x = 2c_2 4^x - 3x^2 + 6x + 1 \\ y_{x+2} - 2y_{x+1} = 8c_2 4^x - 3(x+1)^2 + 6(x+1) + 1 \end{cases}$$

c_2 را حذف می‌کنیم: معادله تفاضلی مرتبه دوم $y_{x+2} - 6y_{x+1} + 8y_x = 9x^2 - 24x$

۴.

$$y_{x+1} - y_x = 1 \Rightarrow (x+1+c) - (x+c) = 1 \Rightarrow 1 = 1$$

بنابراین یک جواب معادله است. $y_x = x + c$

جواب خصوصی $y_0 = 2 \Rightarrow 2 = 0 + c \Rightarrow c = 2 \Rightarrow y_x = x + 2$

۵.

$$C = \begin{vmatrix} f_1(0) & f_2(0) & f_3(0) \\ f_1(1) & f_2(1) & f_3(1) \\ f_1(2) & f_2(2) & f_3(2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 2 \\ 10 & 5 & 6 \end{vmatrix} = -10 \neq 0 \Rightarrow \text{توابع مستقل خطی اند.}$$

۶. توابع $(1/2)^x$, $(3)^x$ مستقل خطی اند، زیرا $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1/2 & 3 \end{vmatrix} = 5/2 \neq 0$ ، بنابراین قضیه ۲ خواهیم داشت:

$$y_x = c_1(3)^x + c_2\left(\frac{1}{2}\right)^x$$

۷.

$$\begin{aligned} 2y_{x+1} - 4y_x &= 3 \Rightarrow 2y_{x+1} = 4y_x + 3 \Rightarrow y_{x+1} = 2y_x + \frac{3}{2} \\ y_x &= 2^x \left(y_0 - \frac{\frac{3}{2}}{1-2} \right) + \frac{\frac{3}{2}}{1-2} \Rightarrow y_x = 2^x \left(y_0 + \frac{3}{2} \right) - \frac{3}{2} \quad \text{جواب عمومی} \\ y_0 = \frac{5}{2} &\Rightarrow y_x = 2^x \left(\frac{5}{2} + \frac{3}{2} \right) - \frac{3}{2} = 2^x(4) - \frac{3}{2} \Rightarrow y_x = 2^{x+2} - \frac{3}{2} \quad \text{جواب خصوصی} \end{aligned}$$

۸.

$$k^2 + 16 = 0, \Delta < 0, k^2 = -16 \Rightarrow k = \pm 4i$$

$$r = \sqrt{0 + 16} \Rightarrow r = 4, \tan \theta = \frac{4}{0} = \infty \Rightarrow \tan \theta = \tan \frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$y_x = 4^x \left(c_1 \cos \frac{\pi}{4} x + c_2 \sin \frac{\pi}{4} x \right) + y^*$$

$$y^* : y^* + 16y^* = 17 \Rightarrow y^* = 1 \Rightarrow y_x = 4^x \left(c_1 \cos \frac{\pi}{4} x + c_2 \sin \frac{\pi}{4} x \right) + 1$$

$$\begin{cases} y_0 = 0 \Rightarrow 4^0 (c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0) = 0 \\ y_1 = 1 \Rightarrow 4^1 (c_1 \cos \frac{\pi}{4} + c_2 \sin \frac{\pi}{4}) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 + 0 = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \\ 4(0 + c_2) = 1 \Rightarrow c_2 = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$y_x = 4^x \left(\frac{1}{4} \sin \frac{\pi}{4} x \right) + 1 = 4^{x-1} \sin \frac{\pi}{4} x + 1$$

سؤالات تستی فصل ۱۲

۱- به ترتیب مرتبه و درجه معادله تفاضلی $2y_{x+1} + 3y_{x+1} - 2y_{x+2}$ کدام است؟

(۴) چهارم-دوم

(۳) چهارم-اول

(۲) اول-سوم

(۱) سوم-اول

۲- اگر $y = e^x$ ، آن‌گاه $\Delta^1 y_x$ کدام است؟

$$e^x(e+1)^2 \quad (۲) \quad e^x(e-1)^2 \quad (۳) \quad e^x(e^2-1) \quad (۲) \quad e^x(e^2-2e) \quad (۱)$$

۳- اگر $y = 2x+1$ باشد، تفاضل مرتبه سوم آن کدام است؟

$$x+1 \quad (۴) \quad 2 \quad (۳) \quad 1 \quad (۲) \quad 0 \quad (۱)$$

۴- معادله $\Delta^2 y_x - 3\Delta y_x - y_x = 0$ برابر است با:

$$y_{x+2} + y_{x+1} + y_x = 0 \quad (۲) \quad y_{x+2} - 5y_{x+1} + y_x = 0 \quad (۱) \\ y_{x+2} - 5y_{x+1} + 3y_x = 0 \quad (۴) \quad y_{x+2} + y_{x+1} + 3y_x = 0 \quad (۳)$$

۵- مرتبه معادله $\Delta^2 y_x + \Delta^1 y_x + \Delta y_x = -y_x$ کدام است؟

$$اول \quad (۱) \quad دوم \quad (۲) \quad سوم \quad (۳) \quad چهارم \quad (۴)$$

۶- تفاضل مرتبه پنجم y_x کدام است؟

$$y_{x+5} - 5y_{x+4} + 10y_{x+3} - 10y_{x+2} + 5y_{x+1} - y_x \quad (۱) \\ y_{x+5} + 5y_{x+4} + 10y_{x+3} + 10y_{x+2} + 5y_{x+1} + y_x \quad (۲) \\ -y_{x+5} + 5y_{x+4} - 10y_{x+3} - 5y_{x+2} - 5y_{x+1} + y_x \quad (۳) \\ y_{x+5} - 5y_{x+4} + 10y_{x+3} - 10y_{x+2} + 5y_{x+1} - y_x \quad (۴)$$

۷- در تفاضل مرتبه هفتم y_x ضریب y_{x+3} کدام است؟

$$-35 \quad (۴) \quad -21 \quad (۳) \quad 35 \quad (۲) \quad 21 \quad (۱)$$

۸- تابع $y_x = ax^2 + bx + c$ مفروض است، کدام تساوی نادرست است؟

$$\Delta^2 y_x = D^2 y \quad (۱) \quad \Delta^2 y_x = D y \quad (۲) \quad \Delta^2 y_x = \Delta^0 y_x \quad (۳) \quad \Delta^2 y_x = D^2 y \quad (۴)$$

۹- یک جواب معادله تفاضلی $y_{x+1} - y_x = x$ کدام است؟

$$y_x = \frac{x^2-1}{2} + c \quad (۴) \quad y_x = x + c \quad (۳) \quad y_x = \frac{x(x-1)}{2} + c \quad (۲) \quad y_x = \frac{x-1}{2} + c \quad (۱)$$

۱۰- اگر $y_x = c/(1+cx)$ جواب معادله $y_{x+1} = y_x/(1+y_x)$ باشد، به ازای -4 ، y_0 جواب خصوصی معادله کدام است؟

$$\frac{-4}{4x+1} \quad (۴) \quad \frac{4}{1-4x} \quad (۳) \quad \frac{4}{4x-1} \quad (۲) \quad \frac{-4}{4x-1} \quad (۱)$$

۱۱- اگر $y_x = c_1 + 2^x c_2 + 3^x c_3$ یک جواب معادله $y_{x+2} - 6y_{x+1} + 11y_x = 0$ باشد، به ازای 1 ، $y_0 =$

و $y_1 = -1$ ، جواب خصوصی معادله کدام است؟

$$y_x = 2^{x+2} - 3^x \quad (۴) \quad y_x = 2^{x+1} - 3^x \quad (۳) \quad y_x = 2^x - 3^x \quad (۲) \quad y_x = 2^{x+1} + 3^x \quad (۱)$$

۱۲- اگر $y_x = c_1 + c_2 2^x - x$ جواب معادله $y_{x+2} - 3y_{x+1} + 2y_x = 1$ باشد، به ازای 1 و 2 ، y_1 جواب خصوصی معادله کدام است؟

$$y_x = -1 + 2^x - 2x \quad (۴) \quad y_x = 3^x - x \quad (۳) \quad y_x = -1 + 2^{x+1} - x \quad (۲) \quad y_x = 2^x - x \quad (۱)$$

۱۳- معادله تفاضلی دنباله $y_x = c_1 + c_2 2^x + \frac{1}{6} 4^x$ کدام است؟

$$y_{x+2} - 3y_{x+1} + 2y_x = 4^x \quad (۲) \quad y_{x+2} - 3y_{x+1} + 2y_x = -4^x \quad (۱) \\ y_{x+2} - 5y_{x+1} + 4y_x = 2^x \quad (۴) \quad y_{x+2} - 5y_{x+1} + 4y_x = 0 \quad (۳)$$

۱۴- کدام گزاره دربارهٔ دستهٔ توابع زیر درست است؟

b) $x^7 - 2x, 3x, 4$

a) $2^x, 2^{2x}, 2^{3x}$

۱) a و b وابسته خطی هستند.

۲) a و b مستقل خطی هستند.

۱۵- در معادلهٔ تفاضلی $y_{x+2} + 5y_{x+1} + 6y_x = 0$ جواب‌های $(-2)^x$ و $(-3)^x$ صدق می‌کند، اگر $y_0 = 1$ و $y_1 = 3$ باشد، جواب خصوصی معادله کدام است؟

$y_x = -6(-2)^x + 5(-3)^x$ (۲)

$y_x = -6(-2)^x - 5(-3)^x$ (۱)

$y_x = 6(-2)^x - 5(-3)^x$ (۴)

$y_x = 6(-2)^x + 5(-3)^x$ (۳)

۱۶- جواب عمومی معادلهٔ تفاضلی $8y_{x+1} + 4y_x - 3 = 0$ کدام است؟

$y_x = \left(\frac{1}{4}\right)^x \left(y_0 - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4}$ (۲)

$y_x = \left(-\frac{1}{2}\right)^x \left(y_0 - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4}$ (۱)

$y_x = \left(\frac{1}{4}\right)^x \left(y_0 + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{4}$ (۴)

$y_x = \left(-\frac{1}{2}\right)^x \left(y_0 + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{4}$ (۳)

۱۷- جواب خصوصی معادلهٔ تفاضلی $y_{x+2} + 2y_x = 0$ اگر $y_0 = 1$ و $y_1 = \sqrt{2}$ باشد، کدام است؟

$y_x = (\sqrt{2})^x \left(\cos \frac{\pi}{4} x + \sin \frac{\pi}{4} x\right)$ (۲)

$y_x = (\sqrt{2})^x \left(\cos \frac{\pi}{4} x - \sin \frac{\pi}{4} x\right)$ (۱)

$y_x = (\sqrt{2})^x \left(\cos \frac{3\pi}{4} x + \sin \frac{3\pi}{4} x\right)$ (۴)

$y_x = (\sqrt{2})^x \left(\sin \frac{\pi}{4} x - \cos \frac{\pi}{4} x\right)$ (۳)

۱۸- جواب خصوصی معادلهٔ تفاضلی $y_{x+1} - y_x - 1 = 0$ اگر $y_0 = 2$ باشد، کدام است؟

$y_x = 5x$ (۴)

$y_x = 2 + 5x$ (۳)

$y_x = 2 + 1^x$ (۲)

$y_x = 2$ (۱)

۱۹- جواب خصوصی معادلهٔ تفاضلی $9y_{x+1} + 5y_x - 18 = 0$ اگر $y_0 = 1$ باشد، کدام است؟

$y_x = \left(\frac{5}{9}\right)^x \left(-\frac{2}{9}\right) + \frac{9}{5}$ (۲)

$y_x = \left(-\frac{5}{9}\right)^x \left(\frac{2}{9}\right) + \frac{9}{5}$ (۱)

$y_x = \left(-\frac{5}{9}\right)^x \left(-\frac{2}{9}\right) + \frac{9}{5}$ (۴)

$y_x = \left(\frac{5}{9}\right)^x \left(\frac{2}{9}\right) + \frac{9}{5}$ (۳)

۲۰- جواب عمومی معادلهٔ تفاضلی $y_{x+1} + 3y_x = 0$ کدام است؟

$y_x = (3)^x$ (۴)

$y_x = (-3)^x$ (۳)

$y_x = y_0(3)^x$ (۲)

$y_x = y_0(-3)^x$ (۱)

۲۱- جواب خصوصی معادلهٔ تفاضلی $2y_{x+1} - y_x = 2$ اگر $y_0 = 4$ باشد، کدام است؟

$y_x = \left(\frac{1}{2}\right)^x (2) (4)$

$y_x = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 2 (3)$

$y_x = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} + 2 (2)$

$y_x = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} + 2 (1)$

۲۲- جواب خصوصی معادلهٔ تفاضلی $y_{x+2} - 3y_{x+1} + 2y_x = 0$ اگر $y_0 = 1$ و $y_1 = 2$ باشد، کدام است؟

$y_x = (2)^{x+1}$ (۴)

$y_x = (2)^x$ (۳)

$y_x = (1)^x$ (۲)

$y_x = (2)^x + (1)^x$ (۱)

۲۳- جواب خصوصی معادلهٔ تفاضلی $y_{x+2} + 2y_{x+1} + 2y_x = 0$ اگر $y_0 = 1$ و $y_1 = 1$ باشد، کدام است؟

$y_x = (\sqrt{2})^x \left(\cos \frac{\pi}{4} x + \sin \frac{\pi}{4} x\right)$ (۲)

$y_x = (\sqrt{2})^x \sin \frac{\pi}{4} x$ (۱)

$y_x = (\sqrt{2})^x \sin \frac{\pi}{4} x$ (۴)

$y_x = 2^x \cos \frac{\pi}{4} x$ (۳)

۲۴- جواب خصوصی معادله تفاضلی $y_{x+2} - 2y_{x+1} - y_x = 0$ اگر $c_1 = c_2 = 1$ باشد، کدام است؟

$$y_x = -1 + (2)^x + (3)^x \quad (2)$$

$$y_x = 1 + (-1)^x + (2)^x \quad (1)$$

$$y_x = (-1)^x + (2)^x \quad (4)$$

$$y_x = 1 + (2)^x + (3)^x \quad (3)$$

۲۵- جواب خصوصی معادله تفاضلی $4y_{x+2} + 25y_x = 0$ اگر $c_1 = c_2 = 1$ باشد، کدام است؟

$$y_x = \left(\frac{5}{2}\right)^x (\cos \pi x + \sin \pi x) \quad (2)$$

$$y_x = \left(\frac{5}{2}\right)^x \left(\cos \frac{\pi}{2} x + \sin \frac{\pi}{2} x\right) \quad (1)$$

$$y_x = \left(\frac{2}{5}\right)^x (\cos \pi x + \sin \pi x) \quad (4)$$

$$y_x = \left(\frac{2}{5}\right)^x \left(\cos \frac{\pi}{2} x + \sin \frac{\pi}{2} x\right) \quad (3)$$

۲۶- جواب خصوصی معادله تفاضلی $y_{x+2} - 4y_{x+1} + 4y_x = 0$ اگر $y_1 = 1$ و $y_0 = 0$ باشد، کدام است؟

$$y_x = (2)^x \quad (4)$$

$$y_x = (2)^x + \frac{1}{2} x (2)^x \quad (2)$$

$$y_x = \frac{1}{2} (2)^x \quad (2)$$

$$y_x = \frac{x}{2} (2)^x \quad (1)$$

۲۷- جواب خصوصی معادله تفاضلی $y_{x+2} - 7y_{x+1} + 12y_x = 2$ اگر $c_1 = c_2 = 1$ باشد، کدام است؟

$$y_x = (4)^x + (3)^x + \frac{1}{6} \quad (2)$$

$$y_x = (4)^x + (3)^x \quad (1)$$

$$y_x = (4)^x + x(2)^x + \frac{1}{2} \quad (4)$$

$$y_x = (4)^x + (2)^x + \frac{1}{2} \quad (3)$$

۲۸- جواب خصوصی معادله تفاضلی $3y_{x+2} + 5y_{x+1} + 2y_x = 4$ اگر $y_1 = 1$ و $y_0 = 0$ باشد، کدام است؟

$$y_x = (-1)^x + \frac{3}{5} \left(-\frac{2}{3}\right)^x + \frac{2}{5} \quad (2)$$

$$y_x = -(-1)^x + \frac{3}{5} \left(-\frac{2}{3}\right)^x + \frac{2}{5} \quad (1)$$

$$y_x = (-1)^x + \left(-\frac{2}{3}\right)^x \quad (4)$$

$$y_x = -(-1)^x + \left(-\frac{2}{3}\right)^x + \frac{2}{5} \quad (3)$$

۲۹- جواب خصوصی معادله تفاضلی $\Delta^2 y_x - 3\Delta y_x - 2 = 0$ اگر $c_1 = c_2 = 1$ باشد، کدام است؟

$$y_x = (4)^x + x(1)^x - 1 \quad (2)$$

$$y_x = (4)^x + (1)^x + 1 \quad (1)$$

$$y_x = (4)^x + (1)^x - 1 \quad (4)$$

$$y_x = (4)^x + (1)^x + \frac{1}{2} \quad (3)$$

۳۰- جواب معادله تفاضلی $y_{x+2} = 3 + 9y_x$ به ازای $c_1 = c_2 = 1$ کدام است؟

$$y_x = (3)^x + (-3)^x - \frac{3}{8} \quad (2)$$

$$y_x = (3)^x + (-3)^x + \frac{3}{8} \quad (1)$$

$$y_x = (3)^x + x(3)^x \quad (4)$$

$$y_x = (3)^x + x(3)^x - \frac{3}{8} \quad (3)$$

تست‌های آزمون کارشناسی ارشد

«معادلات تفاضلی»

• تست‌های شماره ۱ الی ۳ آزمون‌های کارشناسی ارشد مجموعه علوم اقتصادی

۱- اگر $y_0 = 1$ باشد جواب معادله تفاضلی $y_{x+1} = y_x - 1$ کدام است؟

$$y_x = 1 - x \quad (4)$$

$$y_x = 1 + x \quad (3)$$

$$y_x = 2 - x \quad (2)$$

$$y_x = 3 + x \quad (1)$$

۲- جواب خصوصی معادله تفاضلی مرتبه دوم $y_{x+2} - y_x = 0$ به ازای $c_1 = c_2 = 1$ کدام است؟

$$y_x = 2(-1)^x \quad (4)$$

$$y_x = 2(-1)^x \quad (3)$$

$$y_x = (-1)^x \quad (2)$$

$$y_x = 1 + (-1)^x \quad (1)$$

۳- عبارت $y_x = x(x-1)/2$ جواب کدام معادله است؟

$$(4) \text{ هیچ کدام}$$

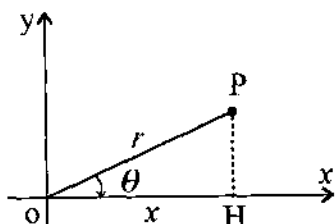
$$y_{x+1} - y_x = 2x \quad (3)$$

$$y_{x+1} - y_{x-1} = x \quad (2)$$

$$y_{x+1} - y_x = x \quad (1)$$

مختصات قطبی، اعداد مختلط

۱-۱۳ دستگاه مختصات قطبی



در دستگاه مختصات دکارتی، مختصات عددند، این اعداد که به طول و عرض موسومند فاصله‌های جهت‌دار از دو خط ثابت هستند. در دستگاه مختصات قطبی، مختصات عبارتند از یک فاصله جهت‌دار، اندازه یک زاویه نسبت به یک نقطه ثابت، و یک نیم خط ثابت.

برای نشان دادن وضعیت نقاط صفحه به وسیله مختصات قطبی، محور x ها را رسم می‌کنیم و بر روی آن نقطه ثابت O را تعیین می‌کنیم. نقطه O را قطب (یا مبدأ) و محور x ها را محور خطی (یا خط قطبی) می‌نامند. نقطه دلخواه P از صفحه، به جز O ، را به قطب وصل می‌کنیم طول نقطه OP را به r و زاویه HOP با جهت مثبت محور x ها را به θ که برحسب رادیان است، نشان می‌دهیم. r را شعاع حامل و θ را زاویه قطبی نقطه P گویند. زاویه θ با تقریب $2k\pi$ مشخص می‌شود که در آن $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ است.

هر مجموعه مختصات قطبی یک نقطه زوج مرتبی از اعداد حقیقی است. به ازای هر زوج مرتب از اعداد حقیقی یک نقطه یکتا وجود دارد که این زوج، یک مجموعه از مختصات قطبی آن است. بنابراین نقطه $P(x, y)$ در مختصات قطبی $P(r, \theta)$ است. لازم به تذکر است که هر نقطه مفروض، تعداد نامحدودی مجموعه مختصات قطبی دارد.

۱-۱-۱۳ تعیین مختصات قطبی از روی مختصات دکارتی

مثلث OPH را در نظر می‌گیریم، که در آن داریم:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \tan \theta = \frac{y}{x}$$

با معلوم بودن x و y از این روابط، مقدار r و θ به دست می‌آید. θ با تقریب $2k\pi$ و با توجه به علامت x و y تعیین می‌شود (مسئله ۱).

۲-۱-۱۳ تعیین مختصات دکارتی از روی مختصات قطبی

مثلث OPH را در نظر می‌گیریم، که در آن داریم:

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{x}{r} \\ \sin \theta = \frac{y}{r} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

با معلوم بودن r و θ از این روابط، مقدار x و y به دست می‌آید (مسئله ۲).

نکات مهم:

- ۱- شرط انطباق دو نقطه $P_1(r_1, \theta_1)$ و $P_2(r_2, \theta_2)$ آن است که $r_1 = r_2$ و $\theta_2 - \theta_1 = 2k\pi$ باشد.
- ۲- اگر $P_1(r_1, \theta_1)$ و $P_2(r_2, \theta_2)$ دو نقطه از مختصات در مثلث OP_1P_2 باشد، طول پاره خط P_1P_2 در مختصات قطبی برابر است با:

$$P_1P_2 = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)}$$

۱۳-۲ معادله یک منحنی به صورت مختصات قطبی

اگر مختصات دکارتی قائم نقطه‌ای معلوم باشد، برای یافتن معادلاتی که یک مجموعه مختصات قطبی آن را به دست می‌دهند، کافی است در مختصات دکارتی به جای x و y در روابط $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ و $\tan \theta = y/x$ مقدار قرار دهیم و برعکس. با داشتن مختصات قطبی می‌توانیم به جای r و θ در روابط $x = r \cos \theta$ و $y = r \sin \theta$ مقدار قرار دهیم (مسئله ۳).

نکات مهم:

- ۱- اگر با تبدیل θ به $-\theta$ معادله تغییر نکند، منحنی نسبت به محور قطبی متقارن است.
- ۲- اگر با تبدیل θ به $\theta + \pi$ معادله تغییر نکند، منحنی نسبت به قطب متقارن است.
- ۳- اگر با تبدیل θ به $\pi - \theta$ معادله تغییر نکند، منحنی نسبت به محور y ها متقارن است (مسئله ۴).

۱۳-۳ مجموعه اعداد موهومی

هر عدد مانند ai که در آن $a \in \mathbb{R}$ و $i = \sqrt{-1}$ می‌باشد، موسوم به عدد موهومی است. به طور کلی اگر مجموعه اعداد موهومی را به I نشان دهیم:

$$I = \{x | x = ai, a \in \mathbb{R}, i = \sqrt{-1}\}$$

۱۳-۴ مجموعه اعداد مختلط

هر عدد به صورت $a + ib$ که در آن $a, b \in \mathbb{R}$ و $i = \sqrt{-1}$ است، به عدد مختلط موسوم است. به طور کلی اگر مجموعه اعداد مختلط را به C نشان دهیم، داریم:

$$C = \{z | z = a + ib, a, b \in \mathbb{R}, i = \sqrt{-1}\}$$

بنابراین هر عدد مختلط از دو قسمت تشکیل شده است. از یک عدد حقیقی a و یک عدد موهومی ib ، قسمت موهومی z را به $Im(z)$ و قسمت حقیقی آن را به $Re(z)$ نشان می‌دهیم، داریم (مسئله ۵):

$$Im(z) = b, Re(z) = a$$

۱۳-۵ تساوی دو عدد مختلط

دو عدد مختلط $z_1 = a_1 + ib_1$ و $z_2 = a_2 + ib_2$ هنگامی و فقط هنگامی با هم مساویند که قسمت حقیقی آن‌ها با هم و قسمت موهومی آن‌ها با یکدیگر مساوی باشند، یعنی:

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow a_1 = a_2, b_1 = b_2$$

۱۳-۶ جمع و تفریق دو عدد مختلط

مجموع و تفاضل دو عدد مختلط $z_1 = a_1 + ib_1$ و $z_2 = a_2 + ib_2$ به صورت زیر است (مسئله ۶):

$$z_1 \pm z_2 = (a_1 + ib_1) \pm (a_2 + ib_2) = (a_1 \pm a_2) + i(b_1 \pm b_2)$$

۱۳-۷ ضرب دو عدد مختلط

ضرب دو عدد مختلط $z_1 = a_1 + ib_1$ و $z_2 = a_2 + ib_2$ به صورت زیر است:

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = a_1 a_2 + ia_1 b_2 + ib_1 a_2 + i^2 b_1 b_2$$

یعنی به طریق معمولی ضرب را انجام می‌دهیم و فقط به جای i^2 مقدار مساوی آن -1 را بگذارید (مسئله ۷).

$$i^n = \begin{cases} 1 & n = 4k \\ i & n = 4k + 1 \\ -1 & n = 4k + 2 \\ -i & n = 4k + 3 \end{cases} \quad \text{اگر } n \in \mathbb{N} \text{ باشد، داریم:}$$

۸-۱۳ مزدوج یک عدد مختلط

اگر $z = a + ib$ ، آن‌گاه مزدوج آن را به صورت $\bar{z}$ نشان می‌دهیم:

$$\bar{z} = a - ib$$

حاصل ضرب دو عدد مختلط مزدوج، عددی حقیقی است (مسائل ۸ و ۹).

$$z \cdot \bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$$

۹-۱۳ تقسیم دو عدد مختلط

برای تعیین خارج قسمت دو عدد مختلط $z_1 = a_1 + ib_1$ و $z_2 = a_2 + ib_2$ کافی است صورت و مخرج را در مزدوج مخرج ضرب کنیم، یعنی (مسئله ۱۱):

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} = \frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} \times \frac{a_2 - ib_2}{a_2 - ib_2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i \frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}$$

۱۰-۱۳ قدر مطلق اعداد مختلط

قدر مطلق عدد مختلط $z = a + ib$ را به صورت $|z|$ نشان می‌دهیم که برابر است با (مسئله ۱۰):

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

این قدر مطلق که عددی ثابت است، کالبد یا مدول عدد مختلط نیز نامیده می‌شود.

اگر $z = a + ib$ باشد، داریم:

$$\begin{array}{lll} ۱) |z| = |\bar{z}| & ۲) |z| \geq |a| & ۳) |z| \geq |b| \\ ۴) |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| & ۵) |z|^2 = z \cdot \bar{z} & ۶) \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \\ ۷) |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| & ۸) |z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2| & ۹) \frac{z_1 \pm z_2}{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2 \\ ۱۰) \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 & ۱۱) \left(\frac{\bar{z}_1}{z_2} \right) = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} & ۱۲) z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z) \\ ۱۳) z - \bar{z} = 2i\operatorname{Im}(z) & & \end{array}$$

۱۱-۱۳ تعریف اعداد مختلط به صورت جفت‌های مرتب

اگر a و b دو عدد حقیقی باشند، جفت مرتب (a, b) را در صورتی یک عدد مختلط می‌گویند که، تساوی، جمع و ضرب این زوج‌ها به صورت زیر تعریف شده باشد.

اولاً: تساوی، جفت‌های مرتب (a, b) و (c, d) مساویند، اگر و فقط اگر $a = c$ و $b = d$ باشد.

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c, b = d$$

ثانیاً: جمع، جفت‌های مرتب (a, b) و (c, d) به صورت زیر جمع می‌شوند:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

ثالثاً: ضرب، جفت‌های مرتب (a, b) و (c, d) به صورت زیر ضرب می‌شوند:

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

در عدد مختلط (a, b) ، زوج مرتب $(a, 0)$ به عنوان یک عدد حقیقی در نظر گرفته می‌شود، و آن را با نماد $(a, 0) = a$ نشان می‌دهیم. زوج مرتب $(0, 1)$ را واحد موهومی می‌نامیم و آن را با نماد $i = (0, 1)$ نشان می‌دهیم. هر عدد مختلط (a, b) را می‌توان به صورت $a + ib$ نیز نشان داد، یعنی:

$$z = (a, b) = a + ib$$

نکات مهم:

۱- در حالت کلی عدد مختلط (a, b) با (b, a) مساوی نیست.

۲- عدد مختلط $(0, 0)$ عنصر بی‌اثر برای جمع است.

۳- عدد مختلط $(1, 0)$ عنصر بی‌اثر برای ضرب است.

۱۳-۱۲ تعبیر هندسی اعداد مختلط و صورت قطبی آن

فرض کنید (r, θ) مختصات قطبی عدد مختلط $z = (x, y)$ باشد. داریم:

$$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$$

با جای‌گذاری x و y در فرم جبری $z = x + iy$ خواهیم داشت (مسئله ۱۲):

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = r \operatorname{cis} \theta$$

در $z = r \operatorname{cis} \theta$ علامت کسینوس، i واحد موهومی و r علامت سینوس می‌باشد. این فرم نمایش z را، شکل قطبی z می‌نامیم و داریم:

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \tan \theta = \frac{y}{x}$$

r مدول یا کالید یا قدرمطلق z و زاویه θ را آرگومان z می‌نامیم و آن را با نماد $\arg(z)$ نشان می‌دهیم.

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = r e^{i\theta} \quad \text{بنابراین} \quad e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

۱۳-۱۳ حاصل ضرب دو عدد مختلط که به صورت قطبی باشد

دو عدد مختلط $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$ و $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$ را که به صورت قطبی نوشته شده است در نظر می‌گیریم، حاصل ضرب آن‌ها به صورت زیر است:

$$z = z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2))$$

یعنی حاصل ضرب دو عدد مختلط عددی است مختلط که کالید آن برابر حاصل ضرب کالیدها و آرگومان آن نیز برابر مجموع آرگومان‌هاست. رابطه فوق را برای ضرب n عدد مختلط می‌توان تعمیم داد:

$$z = z_1 \cdot z_2 \cdots z_n = r_1 \cdot r_2 \cdots r_n (\cos(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n) + i \sin(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n))$$

اگر در رابطه فوق $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ ، $z_1 = z_2 = \cdots = z_n = z$ باشد و n بار z در خودش ضرب شود، داریم:

$$z^n = r^n (\cos \theta + i \sin \theta)^n$$

که نتیجه موسوم به رابطه موآور است، یعنی (مسئله ۱۳):

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

۱۳-۱۴ خارج قسمت دو عدد مختلط که به صورت قطبی باشد

دو عدد مختلط $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$ و $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$ را که به صورت قطبی نوشته شده در نظر می‌گیریم؛ خارج قسمت آن‌ها به صورت زیر است:

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2))$$

یعنی خارج قسمت دو عدد مختلط عددی است مختلط که کالبد آن برابر است با خارج قسمت کالبدها یعنی $|z_1|/|z_2| = r_1/r_2$ و آرگومان آن برابر تفاضل آرگومان‌هاست یعنی $\theta_1 - \theta_2$ (مسئله ۱۴).

نکات مهم:

$$z \cdot z = r \cdot r(\cos 0 + i \sin 0) = r^2 \quad ۱-$$

$$1/z = 1/r(\cos \theta - i \sin \theta) \quad ۲-$$

$$z^{-n} = 1/z^n = 1/r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta) \quad ۳-$$

۱۳-۱۵ ریشه‌های n ام یک عدد مختلط

فرض کنید z یک عدد مختلط باشد، می‌خواهیم $z^{1/n}$ را تعیین می‌کنیم. اگر z یکی از ریشه‌ها باشد، یعنی $z^n = z_0 = z$ یا $z^n = z$

$$r^n(\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)) = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

بنابراین:

$$z = \sqrt[n]{r} \left(\cos \left(\frac{2k\pi + \theta}{n} \right) + i \sin \left(\frac{2k\pi + \theta}{n} \right) \right)$$

که در آن $k = 0, 1, 2, 3, \dots, n-1$ است (مسئله ۱۵).

نکات مهم:

۱- ریشه‌های n ام عدد مختلط z اعدادی هستند مختلط که کالبد آن‌ها همگی با هم مساوی بوده و برابر $\sqrt[n]{r}$ می‌باشد و اختلاف آرگومان آن‌ها $2\pi/n$ است.

۲- ریشه‌های n ام هر عدد مختلط برابر حاصل ضرب یکی از ریشه‌های آن، در ریشه‌های n ام عدد یک می‌باشند.

۳- اگر هر یک از ریشه‌های n ام z را به توان n برسانیم عدد z به دست می‌آید.

مسائل نمونه فصل ۱۳

۱. مختصات قطبی نقطه $A(-1, -1)$ را بنویسید.

۲. مختصات دکارتی نقطه $M(2, \pi/3)$ را بنویسید.

۳. معادله دایره‌ای که مرکز آن مبدأ مختصات و شعاع آن R است، به صورت معادله قطبی بنویسید.

۴. تقارن نمودار معادله $\cos 2\theta = r$ نسبت به محور قطبی، قطب و محور θ ها را بیازماید.

۵. ریشه‌های مختلط $x^2 + 8x + 18 = 0$ را بیابید.

(۱۰-۶). اگر $z_1 = 4 + 2i$ و $z_2 = 3 + 2i$ و $z_3 = 1 - i$ باشد، مطلوب است:

۶) $z_1 + z_2$

۷) $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3$

۸) $z_1 \bar{z}_2$

۹) $\bar{z}_1$

۱۰) $|z_1|$

۱۱. حاصل $z = (2 - i)/(3 + i)$ را به صورت جبری بنویسید.

۱۲. صورت قطبی عدد مختلط $z = 1 + i$ را بیابید.

۱۳. حاصل $z = (\sqrt{3} + i)^6$ را با استفاده از صورت‌های قطبی تعیین کنید.

۱۴. حاصل $z = \left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i\sqrt{3}} \right)^{60}$ را با استفاده از صورت‌های قطبی تعیین کنید.

۱۵. ریشه‌های سوم عدد مختلط $z = -1 - i$ را تعیین کنید.

پاسخ مسائل نمونه فصل ۱۳

۱. θ با توجه به علامت x و y در ربع سوم واقع است، بنابراین

$$\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{-1}{-1} = 1 \Rightarrow \tan \left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = \tan \frac{5\pi}{4} \Rightarrow \theta = \frac{5\pi}{4}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2} \Rightarrow A \left(\sqrt{2}, \frac{5\pi}{4} \right)$$

۲.

$$\begin{cases} x = r \cos \theta = 2 \cos(\pi/3) = 2 \times 1/2 = 1 \\ y = r \sin \theta = 2 \sin(\pi/3) = 2 \times \sqrt{3}/2 = \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow M(1, \sqrt{3})$$

۳. معادله دایره‌ای که مرکز آن بر مبدأ مختصات واقع است، به صورت $x^2 + y^2 = R^2$ می‌باشد.

$$(r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2 = R^2 \Rightarrow r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta \Rightarrow r^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = R^2$$

$$r^2 = R^2 \Rightarrow r = R$$

۴.

منحنی نسبت به محور قطبی متقارن است. $\theta \rightarrow -\theta : r = \cos(-2\theta) = \cos 2\theta$

منحنی نسبت به قطب متقارن است. $\theta \rightarrow \pi + \theta : r = \cos(2\pi - 2\theta) = \cos 2\theta$

منحنی نسبت به محور y ها متقارن است. $\theta \rightarrow \pi - \theta : r = \cos(2\pi + 2\theta) = \cos 2\theta$

۵.

$$z = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 18}}{1} = -4 \pm \sqrt{-2} = -4 \pm \sqrt{2} \cdot \sqrt{-1} \Rightarrow x' = -4 + i\sqrt{2}, x'' = -4 - i\sqrt{2}$$

۶.

$$z_1 + z_2 = 4 + i + 3 + 2i = 7 + 3i$$

۷.

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 \cdot z_2 &= (4 + i)(3 + 2i)(1 - i) = (12 + 8i + 2i^2)(1 - i) = (12 + 11i - 2)(1 - i) \\ &= (10 + 11i)(1 - i) = 10 - 10i + 11i - 11i^2 = 10 + i + 11 = 21 + i \end{aligned}$$

۸.

$$z_2 \cdot \bar{z}_2 = (3 + 2i)(3 - 2i) = 3^2 + 2^2 = 13$$

۹.

$$z_1^2 = (3 + 2i)^2 = 9 + 12i + 4i^2 = 9 + 12i - 4 = 5 + 12i \quad \text{و} \quad \bar{z}_1^2 = 5 - 12i$$

.۱۰

$$|z_1| = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17}$$

.۱۱

$$z = \frac{2-i}{2+i} \times \frac{2-i}{2-i} = \frac{4-2i-2i+i^2}{4-i^2} = \frac{4-4i-1}{4+1} = \frac{3-4i}{5} = \frac{3}{5} - \frac{4}{5}i$$

.۱۲

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1+1} \Rightarrow r = \sqrt{2}, \tan \theta = \frac{y}{x} = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{\pi}{4}$$

$$(\sqrt{2} + i) \Rightarrow x = \sqrt{2}, y = 1 \Rightarrow r = \sqrt{2+1} = \sqrt{3}, \tan \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$$

$$(\sqrt{2} + i) = \sqrt{3} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) \Rightarrow (\sqrt{2} + i)^8 = 9\sqrt{3} (\cos \pi + i \sin \pi)$$

.۱۳

$$(1 + \sqrt{2}i) \Rightarrow x = 1, y = \sqrt{2} \Rightarrow r = \sqrt{1+2} = \sqrt{3}, \tan \theta = \frac{\sqrt{2}}{1} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$1 + \sqrt{2}i = \sqrt{3} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$(1 - \sqrt{2}i) \Rightarrow x = 1, y = -\sqrt{2} \Rightarrow r = \sqrt{1+2} = \sqrt{3}, \tan \theta = \frac{-\sqrt{2}}{1} \Rightarrow \theta = \frac{5\pi}{4}$$

$$1 - \sqrt{2}i = \sqrt{3} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right)$$

$$\frac{1 + \sqrt{2}i}{1 - \sqrt{2}i} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \left(\cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{5\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{5\pi}{4} \right) \right) = \cos \left(-\frac{4\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{4\pi}{4} \right)$$

$$\left(\frac{1 + \sqrt{2}i}{1 - \sqrt{2}i} \right)^8 = \cos(-4\pi) + i \sin(-4\pi) = \cos(0) + i \sin(0) = 1$$

.۱۵

$$r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}, \tan \theta = \frac{-1}{-1} = 1 \xrightarrow{\text{در } 3} \theta = \frac{5\pi}{4}$$

$$k=0, z_1 = \sqrt{2}^{1/2} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right) = \sqrt{2}^{1/2} \left(\cos \frac{5\pi}{12} + i \sin \frac{5\pi}{12} \right)$$

$$k=1, z_2 = \sqrt{2}^{1/2} \left(\cos \frac{7\pi + \frac{5\pi}{4}}{4} + i \sin \frac{7\pi + \frac{5\pi}{4}}{4} \right) = \sqrt{2}^{1/2} \left(\cos \frac{12\pi}{12} + i \sin \frac{12\pi}{12} \right)$$

$$k=2, z_3 = \sqrt{2}^{1/2} \left(\cos \frac{9\pi + \frac{5\pi}{4}}{4} + i \sin \frac{9\pi + \frac{5\pi}{4}}{4} \right) = \sqrt{2}^{1/2} \left(\cos \frac{21\pi}{12} + i \sin \frac{21\pi}{12} \right)$$

سؤالات تستی فصل ۱۳

۱- مزدوج عدد مختلط $z = 3 - 4i$ کدام است؟

$$z = \frac{1}{3-4i} \quad (4) \quad \bar{z} = -3 + 4i \quad (2) \quad z = -(3-4i) \quad (2) \quad \bar{z} = 3 + 4i \quad (1)$$

۲- قدر مطلق $z = 2 - 3i$ برابر است با:

$$13 \quad (1) \quad \sqrt{13} \quad (2) \quad 5 \quad (3) \quad \sqrt{5} \quad (4)$$

۳- اگر $z_1 = 3 - 2i$ و $z_2 = -1 + i$ باشد، z_1/z_2 برابر است با:

$$\frac{5}{2} + \frac{i}{2} \quad (1) \quad \frac{5}{2} - \frac{i}{2} \quad (2) \quad -\frac{5}{2} - \frac{i}{2} \quad (3) \quad -\frac{5}{2} + \frac{i}{2} \quad (4)$$

۴- مختصات قطبی نقطه $p(1, -1)$ کدام است؟

$$p\left(\sqrt{2}, -\frac{7\pi}{4}\right) \quad (4) \quad p\left(\sqrt{2}, \frac{7\pi}{4}\right) \quad (3) \quad p\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right) \quad (2) \quad p\left(\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4}\right) \quad (1)$$

۵- مختصات کارتزین $p(\sqrt{3}, 5\pi/4)$ کدام است؟

$$p\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{\sqrt{6}}{2}\right) \quad (2) \quad p\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}\right) \quad (3) \quad p\left(\frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{\sqrt{6}}{2}\right) \quad (4) \quad p\left(\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}\right) \quad (1)$$

۶- کدام رابطه صحیح است؟

$$\begin{aligned} \sin x &= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2i} \quad (2) & \cos x &= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \quad (1) \\ \sin x &= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \quad (4) & \cos x &= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2i} \quad (3) \end{aligned}$$

۷- حاصل $z = (1 + 2i)(2 - 3i)(2 + i)(3 - 2i)$ کدام است؟

$$25 \quad (1) \quad -25 \quad (2) \quad 65 \quad (3) \quad -65 \quad (4)$$

۸- شکل قطبی عدد $z = -2 + 2i$ کدام است؟

$$\begin{aligned} 2\sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right) \quad (2) & \quad 2\sqrt{2}\left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}\right) \quad (1) \\ 2\sqrt{2}\left(\sin \frac{\pi}{4} + i \cos \frac{\pi}{4}\right) \quad (4) & \quad 2\sqrt{2}\left(\sin \frac{3\pi}{4} + i \cos \frac{3\pi}{4}\right) \quad (3) \end{aligned}$$

۹- اگر $x + iy = (3 - i)/(2 + 5i)$ باشد، $x + y$ کدام است؟

$$\frac{12}{41} \quad (1) \quad -\frac{12}{41} \quad (2) \quad \frac{19}{41} \quad (3) \quad -\frac{19}{41} \quad (4)$$

۱۰- اگر $\left|\frac{z + 2i}{z - i}\right| \leq 3$ مکان هندسی نقاط $z = x + iy$ کدام است؟

- (۱) مکان z ، محیط و خارج دایره‌ای به مرکز $(0, 11/8)$ و شعاع $9/8$ می‌باشد.
- (۲) مکان z ، محیط و خارج دایره‌ای به مرکز $(0, 11/8)$ و شعاع $81/64$ می‌باشد.
- (۳) مکان z ، محیط و داخل دایره‌ای به مرکز $(0, 11/8)$ و شعاع $9/8$ می‌باشد.
- (۴) هیچ‌کدام

۱۱- در رابطه $2x + 2iy - ix + 5y = 7 + 5i$ مطلوب است اعداد x و y :

$$x = -1, y = -2 \quad (4) \quad x = -1, y = 2 \quad (3) \quad x = 1, y = 2 \quad (2) \quad x = 1, y = -2 \quad (1)$$

۱۲- مختصات قطبی معادله $x + y - 1 = 0$ کدام است؟

$$r = \frac{1}{\cos \theta + \sin \theta} \quad (4) \quad r = \sin \theta - \cos \theta \quad (3) \quad r = \frac{-1}{\cos \theta + i \sin \theta} \quad (2) \quad r = \sin \theta + \cos \theta \quad (1)$$

۱۳- اگر $z = 1 - i$ و z^4 برابر است با:

$$16(1 - i) \quad (4) \quad 16 + i \quad (3) \quad 16 - i \quad (2) \quad 16(1 + i) \quad (1)$$

۱۴- معادله دکارتی منحنی $(x^2 + y^2)^2 = x^2$ مفروض است. معادله قطبی آن کدام است؟

$r = \cos \theta$ (۴) $r = \sin \theta$ (۳) $r = \sqrt{|\cos \theta|}$ (۲) $r = \sqrt{|\sin \theta|}$ (۱)

۱۵- حاصل $(3i^{30} + i^{10}) / (2i - 1)$ کدام است؟

$-\frac{1}{5} - \frac{7}{5}i$ (۴) $-\frac{1}{5} + \frac{7}{5}i$ (۳) $\frac{1}{5} + \frac{7}{5}i$ (۲) $\frac{1}{5} - \frac{7}{5}i$ (۱)

۱۶- معادله قطبی نموداری $r^2 = 4 \sin 2\theta$ است. معادله دکارتی آن کدام است؟

$(x^2 + y^2)^2 = 8xy$ (۴) $(x^2 + y^2)^2 = 4xy$ (۳) $(x^2 + y^2)^2 = xy$ (۲) $(x^2 + y^2) = 8xy$ (۱)

۱۷- نقاط $M(x, y)$ متناظر با عدد مختلط z در رابطه $|z - i| = 2$ صدق می‌کند، کدامین نقطه در خارج مکان هندسی M می‌باشد؟

$A(3, 0)$ (۴) $B(2, 1)$ (۳) $C(1, 2)$ (۲) $D(0, 3)$ (۱)

۱۸- صورت قطبی عدد مختلط $z = -4$ کدام است؟

$-4 \operatorname{cis} \frac{\pi}{4}$ (۴) $4 \operatorname{cis} \frac{\pi}{4}$ (۳) $4 \operatorname{cis} \pi$ (۲) $-4 \operatorname{cis} \pi$ (۱)

۱۹- اگر z_1 و z_2 به صورت زیر باشد، حاصل $z_1 z_2$ کدام است؟

$z_1 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$ (۴) $z_2 = \sqrt{3} \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right)$ (۳) $-\sqrt{6}i$ (۲) $-\sqrt{6}$ (۱)

۲۰- حاصل $\left(\frac{1-i}{1+\sqrt{3}i} \right)^{20}$ برابر است با:

$\frac{1}{\sqrt{11}}(1 + \sqrt{3}i)$ (۴) $\frac{1}{\sqrt{11}}(1 + \sqrt{3}i)$ (۳) $\frac{1}{\sqrt{10}}(1 + \sqrt{3}i)$ (۲) $\frac{1}{\sqrt{10}}(1 + \sqrt{3}i)$ (۱)

۲۱- معادله $|z - 1| + |z + 1| = 2\sqrt{2}$ نمایش‌دهنده چه شکلی در صفحه مختلط می‌باشد؟

دایره (۱) بیضی (۲) خط (۳) سهمی (۴)

۲۲- معادله قطبی برای نموداری که نمایش‌دهنده ربع دوم و چهارم است، کدام است؟

$\theta = \frac{\pi}{4}$ (۱) $\theta = \frac{5\pi}{4}$ (۲) $\theta = \frac{3\pi}{4}$ (۳) هیچ‌کدام (۴)

۲۳- حاصل عبارت $\left(\frac{i - \tan \alpha}{i + \tan \alpha} \right)^n$ کدام است؟

$(1 - i \tan \alpha) / (1 + \tan \alpha)$ (۲) $(i + \tan \alpha) / (\tan \alpha - 1)$ (۱) $(1 + i \tan \alpha) / (1 + i \cot \alpha)$ (۳) $(1 + i \tan \alpha) / (1 - i \tan \alpha)$ (۴)

۲۴- یکی از جواب‌های معادله $z^2 + 3z + 2i = 0$ کدام است؟

$2i$ (۴) $2i$ (۳) $i - 1$ (۲) $i + 1$ (۱)

۲۵- $\sqrt[4]{i}$ برابر است با:

$\frac{1}{2}i$ (۴) i (۳) $-i$ (۲) i^2 (۱)

۲۶- ریشه‌های $\sqrt[4]{1+i}$ با کدامیک از روابط زیر نمایش داده می‌شود؟

$\sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{4} + i \sin \frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{4} \right)$ (۲) $\sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{4} + i \sin \frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{4} \right)$ (۱) $\sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{2k\pi}{4} + i \sin \frac{2k\pi}{4} \right)$ (۴) $\sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{2k\pi}{4} + i \sin \frac{2k\pi}{4} \right)$ (۳)

۲۷- حاصل $(-1 + \sqrt{3}i)^{-2}$ برابر است با:

$$\frac{1}{16}(-2 + 2\sqrt{3}i) \quad (1) \quad \frac{1}{4}(-2 + 2\sqrt{3}i) \quad (2) \quad \frac{1}{4}(-2 + 2\sqrt{3}i) \quad (3) \quad \frac{1}{8}(-2 + 2\sqrt{3}i) \quad (4)$$

۲۸- یکی از جوابهای معادله $z^2 - 2iz - 2 = 0$ کدام است؟

$$1 - i \quad (1) \quad -1 + i \quad (2) \quad i \quad (3) \quad 2i - 1 \quad (4)$$

۲۹- اگر $z = 6 + 2\sqrt{3}i$ باشد، حاصل $1/z^2$ کدام است؟

$$\frac{1 - \sqrt{3}i}{96} \quad (1) \quad \frac{1 - \sqrt{3}i}{46} \quad (2) \quad \frac{1 + \sqrt{3}i}{96} \quad (3) \quad \frac{1 + \sqrt{3}i}{46} \quad (4)$$

۳۰- اگر $z = x + iy$ و مزدوج آن $\bar{z} = x - iy$ باشد که در آن $i^2 = -1$ است، حاصل $\sin z$ کدام است؟

$$\cos x \cos hy + i \sin x \sin hy \quad (1) \quad \sin x \cos hy + i \cos x \sin hy \quad (2) \quad i \sin x \cos hy + \cos x \sin hy \quad (3) \quad \cos hy + i \sin hy \quad (4)$$

۳۱- اگر $(7 + 3i)(x + iy) = (6 + 11i)$ باشد، $x + y$ کدام است؟

$$96 \quad (1) \quad 104 \quad (2) \quad 86 \quad (3) \quad 100 \quad (4)$$

۳۲- اگر $z = 2 + 3i$ باشد، $(\bar{z}^2)$ برابر است با:

$$-46 + 9i \quad (1) \quad 46 - 9i \quad (2) \quad -46 - 9i \quad (3) \quad 46 + 9i \quad (4)$$

۳۳- حاصل $(1 + i)^8$ کدام است؟

$$16 \quad (1) \quad 8 \quad (2) \quad 4 \quad (3) \quad \sqrt{2} \quad (4)$$

۳۴- پاسخهای معادله جبری $z^3 = 8$ که در فضای اعداد مختلط تعریف شده است، کدامند؟

$$z = -2, 1 \pm i\sqrt{3} \quad (1) \quad z = 2, -1 \pm i\sqrt{3} \quad (2) \quad z = 2, -1 \pm i\sqrt{3} \quad (3) \quad z = 2, 1 \pm i\sqrt{3} \quad (4)$$

۳۵- معادله قطبی معادله دایره‌ای به شعاع ۲ که مرکزش بر محور y ها متطبق بوده و از مبدأ بگذرد، کدام است؟

$$r = 4 \sin \theta \quad (1) \quad r = 2 \cos \theta \quad (2) \quad r = -4 \cos \theta \quad (3) \quad r = -4 \sin \theta \quad (4)$$

۳۶- نقطه $M(1, 1)$ در مختصات دکارتی مفروض است، شعاع حامل نقطه M در مختصات قطبی کدام است؟

$$2 \quad (1) \quad \sqrt{2} \quad (2) \quad 1 \quad (3) \quad 4 \quad (4)$$

۳۷- با استفاده از صورت‌های قطبی حاصل $z = (1 + i)^6(\sqrt{3} + i)$ کدام است؟

$$8(\sqrt{3} + i) \quad (1) \quad -8(\sqrt{3} + i) \quad (2) \quad -8(\sqrt{3} - i) \quad (3) \quad 8(\sqrt{3} - i) \quad (4)$$

۳۸- حاصل $\sqrt[3]{1 - i} \cdot \sqrt[3]{1 + i}$ برابر است با:

$$\sqrt[3]{16} \text{cis} \frac{2\pi}{3} \quad (1) \quad \sqrt[3]{16} \text{cis} \frac{\pi}{3} \quad (2) \quad \sqrt[3]{16} \text{cis} \frac{\pi}{3} \quad (3) \quad \sqrt[3]{16} \text{cis} \frac{\pi}{3} \quad (4)$$

۳۹- نمودار معادله $r = 4 \cos^2 \theta$ نسبت به:

(۱) محور قطبی متقارن است. (۲) محور y ها متقارن است.

(۳) قطب (مبدأ) متقارن است. (۴) موارد ۱ و ۲ و ۳ صحیح‌اند.

۴۰- دو عدد مختلط $z_1 = 3 + 4i$ و $z_2 = (1 - x) + (y - 1)i$ مفروضند، اگر $z_1 = z_2$ ، آن‌گاه $x + y$ کدام است؟

$$1 \quad (1) \quad 3 \quad (2) \quad -4 \quad (3) \quad -1 \quad (4)$$

۴۱- صورت قطبی $z = \left(\frac{4}{-1 + i\sqrt{3}} \right)^{12}$ کدام است؟

$$\begin{array}{ll} 2^{12} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) & 2^{12} \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) (1) \\ 2^{12} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) & 2^{12} (\cos(0) + i \sin(0)) (3) \end{array}$$

۴۲- حاصل $\left(\frac{1+i}{1-i} \right)^2 - 2 \left(\frac{1-i}{1+i} \right)^2$ برابر است با:

$$3 + 2i (4) \quad 3 - 2i (3) \quad -3 - 2i (2) \quad -3 + 2i (1)$$

۴۳- اگر $z_1 = 1 - i$ و $z_2 = -2 + 4i$ ، آنگاه $|z_1 z_2 + z_2 z_1|$ کدام است؟

$$4 (4) \quad -12 (3) \quad 12 (2) \quad 0 (1)$$

۴۴- در تست شماره (۴۳)، $f_m(z_1^2 + z_2 - 2)$ کدام است؟

$$-4 (4) \quad 4 (3) \quad 1 (2) \quad 2 (1)$$

۴۵- اگر $z_1 = 1 - i$ و $z_2 = -2 + 4i$ و $z_3 = \sqrt{3} - 2i$ ، آنگاه $|z_1 z_2 - z_3 z_1|^2$ کدام است؟

$$170 (4) \quad 49 (3) \quad 121 (2) \quad 190 (1)$$

۴۶- در تست شماره (۴۵)، حاصل $\overline{(z_2 + z_3)}(z_1 - z_2)$ کدام است؟

$$-7 + \sqrt{3}(-3 - i) (4) \quad -7 + \sqrt{3}(3 - i) (3) \quad -7 + \sqrt{3}(3 + i) (2) \quad -7 + \sqrt{3}(-3 + i) (1)$$

۴۷- در تست شماره (۴۵)، حاصل $\overline{(z_1/z_2)}$ برابر است با:

$$0.3 - 0.1i (4) \quad -0.3 + 0.1i (3) \quad 0.3 + 0.1i (2) \quad -0.3 - 0.1i (1)$$

۴۸- اگر $z = 2(\cos \pi/3 + i \sin \pi/3)$ ، آنگاه $z \cdot \bar{z}$ کدام است؟

$$0 (4) \quad 1 (3) \quad 2 (2) \quad 4 (1)$$

۴۹- در تست شماره (۴۸)، حاصل $1/z$ کدام است؟

$$\frac{1}{4} (\cos 0 - i \sin 0) (3) \quad \frac{1}{4} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) (2) \quad \frac{1}{4} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) (1) \quad \text{هیچ کدام (4)}$$

۵۰- در تست شماره (۴۸)، حاصل z^{-3} کدام است؟

$$\frac{1}{\lambda} \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) (4) \quad \frac{1}{\lambda} \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) (3) \quad -\frac{1}{\lambda} (2) \quad \frac{1}{\lambda} (1)$$

۵۱- کدام یک از عبارت‌های زیر از ریشه‌های سوم عدد مختلط $z = 1 + i$ نمی‌باشد؟

$$\begin{array}{ll} \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{4\pi}{12} + i \sin \frac{4\pi}{12} \right) & \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right) (1) \\ \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{5\pi}{12} + i \sin \frac{5\pi}{12} \right) & \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) (3) \end{array}$$

۵۲- اگر z_1 و z_2 به صورت زیر باشد، حاصل z_1/z_2 کدام است؟

$$z_1 = 2 \left(\cos \frac{4\pi}{6} + i \sin \frac{4\pi}{6} \right), \quad z_2 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} (4) \quad -\sqrt{2} (3) \quad \frac{\sqrt{2}}{2} (2) \quad \sqrt{2} (1)$$

۵۳- در رابطه $|z_1| = |z + 1|$ مکان هندسی نقاط صدق می‌کند.

- (۱) دایره (۲) محور x ها (۳) محور y ها (۴) بیضی

۵۴- اگر $z = x + iy$ باشد، کدام یک از روابط زیر نادرست است؟

$$\begin{aligned} (z)^2 &= x^2 + y^2 + 2ixy \quad (۱) \\ (z)^2 &= x^2 - y^2 + 2ixy \quad (۲) \\ |z|^2 &= x^2 + y^2 \quad (۳) \\ \bar{z}^2 &= x^2 - y^2 - 2ixy \quad (۴) \end{aligned}$$

۵۵- حاصل ضرب یک عدد مختلط در مزدوج آن برابر است با:

- (۱) تفاضل آرگومان‌ها (۲) مربع کالبد آن (۳) نصف کالبد آن (۴) حاصل ضرب آرگومان‌ها

تست‌های آزمون کارشناسی ارشد

«مختصات قطبی و اعداد مختلط»

• تست‌های شماره ۱ الی ۱۰ آزمون‌های کارشناسی ارشد مجموعه علوم اقتصادی

۱- اگر $z = -1 + \sqrt{3}i$ باشد، z^{12} کدام است؟

(۱) $(\sqrt{3})^{12}$ (۲) $-(2^{12})$ (۳) 2^{12} (۴) $-(\sqrt{3^{12}})$

۲- جواب عدد مزدوج $z = 2 + 3i$ کدام است؟

(۱) $z = 2 - 3i$ (۲) $\bar{z} = 2i + 3$ (۳) $z = 3 - 2i$ (۴) هیچ کدام

۳- عدد مختلط $(1 - i)^8$ به صورت قطبی کدام است؟

(۱) $16 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$ (۲) $16 \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$
(۳) $8 \left(\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} \right)$ (۴) $16 (\cos 0 + i \sin 0)$

۴- مدول و آرگومان (θ, ρ) عدد موهومی $(1 - i)^{100}$ کدام است؟

(۱) 2^{50} و صفر (۲) $\pi, 2^{50}$ (۳) $\frac{\pi}{4}, 2^{100}$ (۴) $\pi, \sqrt{2}$

۵- مکان هندسی نقاطی که در رابطه $z + \bar{z} = |z|^2$ صدق می‌کند، عبارت است از:

(۱) $(x + 1)^2 + y^2 = 1$ (۲) $(x - 1)^2 + y^2 = 1$
(۳) $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ (۴) $x^2 + y^2 = 1$

۶- معادله مکان هندسی نقاطی که در رابطه $|z - 1| = |z - i|$ صدق می‌کند، کدام است؟

(۱) $x^2 + y^2 = 1$ (۲) $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$ (۳) $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ (۴) $(x - 1)^2 + y^2 = 1$

۷- حاصل عبارت $(i^{24} - i^{62}) / i^{34}$ ، کدام است؟

(۱) $-2i$ (۲) -2 (۳) 2 (۴) $2i$

۸- کدام نقطه در دایره نمودار $|z| = 2$ قرار دارد؟

(۱) $(3, 0)$ (۲) $(1, 1)$ (۳) $(1, 2)$ (۴) $(0, 3)$

۹- کدام یک از اعداد مختلط یکی از ریشه‌های عدد $\sqrt[3]{2}$ است؟

(۱) $1 - i$ (۲) $-i$ (۳) $\cos \frac{3\pi}{6} + i \sin \frac{3\pi}{6}$ (۴) $\cos \frac{9\pi}{6} + i \sin \frac{9\pi}{6}$

۱۰- یکی از ریشه‌های معادله $z^3 - 2z + 2 = 0$ کدام است؟

(۱) i (۲) $1 - i$ (۳) $2 - i$ (۴) $-1 + i$

پاسخ تشریحی سؤالات تستی فصل‌های ۱ الی ۱۳

پاسخ تشریحی سؤالات تستی فصل ۱

(۴)-۱

$$p = 4, q = 5 \quad n = p + q - 2 = 4 + 5 - 2 \Rightarrow n = 7$$

(۳)-۲

$$n = 9, p = 3 \quad n = p + q - 2 \Rightarrow 9 = 3 + q - 2 \Rightarrow q = 8$$

(۱)-۳

$$\text{مجموع ضرایب بسط} = (1 + 2 \times 1)^2 = 27$$

(۲)-۴

$$n = 5, r = 4 - 1 = 3, \text{ جمله چهارم} = c_3^r(1)^{5-r}(2x)^r = 80x^3$$

(۱)-۵

$$n = 8, r = 3 - 1 = 2, \text{ جمله سوم} = c_2^r(2x)^{8-r}(-\sqrt{2})^r = 3584x^6$$

(۳)-۶

$$r = 4 - 1, \quad c_n^r = 10 \Rightarrow c_n^r = 10 \Rightarrow \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} = 10 \Rightarrow n = 5$$

(۲)-۷ n زوج است پس جمله وسط مستقل از x است و از آنجا که دو جمله‌ای فوق دارای ۹ جمله است، پس جمله پنجم مستقل از x است.

(۱)-۸

$$n = 6, p = q = 1, r = \frac{np}{p+q} = \frac{6}{2} = 3 \Rightarrow \text{جمله مستقل از } x = c_3^r = \frac{6!}{3!3!} = 20$$

(۳)-۹

$$\begin{aligned} c_4^r(3x^2)^{16-r} \left(-\frac{1}{2x^2}\right)^r &= c_4^r(3)^{16-r}(x)^{16-2r} \left(-\frac{1}{2}\right)^r (x)^{-2r} \\ &= c_4^r(3)^{16-r} \left(-\frac{1}{2}\right)^r (x)^{16-2r-2r} \end{aligned}$$

$$16 - 2r - 2r = 0 \Rightarrow r = 4, \text{ جمله مستقل از } x = c_4^r(3)^r \left(-\frac{1}{2}\right)^r = \frac{2835}{8}$$

(۱)-۱۰

$$c_{25}^r(\sqrt{x})^{25-r} \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^r = c_{25}^r(x)^{1/2(25-r-r)}$$

$$\frac{1}{2}(25 - r - r) = \frac{5}{2} \Rightarrow r = 9 \Rightarrow \text{ضریب} = c_{25}^9$$

(۳)-۱۱

$$c_k^r(2x)^{A-r} \left(-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^r = c_k^r(2)^{A-r}(-1)^r(x)^{A-r-\frac{1}{2}r}$$

$$A-r-\frac{r}{2}=2 \Rightarrow r=4 \quad , \quad \text{ضریب جمله } x^2 = c_k^r(2)^r(-1)^{-r} = 1120$$

(۳)-۱۲

$$c_{10}^r(\sqrt{x})^{10-r} \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^r = c_{10}^r(x)^{1/2(10-r-r)}$$

$$\frac{1}{2}(10-r-r)=2 \Rightarrow r=3$$

می‌دانیم اگر $r_1 + r_2 = n$ باشد، آن‌گاه $c_n^{r_1} = c_n^{r_2}$ پس $c_{10}^3 = c_{10}^7$

(۴)-۱۳ بسط داده شده دارای $n+1$ یعنی ۱۱ جمله است. بنابراین جمله وسط آن جمله ششم است.

$$n=10, r=6-1=5 \quad , \quad \text{جمله ششم} = c_{10}^5 \left(\frac{a}{x}\right)^{10-5} \left(\frac{x}{a}\right)^5 = 252 \left(\frac{a}{x}\right)^5 = 252$$

(۲)-۱۴

$$\text{جمله پنجم} = \frac{5 \times 56}{4} x^4 y^4 = 70 x^4 y^4$$

(۲)-۱۵ بسط داده شده دارای $5+1=6$ جمله است. بنابراین مجهول جمله ششم است.

$$c_5^5 \left(\frac{1}{x}\right)^5 (-\sqrt{x})^5 = (-\sqrt{x})^5 = -\sqrt{x^5} = -\sqrt{32} = -4\sqrt{2}$$

(۱)-۱۶

$$(\sqrt{x}+1)^5 = c_5^0(\sqrt{x})^5 + c_5^1x^2 + c_5^2(\sqrt{x})^3 + c_5^3x + c_5^4\sqrt{x} + c_5^5$$

$$= x^2\sqrt{x} + 5x^2 + 10x\sqrt{x} + 10x + 5\sqrt{x} + 1$$

(۲)-۱۷

$$(x-2)(x+1)(x+3)(x+2) = (x^2-4)(x^2+5x+3) = x^4 + 5x^3 + \dots$$

(۴)-۱۸

$$(x^5)^{5-r} \left(\frac{1}{x^2}\right)^r = x^5 \Rightarrow x^{25-5r} = x^5 \Rightarrow 25-5r=0 \Rightarrow r=5$$

(۱)-۱۹

$$c_k^r(3x)^{A-r} \left(-\frac{1}{x}\right)^r = c_k^r(3)^{A-r}(x)^{A-r} \left(-\frac{1}{x}\right)^r$$

$$A-r=4 \Rightarrow r=4 \quad , \quad c_k^r(3)^{A-r} \left(-\frac{1}{x}\right)^r = \frac{2835}{\lambda}$$

(۳)-۲۰

$$2^{2n} = 56 + 2^n, \quad a = 2^n \Rightarrow a^2 - a - 56 = 0 \Rightarrow (a-8)(a+7) = 0 \Rightarrow$$

$$a=8, \quad a=-7 \Rightarrow 2^n=8$$

پاسخ تشریحی سؤالات تستی فصل ۲

(۳)-۱

(۳)-۲

$$2x^2 + 10x^2 + 19x = 0 \Rightarrow x(4x^2 + 10x + 19) = 0 \Rightarrow x = 0, \Delta < 0$$

$$\text{مجموعه جواب} = \left\{ \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right\} \quad (۱۱)-۳$$

(۲)-۴

۵-(۱) مجموعه $(2n+1)$ عضوی دارای 2^{2n+1} زیرمجموعه است و مجموعه $2n$ عضوی 2^{2n} زیرمجموعه دارد، بنابراین:

$$2^{2n+1} = 16 + 2^{2n} \Rightarrow 2^{2n}(2-1) = 16 \Rightarrow n = 2$$

۶-(۳) $B = \{2, 4, 6, \dots\}$ ، ملاحظه کنید که مثلاً $3 \in A$ ولی $3 \notin B$. بنابراین $A \not\subset B$.

(۱)-۷

$$A = \{4, 8, 12, 16, 20\} \Rightarrow \text{تعداد زیرمجموعه ها} = 2^5 = 32$$

۸-(۱) مجموعه داده شده دارای یک عضو $\{1\}, \{2\}$ بوده و در نتیجه $2^1 = 2$ زیرمجموعه دارد.

۹-(۳) اگر مجموعه E دارای n عضو باشد، تعداد زیرمجموعه ها 2^n است. اگر ۴ عضو اضافه شود، خواهیم داشت:

$$2^{n+2} = 2^n \times 2^2 = 16 \times 2^n$$

(۴)-۱۰

$$n(E) = x, n(F) = x - 1, 2^x - 2^{x-1} = 32 \Rightarrow x = 6 \Rightarrow n(F) = 5$$

۱۱-(۲) مجموعه A دارای 2^n زیرمجموعه است، بنابراین $P(A)$ دارای 2^n عضو در نتیجه دارای 2^{2^n} زیرمجموعه است.

۱۲-(۴) A و B جدا از هم می باشند. بنابراین اگر $x \in A$ باشد، آنگاه $x \notin B$ ، یعنی $x \in B'$ در نتیجه:

$$(x \in A \Rightarrow x \in B') \Leftrightarrow A \subset B'$$

۱۳-(۴) صحت گزینه های ۱ و ۲ را می توان با استفاده از نمودار ون مشاهده کرد.

۱۴-(۳) $A = B' \Rightarrow (A \cup B) \subset A, B = \phi \Rightarrow A \subset A, A' = B \Rightarrow M \subset A, A \neq \phi \Rightarrow B \subset \phi$

نتیجه تنها گزینه ۳ همواره صادق است.

۱۵-(۴) اولاً: باید تعداد عضوهای دو مجموعه مساوی باشند و ثانیاً: بازای $x = y = \pm 1$ تساوی دو مجموعه برقرار است.

(۳)-۱۶

(۴)-۱۷

$$A' - B = A' \cap B' = B' \cap A' = B' - A$$

(۲)-۱۸

$$\begin{cases} A \subset B \Rightarrow A \cup B = B \\ B \subset C \Rightarrow B \cap C = B \end{cases} \Rightarrow A \cup B = B \cap C$$

(۴)-۱۹

$$A \cap (A' \cup B) = (A \cap A') \cup (A \cap B) = \phi \cup \phi = \phi, A \cap B = \phi$$

(۱)-۲۰

$$\begin{aligned} A - B = B - A &\Rightarrow A \cap B' = B \cap A' \Rightarrow (A \cap B') \cup (A \cap B) = (B \cap A') \cup (A \cap B) \\ &\Rightarrow A \cap (B' \cup B) = B \cap (A' \cup A) \Rightarrow A \cap M = B \cap M \Rightarrow A = B \end{aligned}$$

(۲)-۲۱

$$\begin{aligned} A - B = A &\Rightarrow A \cap B' = A \Rightarrow (A \cap B') \cap B = A \cap B \Rightarrow A \cap (B' \cap B) = A \cap B \\ &\Rightarrow A \cap \phi = A \cap B \Rightarrow A \cap B = \phi \\ B - A = B \cap A' &= (B \cap A') \cup \phi = (B \cap A') \cup (A \cap B) = B \cap (A' \cup A) = B \cap M = B \end{aligned}$$

(۱)-۲۲

$$\begin{cases} A \cap B = B \Rightarrow B \subset A \\ B \cap C = C \Rightarrow C \subset B \end{cases} \Rightarrow C \subset B \subset A$$

(۲)-۲۳

$$A = \{x | x < 5\} = \{1, 2, 3, 4\} \quad A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

(۱)-۲۴

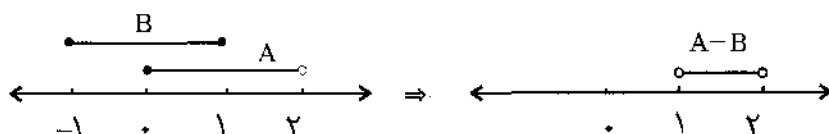
$$A \subset B, A \subset B' \Rightarrow A \cap A \subset B \cap B' \Rightarrow A \subset \phi$$

از طرفی می‌دانیم $\phi \subset A$ بوده و در نتیجه $A = \phi$ می‌گردد.

(۳)-۲۵

$$(A - B) \cap B = (A \cap B') \cap B = A \cap (B' \cap B) = A \cap \phi = \phi$$

(۱)-۲۶



(۴)-۲۷

$$A' = \{x | x < 2\}, B' = \{x | x > -2\} \Rightarrow A' \cap B' = \{x | -2 < x < 2\}$$

(۱)-۲۸

$$A \cup B = \{x | -1 < x \leq 3\} \Rightarrow (A \cup B)' = \{x | x \leq -1 \text{ یا } x > 3\}$$

(۳)-۲۹

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \{x | -1 \leq x \leq 1, x \in \mathbb{Z}\} = \{-1, 0, 1\} \\ A_2 &= \{x | -2 \leq x \leq 2, x \in \mathbb{Z}\} = \{-2, -1, 0, 1, 2\} \\ A_3 &= \{x | -3 \leq x \leq 3, x \in \mathbb{Z}\} = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\} \\ &\vdots \end{aligned} \right\} \bigcap_{i=1}^n A_i = A_1 \cap A_2 \cap \dots = \{-1, 0, 1\}$$

(۲)-۳۰

$$A_1 = \{x | 1 \leq x \leq 2\} = [1, 2]$$

$$A_2 = \left\{x \mid \frac{1}{2} \leq x \leq 1\right\} = \left[\frac{1}{2}, 1\right] \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = A_1 \cup A_2 \cup \dots = (0, 2]$$

$$A_3 = \left\{x \mid \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3}\right\} = \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$$

(۴)-۳۱

$$(A \cap B) - A = (A \cap B) \cap A' = B \cap (A \cap A') = B \cap \phi = \phi$$

(۳)-۳۲

$$A = \{1, 2, 3, 4\} \quad , \quad B = \{0, 2, -4\} \quad , \quad C = \{1, 3, 5, 7\}$$

$$A \cap (B \cup C) = \{1, 2\}$$

(۴)-۳۳

(۲)-۳۴

$$B \cap C = \{1\} \quad , \quad A \times (B \cap C) = \{a, b\} \times \{1\} = \{(a, 1), (b, 1)\}$$

(۴)-۳۵

$$n[(A \times B) \cap (B \times A)] = [n(A \cap B)]^2 = 2^2 = 4$$

(۴)-۳۶

(۴)-۳۷

$$\{\{a\}, \{b, c\}\}, \{\{b\}, \{a, c\}\}, \{\{c\}, \{a, b\}\}, \{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$$

(۴)-۳۸

$$n(A \cup B \cup C) = 43 \Rightarrow n(A \cup B \cup C)' = 50 - 43 = 7$$

(۱)-۳۹

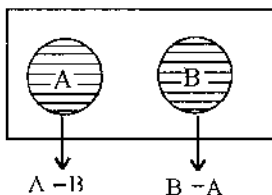
$$(A - B) \cup (A \cap B) = (A \cap B') \cup (A \cap B) = A \cap (B' \cup B) = A \cap M = A$$

(۱)-۴۰

$$\begin{aligned} (C - E) \cap (A - B) \cap (A - C) \cap (B - D) &= (C \cap E') \cap (A \cap B') \cap (A \cap C') \cap (B \cap D') \\ &= (C \cap C') \cap \dots = \phi \cap \dots = \phi \end{aligned}$$

(۳)-۴۱ صحت گزینه ۳ به سادگی از طریق نمودار ون قابل مشاهده است.

$$A \cup B = (A - B) \cup (B - A)$$



(۱)-۴۲

$$A \cap [(B \cap A') \cup B] = A \cap [(B \cap A') \cup (B \cap M)] = A \cap [B \cap (A' \cup M)] = A \cap (B \cap M) = A \cap B$$

(۲)-۴۳

$$(A \cup B' \cup C') \cap [A \cup (B \cap C)] = [A \cup (B \cap C)'] \cap [A \cup (B \cap C)] = A \cup [(B \cap C)' \cap (B \cap C)] = A \cup \phi = A$$

(۴)-۴۴

$$(A' \cap B') \cap (A \cup B) = (A \cap B)' \cap (A \cup B) = \phi$$

$$(A' \cap B') \cup (A \cup B) = (A \cup B)' \cup (A \cup B) = M$$

$$(A' \cap B') - M = (A \cup B)' \cap M' = (A \cup B)' \cap \phi = \phi$$

$$(A - B) \cap B = (A \cap B') \cap B = A \cap (B' \cap B) = A \cap \phi = \phi$$

$$A \cup B = B \text{ است چون } A \subset B \text{ و } A \cup (B \cap A') = A \cup B \text{ طبق قانون شبه‌جذب}$$

(۴)-۴۶

$$(A' \cap B')' \cap (A' \cap B)' = (A \cup B) \cap (A \cup B') = A \cup (B \cap B') = A \cup \phi = A$$

(۴)-۴۷

$$[(A - B) \cup (B - A)] \cup (A \cap B) = [(A \cap B') \cup (B \cap A')] \cup (A \cap B)$$

$$= (A \cap B') \cup (A \cap B) \cup (B \cap A') = [A \cap (B \cup B')] \cup (B \cap A')$$

$$= (A \cap M) \cup (B \cap A') = A \cup (B \cap A') = (A \cup B) \cap (A \cup A') = (A \cup B) \cap M = A \cup B$$

(۱)-۴۸

$$(A \cap B \cap C) \cup (A' \cap C) \cup (B' \cap C) = (A \cap B \cap C) \cup [(A' \cup B') \cap C]$$

$$= [(A \cap B) \cup (A' \cup B')] \cap C = [(A \cap B) \cup (A \cap B)'] \cap C = M \cap C = C$$

(۴)-۴۹

$$(B - A) \cup (A - B') = (B \cap A') \cup (A \cap B) = B \cap (A' \cup A) = B \cap M = B$$

(۲)-۵۰

$$[A \cup (A \cap B)] - [B \cap (B \cup A)] = [(A \cap M) \cup (A \cap B)] - [(B \cup \phi) \cap (B \cup A)]$$

$$= [A \cap (M \cup B)] - [B \cup (\phi \cap A)] = (A \cap M) - (B \cup \phi) = A - B = A \cap B'$$

(۱)-۵۱

(۴)-۵۲

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \Rightarrow 8 = 4 + 5 - n(A \cap B) \Rightarrow n(A \cap B) = 1$$

۵۳- (۱) تعداد کل تجدیدی‌های کلاس $(۴۰ - ۴ = ۳۶)$ نفر می‌باشد، بنابراین:

$$n(E \cup M) = n(E) + n(M) - n(E \cap M) \Rightarrow ۳۶ = ۳۲ + ۲۴ - n(E \cap M) \Rightarrow n(E \cap M) = ۲۰$$

(۴)-۵۴

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

$$n(A \cup B \cup C) = ۵ + ۶ + ۱۰ - ۰ - ۰ - ۰ + ۰ = ۲۱$$

(۲)-۵۵

$$x^2 - ۴x = ۰ \Rightarrow x(x^2 - ۴) = ۰ \Rightarrow x = ۰, -۲, ۲ \Rightarrow A = \{۰, ۲, -۲\}$$

(۴)-۵۶

$$\begin{cases} ۲x - y = ۳ \\ x + ۴y = ۶ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۸x - ۴y = ۱۲ \\ x + ۴y = ۶ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = ۲, y = ۱ \end{cases}$$

(۲)-۵۷

$$\begin{cases} ۳ - a = ۲b \\ a + b = ۴ \\ c - ۱ = a - ۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a - ۲b = -۳ \\ a + b = ۴ \\ c - a = -۱ \end{cases} \Rightarrow b = -۱, a = ۵, c = ۴$$

۵۸- (۱) از طریق جاگذاری گزینه‌ها آسان‌تر است.

۵۹- (۴) زیرا در مجموعه‌ها تقدم و تأخر عضوها اثری ندارد.

۶۰- (۳) زیرا $A^2 = A \times A$ بوده و به صورت زوج مرتب است.

(۴)-۶۱

$$x \in (A - B) \Rightarrow x \in (A \cap B') \Rightarrow x \in A, x \in B' \Rightarrow x \in A, x \notin B$$

(۲)-۶۲

$$A - B = A \Rightarrow A \cap B = \phi \Rightarrow B \cap A' = B - A = B$$

(۲)-۶۳

$$۲^n - ۱ = ۶۳ \Rightarrow ۲^n = ۶۴ \Rightarrow n = ۶ \Rightarrow c_6^2 = \frac{۶!}{۳!۳!} = ۲۰$$

(۲)-۶۴

$$[(A - B') \cup A]' = [(A \cap B) \cup A]' = [(A \cap B) \cup (A \cap M)]' = [A \cap (B \cup M)]' = (A \cap M)' = A'$$

۶۵- (۱) با توجه به جواب‌ها گزینه (۱) صحیح است.

پاسخ تشریحی سؤالات تستی فصل ۳

۱- (۴) زیرا در آن هیچ دو زوج مرتب پیدا نمی‌شود که مؤلفه اول آن‌ها یکسان باشند.

۲- (۲) زیرا به ازای $x \in N$ برای y تنها یک $y \in N$ یافت می‌شود.

(۱)-۳

(۲)-۴

۵-۴) در مورد شکل‌های هندلولی، دایره و بیضی یک خط موازی محور y ها شکل آن‌ها را در بیش از یک نقطه قطع می‌کند، اما سهمی می‌تواند طوری قرارگیرد که خط موازی محور y ها نمودار آن‌را فقط در یک نقطه قطع کند.

$$6-۳) \quad D_f = [4, +\infty) \text{ باشد، } x \geq 4 \text{ برقرار است که } [x] - 3 > 0 \text{ یا } [x] > 3 \text{ این نامساوی وقتی برقرار است که } x \geq 4 \text{ باشد،} \\ (1)-۷$$

$$y = \log \left(\frac{x^x - 1}{x - 1} \right) = \log \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)} \xrightarrow{x \neq 1} \log(x+1), x+1 > 0 \Rightarrow x > -1$$

$$D_f = \{x | x \in \mathbb{R}, x > -1, x \neq 1\} = (-1, 1) \cup (1, +\infty)$$

(۲)-۸

$$y = \text{Arc sin} \left(\sin \left(\frac{x^x}{x} \right) \right) \xrightarrow{x \neq 0} y = \text{Arc sin}(\sin x) \Rightarrow D_f = \{x | x \neq 0, -1 \leq \sin x \leq 1\} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{0\}$$

(۱)-۹

$$f(x) = \frac{4 + [-x] + [-x]}{2 + [-x] + 1 + [-x]} = \frac{4 + 2[-x]}{4 + 2[-x]} = \frac{2 + [-x]}{2 + [-x]}, 2 + [-x] \neq 0 \\ \Rightarrow [-x] \neq -2 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{x | 1 < x \leq 2\} = (-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$$

(۱)-۱۰

$$\begin{cases} x^x - 1 > 0 \\ 2 - x > 0, x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 1 \text{ یا } x < -1 \\ x < 2, x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow D_f = (-\infty, -1) \cup (1, 2)$$

(۳)-۱۱

$$\begin{cases} \frac{\Delta x - x^x}{x} > 0 \Rightarrow \Delta x - x^x > 0 \Rightarrow 0 < x < \Delta \\ \ln \frac{\Delta x - x^x}{x} \geq 0 \Rightarrow \ln \Delta x - \ln x^x - \ln x \geq 0 \Rightarrow \Delta x - x^x - x \geq 0 \Rightarrow 1 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

$$(1), (2) \Rightarrow D_f = [1, 4]$$

(۴)-۱۲

$$f(x) = \sqrt{\frac{x(x-2)}{x-2}} + \sqrt{\frac{x(x-4)}{x-4}} \xrightarrow{x \neq 2, x \neq 4} f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{x} = 2\sqrt{x}$$

$$D_f = \{x | x \in \mathbb{R}, x \neq 2, x \neq 4, x \geq 0\} = [0, 2) \cup (2, 4) \cup (4, +\infty)$$

(۱)-۱۳

$$-1 \leq \log \frac{x}{1^0} \leq 1 \Rightarrow \log \frac{1}{1^0} \leq \log \frac{x}{1^0} \leq \log 1^0 \Rightarrow \frac{1}{1^0} \leq \frac{x}{1^0} \leq 1^0$$

$$1 \leq x \leq 1^0 \Rightarrow D_f = \{x | 1 \leq x \leq 1^0\}$$

۱۴-۲) زیرا رادیکال همواره منفی است بنابراین

$$g \circ f = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^x}{1+x^x} \left(\frac{x^x}{1+x^x} - 1 \right)}} = \frac{1+x^x}{\sqrt{-x^x}}, D_{g \circ f} = \emptyset$$

(۲)-۱۵

$$t = \frac{x-1}{x} \Rightarrow x = \frac{-1}{t-1} \Rightarrow f(t) = \sqrt{\frac{-2}{t-1}} - 1 = \sqrt{\frac{-(t+1)}{t-1}} \Rightarrow f(x) = \sqrt{\frac{-(x+1)}{x-1}}$$

$$D_f = \left\{ x \mid \frac{-(x+1)}{x-1} \geq 0 \right\} \Rightarrow D_f = [-1, 1)$$

(۴)-۱۶

$$\begin{cases} 2+3x > 0 \Rightarrow x > -\frac{2}{3} \\ 3-2x > 0 \Rightarrow x < \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow D_f = \left\{ -\frac{2}{3} < x < \frac{3}{2} \right\}$$

(۱)-۱۷

$$\begin{cases} \log x > 0 \Rightarrow x > 1 \\ -1 \leq 1-x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq x \leq 2 \end{cases} \Rightarrow D_f = (1, 2]$$

(۳)-۱۸

$$x - \frac{\pi}{4} \neq k\pi \Rightarrow x \neq k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \left\{ x \mid x \neq k\pi + \frac{\pi}{4} \right\}$$

(۲)-۱۹

$$\log_7 \log_7^x > 0 \Rightarrow \log_7^x > 1 \Rightarrow x > 7 \Rightarrow D_f = (7, +\infty)$$

(۱)-۲۰

$$\begin{aligned} |x+1| - 4 > 0 &\Rightarrow |x+1| > 4 \Rightarrow x+1 > 4 \vee x+1 < -4 \\ \Rightarrow x > 3 \vee x < -5 &\Rightarrow D_f = (-\infty, -5) \cup (3, +\infty) \end{aligned}$$

(۱)-۲۱

$$\begin{cases} 1-x > 0 \\ x+1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x \geq -1 \end{cases} \Rightarrow D_f = \{x \mid -1 \leq x < 1\} = [-1, 1)$$

(۳)-۲۲

$$D_f = [-1, 1], D_g = [0, +\infty) \Rightarrow D_{f+g} = [0, 1]$$

$$D_{(f+g) \circ f} = \{x \mid -1 \leq x \leq 1, \sqrt{1-x^2} \in D_{f+g}\} = \{x \mid -1 \leq x \leq 1, 0 \leq \sqrt{1-x^2} \leq 1\} = [-1, 1]$$

(۲)-۲۳

$$\begin{cases} 4-x > 0 \\ -1 \leq \frac{x-3}{4} \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 4 \\ 1 \leq x \leq 5 \end{cases} \Rightarrow D_f = [1, 4)$$

(۳)-۲۴

$$[x] - 1 \neq 0 \Rightarrow [x] \neq 1 \Leftrightarrow |x| \notin [1, 2) \Leftrightarrow x \notin (-2, -1] \cup [1, 2) \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{(-2, -1] \cup [1, 2)\}$$

(۱)-۲۵

$$D_f = \mathbb{R} - \{1, -1\}, D_g = [0, +\infty)$$

$$D_{g \circ f} = \{x | x \in D_f, f(x) \in D_g\} = \left\{ x | x \neq \pm 1, \frac{x}{1-|x|} \geq 0 \right\}$$

$$1-|x| = \begin{cases} 1+x & x < 0 \\ 1-x & x > 0 \end{cases}, D_{g \circ f} = (-\infty, -1) \cup [0, 1]$$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
x		-	-	+	+
$1- x $		-	+	+	-
$f(x)$		+	-	+	-

۲۶-(۴) برای هر $x \in \mathbb{R}$ با توجه به ضابطه تابع داریم:

$$\begin{cases} x \geq -2 \Rightarrow 3x \geq -6 \Rightarrow 3x+2 \geq -4 \Rightarrow f(x) \geq -4 \\ x < -2 \Rightarrow 5x < -10 \Rightarrow f(x) < -10 \end{cases} \Rightarrow R_f = \mathbb{R} - [-10, -4]$$

۲۷-(۱) می‌دانیم $-1 \leq \sin x \leq 1$ ، در بازه $[-1, 0]$ تابع لگاریتم تعریف نشده است و برای $x \in (0, 1)$ $\log x$ منفی است. پس دامنه تعریف تابع تنها مشتمل بر نقاطی است که در آن‌ها $\sin x = 1$ یعنی:

$$D_f = \left\{ 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

(۴)-۲۸

$$D_f = \{5, 9, 11\}, D_g = \{0, 2, 3\}, R_f = \{7, 15, 19\}, R_g = \{5, 11, 14\}$$

برای تشکیل $g \circ f$ شرط این است که $D_g \cap R_f$ تهی نباشد، که در این مسأله تهی است.

(۱)-۲۹

$$\begin{cases} 2x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{1}{2} \\ x - \sqrt{2x-1} \geq 0 \Rightarrow x \geq \sqrt{2x-1} \Rightarrow x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow D_f = \left[\frac{1}{2}, +\infty \right)$$

(۲)-۳۰

$$D_f = \mathbb{R} - \{1\}, D_g = \mathbb{R} - \{4\}$$

$$f \circ g = \frac{\frac{2x}{x-4} - 2}{\frac{2x}{x-4} - 1} = \frac{\frac{2x-2x+8}{x-4}}{\frac{2x-x+4}{x-4}}$$

قبل از ساده کردن باید دامنه $f \circ g$ را بیابیم:

$$D_{f \circ g} = \mathbb{R} - \{2, -4\}$$

(۴)-۳۱

$$D_f = \mathbb{R}, y = \sqrt{-x^2} \Rightarrow -x^2 = \log_y^y \Rightarrow x = \pm \sqrt{-\log_y^y}$$

$$-\log_y^y \geq 0 \Rightarrow \log_y^y \leq 0 \Rightarrow R_f = \{y | y \in \mathbb{R}, 0 < y \leq 1\} = (0, 1]$$

(۲)-۳۲

$$(f \circ g)(x) = \frac{y}{x-1} \Rightarrow g(x) + 1 = \frac{y}{x-1} \Rightarrow g(x) = \frac{y-x}{x-1}$$

$$(g \circ f)(x) = \frac{y-x}{x} \Rightarrow y = \frac{y-x}{x} \Rightarrow x(y+1) = y \Rightarrow x = \frac{y}{y+1}$$

$$R_{g \circ f} = \{y | y \in \mathbb{R}, y \neq -1\} = \mathbb{R} - \{-1\}$$

(۲)-۳۳

$$y = \frac{x^2 + 1 + 1}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} = \sqrt{x^2 + 1} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$y = \sqrt{x^2 + 1} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \geq 2 \Rightarrow R_f = [2, +\infty)$$

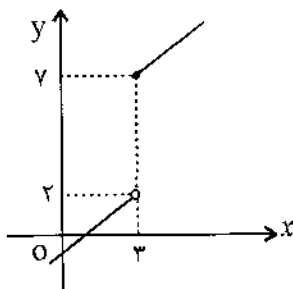
(۲)-۳۴

$$x^2 + x^y \neq 0 \Rightarrow x^y(x+1) \neq 0 \Rightarrow x \neq 0, x \neq -1 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{0, -1\}$$

$$y = \frac{x^y(x-1)}{x^y(1+x)} \xrightarrow{x \neq 0} y = \frac{x-1}{1+x} \Rightarrow y(1+x) = x-1 \Rightarrow x = \frac{1+y}{1-y} \neq 0$$

$$\Rightarrow y \neq -1, y \neq 1 \Rightarrow R_f = \mathbb{R} - \{1, -1\}$$

(۴)-۳۵ نمودار تابع را رسم می‌کنیم:



$$R_f = (-\infty, 2) \cup [2, +\infty)$$

اکنون از مقادیر به دست آمده می‌نیم مطلق تابع را معین می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty, y > 0$$

چون کم‌ترین مقدار تابع $f(0) = 2$ می‌باشد، در نتیجه $R_f = [2, +\infty)$

(۱)-۳۶

$$y = \frac{x}{[x] + [-x]}, [x] + [-x] = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow x \in (\mathbb{R} - \mathbb{Z}) \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \mathbb{Z} : y = \frac{x}{-1} = -x \Rightarrow R_f = \mathbb{R} - \mathbb{Z}$$

(۲)-۳۷

$$-|x+1| \geq 0 \Rightarrow |x+1| \leq 0 \Rightarrow D_f = \{-1\}, f\{-1\}, f(-1) = 0 \Rightarrow R_f = \{0\}$$

(۳)-۳۸

$$y = \ln(x^2 + 1) \Rightarrow e^y = x^2 + 1 \Rightarrow x = \pm \sqrt{e^y - 1}$$

$$e^y - 1 \geq 0 \Rightarrow \ln e^y \geq \ln 1 \Rightarrow y \ln e \geq \ln 1 \Rightarrow y \geq 0$$

(۱)-۳۹

$$f'(x) = 1^{\circ} \cdot x^{11} - 1^{\circ} \cdot 0, \quad f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1, \quad f(1) = 0$$

پس $f(1) = 0$ می‌نیمم مطلق است و در نتیجه $R_f = [0, +\infty)$

(۳)-۴۰

$$y = \frac{x^2 + 2x^2 + 2x}{x(x+1)(x^2-2)}, \quad x \neq 0 \quad \text{یا} \quad x \neq -1 \quad \text{یا} \quad x \neq \pm 2 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{0, -1, \pm 2\}$$

$$y = \frac{x(x+1)(x+2)}{x(x+1)(x^2-2)} = \frac{1}{x-2}$$

$$f(0) = -\frac{1}{2}, \quad f(-1) = -\frac{1}{3}, \quad f(-2) = -\frac{1}{4}$$

برای حقیقی بودن x باید داشته باشیم $y \neq 0$

$$R_f = \mathbb{R} - \left\{ -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, 0 \right\}$$

(۱)-۴۱

$$y = \frac{x^2 + x^2 + 1}{x^2 + 1} = 1 + \frac{x^2}{x^2 + 1}, \quad 0 \leq \frac{x^2}{x^2 + 1} < 1 \Rightarrow 1 + 0 \leq 1 + \frac{x^2}{x^2 + 1} < 1 + 1$$

$$1 \leq y < 2 \Rightarrow R_f = [1, 2]$$

(۲)-۴۲

$$D_f = \{x | x \in \mathbb{R}, \log x > 0\} = \{x | x \in \mathbb{R}, x > 1\}$$

$$x \in D_f : -1 \leq \cos(\log(\log x)) \leq 1 \Rightarrow -2 \leq 2 \cos(\log(\log x)) \leq 2 \Rightarrow -2 \leq y \leq 2$$

(۱)-۴۳

$$f(x) = \log_{\lambda}^{(x^2+1)} \left(\frac{\lambda}{x^2+1} \right) - 1 = \log_{\lambda}^{\lambda} - 1 = 1 - 1 = 0 \Rightarrow R_f = \{0\}$$

(۲)-۴۴

$$0 \leq x - [x] < 1 \Rightarrow 0 \leq 2x - 2[x] < 2 \Rightarrow 1 \leq 2x - 2[x] + 1 < 3$$

(۲)-۴۵ ابتدا ریشه هر یک از عبارت‌های شامل قدرمطلق را به‌دست می‌آوریم:

$$|x - 1| = 0 \Rightarrow x = 1, \quad |x| = 0 \Rightarrow x = 0, \quad |x + 1| = 0 \Rightarrow x = -1$$

مقدار تابع را به‌ازای هر یک از ریشه‌ها به‌دست می‌آوریم:

$$f(1) = 3, \quad f(0) = 2, \quad f(-1) = 3$$

اکنون از مقادیر به‌دست آمده می‌نیمم مطلق تابع را معین می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty, \quad y > 0$$

چون کمترین مقدار تابع $f(0) = 2$ می‌باشد، در نتیجه این نقطه می‌نیمم مطلق تابع است و بنابراین: $R_f = [2, +\infty)$

(۳)-۴۶

$$y = \text{Arc cos}(\tan x \cdot \cot x) \xrightarrow{x \in D_f} y = \text{Arc cos}(1) = 0 \Rightarrow R_f = \{0\}$$

(۲)-۴۷ $x = -1$ و چون به ازای x $[x] \leq x < [x] + 1$, $x < 0 \Rightarrow 1 + x/[x] < x/[x] \leq 1$

$x/[x] \leq 1$ و اگر $x \geq 0$ آن گاه $f(x) = 0$. بنابراین $R_f = [0, 1]$ (۱)-۴۸

$$g \circ f = |x + 1| \Rightarrow g((x + 1)^r) = |x + 1| \Rightarrow g(x) = \sqrt{x} \Rightarrow g(4) = 2$$

(۳)-۴۹

$$f\left(\frac{1}{f(x)}\right) = \frac{\frac{x-1}{x}}{\frac{x-1}{x} - 1} = \frac{x-1}{x-1-x} = 1-x$$

(۲)-۵۰

$$x + \frac{1}{x} = t \Rightarrow x^r + \frac{1}{x^r} = t^r \Rightarrow x^r + \frac{1}{x^r} + 2 = t^r + 2 \Rightarrow f(t) = t^r - 2t + 2$$

(۱)-۵۱

$$g \circ f = x \Rightarrow 1 + \frac{1}{f(x)} = x \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x-1} \Rightarrow f \circ g = x$$

(۲)-۵۲

$$f \circ f = \frac{af(x) + b}{cf(x) - a} = \frac{a^r x + bcx}{cb + a^r} = \frac{x(a^r + bc)}{cb + a^r} = x$$

(۲)-۵۳

$$f \circ h - f \circ g = \cos^r x - \sin^r x = \cos^r x = h(r, x)$$

(۲)-۵۴

$$rx + 1 = r \Rightarrow x = \frac{r(1)}{r-1} = \frac{1}{0} = \text{نامعین}$$

(۱)-۵۵

$$\begin{aligned} x > 0 &\Rightarrow \begin{cases} |x| = x \\ \text{sgn}(x) = 1 \end{cases} \Rightarrow x \cdot \text{sgn}(x) = x = |x| \\ x < 0 &\Rightarrow \begin{cases} |x| = -x \\ \text{sgn}(x) = -1 \end{cases} \Rightarrow x \cdot \text{sgn}(x) = -x = |x| \\ x = 0 &\Rightarrow \begin{cases} |x| = 0 \\ \text{sgn}(x) = 0 \end{cases} \Rightarrow x \cdot \text{sgn}(x) = 0 = |x| \end{aligned}$$

(۲)-۵۶ اگر x گویا باشد، در این صورت $f(x) = 1$ و در نتیجه:

$$f^r = f \cdot f \cdot f \cdot f = 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 1$$

اگر x گنگ باشد، در این صورت $f(x) = -۱$ و در نتیجه:

$$f^4 = f.f.f.f = (-۱)(-۱)(-۱)(-۱) = ۱$$

(۲)-۵۷

$$g(x) = \begin{cases} ۱ & x > k \\ -۱ & x < k \end{cases} \quad \text{توابع } g(x) = -۱, g(x) = ۱ \text{ علاوه بر دو تابع ثابت } ۱(۳)-۵۸$$

نیز در معادله $(g(x))^T = ۱$ صدق می‌کنند ($k \in \mathbb{R}$).

$$f(۱/۵) = [۱/۵] + ۱ = ۲, f.f(x) = [۲] + ۱ = ۳, f.f.f(x) = [۳] + ۱ = ۴ \quad (۳)-۵۹$$

(۱)-۶۰

$$g\left(\frac{t+x}{x-۳}\right) = \frac{۱}{x}, \quad \frac{t+x}{x-۳} = t \Rightarrow x = \frac{t+۳t}{t-۱} \Rightarrow g(t) = \frac{t-۱}{t+۳t}$$

(۱)-۶۱

$$g \circ f = 0 \Rightarrow (x-۱)^T - ۱ = 0 \Rightarrow x^T - ۲x = 0 \Rightarrow x = 0, x = ۲$$

(۴)-۶۲

$$\frac{e^x + ۱}{۲e^x - ۱} = ۲ \Rightarrow e^x + ۱ = ۴e^x - ۲ \Rightarrow e^x = ۱ \Rightarrow x = 0 \Rightarrow f(۲) = 0$$

(۳)-۶۳

$$g(x) = \frac{a(x+h) - b - (ax-b)}{h} = \frac{ah}{h} = a$$

(۱)-۶۴

$$f(x+y) + f(x-y) = (a^{x+y} + a^{-(x+y)} + a^{x-y} + a^{-(x-y)}) =$$

$$a^x(a^y + a^{-y}) + a^{-x}(a^y + a^{-y}) = (a^x + a^{-x})(a^y + a^{-y})$$

$$۲f(x) = (a^x + a^{-x}) \Rightarrow f(x+y) + f(x-y) = ۲f(x).f(y)$$

(۳)-۶۵

$$(g \circ f)(۲) = g(f(۲)) = g(۴) = ۷$$

(۲)-۶۶

$$(g \circ f)(x) = \ln \sqrt{e^{-x}} = \ln e^{-x/۲} = -\frac{x}{۲} \ln e = -\frac{x}{۲}$$

(۲)-۶۷

$$f(x) = ax + b, \quad \begin{cases} h(۱) = f(x) \Rightarrow ۴ = a + b \\ h(-۱) = f(x) \Rightarrow ۲ = a + b \end{cases} \Rightarrow a = ۱, b = ۳$$

(۲)-۶۸

$$f\left(۱, \frac{y}{x}\right) = \frac{۱ \times ۱ \times y/x}{۱ + y^T/x^T} = \frac{y/x}{x^T + y^T/x^T} = \frac{yxy}{x^T + y^T}$$

(۱)-۶۹

$$\begin{cases} x + y = a \\ x - y = b \end{cases} \Rightarrow x = \frac{a+b}{2}, y = \frac{a-b}{2}$$

$$f(a, b) = \frac{\frac{a+b}{2}}{\frac{a-b}{2}} = \frac{a+b}{a-b} \Rightarrow f(x, y) = \frac{x+y}{x-y} \Rightarrow f(2, 1) = \frac{2+1}{2-1} = 3$$

(۱)-۷۰

$$f(f(x)) = a^T x + ab + b \Rightarrow fff(x) = a^T x + a^T b + ab + b = 2 - x \Rightarrow a^T = -1 \Rightarrow a = -1, (a^T + a + 1)b = 2 \Rightarrow b = 2$$

(۲)-۷۱

$$y = \frac{2x+3}{x} \Rightarrow xy - 2x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{y-2}$$

برای اینکه $x \in \mathbb{N}$ باشد، باید $y - 2$ مقسوم علیه‌های عدد ۳ باشد، بنابراین $y - 2$ باید ۱ یا ۳ باشد.

(۱)-۷۲

$$f \circ g = g \circ f \Rightarrow acx + ad + b = acx + cb + d \Rightarrow ad - cb = d - b$$

(۴)-۷۳

$$(f \circ g \circ h)(\circ) = f(g(h(\circ))), h(\circ) = 1 \Rightarrow g(h(\circ)) = 2 \Rightarrow (f \circ g \circ h)(\circ) = \frac{2+2}{2-2} = \frac{4}{0}$$

(۳)-۷۴

(۲)-۷۵

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 < 0 \Rightarrow -1 < x < 1 \\ x^2 - 1 > 0 \Rightarrow x > 1 \text{ یا } x < -1 \\ x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} -1 & -1 < x < 1 \\ 0 & x = \pm 1 \\ +1 & x < -1 \text{ یا } x > 1 \end{cases}$$

(۳)-۷۶

$$(f \circ g)(x) = (g(x))^2 + 2(g(x)) + 2 \Rightarrow x^2 - 4x + 6 = (g(x))^2 + 2g(x) + 2$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 = (g(x))^2 + 2g(x) + 1 \Rightarrow (x - 2)^2 = (g(x) + 1)^2 \Rightarrow g(x) = x - 2 \text{ یا } g(x) = 1 - x$$

(۱)-۷۷

$$a(x+1)^2 + b(x+1) + c - ax^2 - bx - c \equiv \lambda x + 3$$

$$2ax + a + b \equiv \lambda x + 3 \Rightarrow 2a = \lambda \Rightarrow a = 1, a + b = 3 \Rightarrow b = -1$$

(۱)-۷۸

$$f \circ g = \begin{cases} 2x^2 - x^2 & x \geq 0 \\ 2x - (-x) & x < 0 \end{cases} \Rightarrow f \circ g = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ 3x & x < 0 \end{cases}$$

(۱)-۷۹

$$f(g(x)) = f\left(x - \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2} - 2 = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2 - 2 \Rightarrow f(x) = x^2 - 2$$

(۱)-۸۰

$$\frac{1}{2} \left(\frac{x}{1-x} - \frac{x}{1+x} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{2x^2}{1-x^2} \right) = \frac{x^2}{1-x^2} \Rightarrow \frac{1}{2} (f(x) - f(-x)) = f(x^2)$$

(۳)-۸۱ با فرض $x = 4 - t$ داریم $4 - x = t$ در نتیجه:

$$\begin{cases} f(t) + 2f(-t) = 12 - 3t \\ f(-t) + 2f(t) = 12 + 3t \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(t) + 2f(-t) = 12 - 3t \\ -2f(-t) - 4f(t) = -24 - 6t \end{cases}$$

$$-3f(t) = -9t - 12 \Rightarrow f(t) = 3t + 4 \Rightarrow f(x) = 3x + 4$$

(۱)-۸۲

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x & x \geq 0 \end{cases}, g(x) = \begin{cases} x & x < 0 \\ x^2 & x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow f \circ g(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x^2 & x \geq 0 \end{cases}$$

(۱)-۸۳

$$\frac{x}{x^2 + x + 1} = t \Rightarrow \frac{x^2 + x + 1}{x} = \frac{1}{t} \Rightarrow x + \frac{1}{x} + 1 = \frac{1}{t} \Rightarrow x + \frac{1}{x} = \frac{1}{t} - 1$$

$$\frac{x^2}{x^2 + x^2 + 1} = \frac{1}{\frac{x^2 + x^2 + 1}{x^2}} = \frac{1}{x^2 + \frac{1}{x^2} + 1} = \frac{1}{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 + 1} = \frac{1}{\left(\frac{1}{t} - 1\right)^2 - 1}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{t^2} - \frac{2}{t} + 1 - 1} = \frac{1}{\frac{1 - 2t}{t^2}} = \frac{t^2}{1 - 2t} \Rightarrow f(t) = \frac{t^2}{1 - 2t} \Rightarrow f(x) = \frac{x^2}{1 - 2x}$$

(۴)-۸۴

$$f(x) = ax + b, f \circ f = x + 2 \Rightarrow a^2x + ab + b = x + 2 \Rightarrow a^2 = 1,$$

$$ab + b = 2 \Rightarrow a = b = 1 \Rightarrow f(x) = x + 1 \Rightarrow f(2) = 3$$

(۲)-۸۵

$$(hog)(x) = \sqrt{x-1}, (f \circ g \circ h)(x) = \frac{1}{x-1}$$

(۱)-۸۶ معادله را در حالت $n = 1$ حل می‌کنیم.

$$g(x) = \frac{f(x)}{f(x)} = 1 \Rightarrow g(x) = \frac{f(nx)}{f \circ f \cdots \circ f(x)} = n$$

(۲)-۸۷

$$f(1) = 1 - m, f \circ f(1) = 1 - 3m, f \circ f \circ f(1) = f(1 - 3m) = 0$$

$$\Rightarrow 9m^2 - 3m + 1 = 0 \Rightarrow m = 1 \pm m = \frac{1}{9}$$

(۲)-۸۸

$$\begin{cases} f(11) = a(11)^2 + b(11)^3 + c(11)^4 - 4 \\ f(-11) = a(-11)^2 + b(-11)^3 + c(-11)^4 - 4 \end{cases} \Rightarrow f(11) + f(-11) = -12 \Rightarrow f(11) = -25$$

(۱)-۸۹

(۱)-۹۰

$$M(2, 3) \in f \Rightarrow M'(3, 2) \in f^{-1}, f(2) = 3, f^{-1}(3) = 2 \Rightarrow f(2) + f^{-1}(3) = 5$$

(۲)-۹۱

$$f(-x) = \log(-x + \sqrt{x^2 + 1}) = \log\left(\frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}}\right) = \log(x + \sqrt{x^2 + 1})^{-1}$$

$$f(-x) = -\log(x + \sqrt{x^2 + 1}) = -f(x)$$

(۲)-۹۲

$$g(1^0) = \frac{1}{1^0}, f \circ g(1) = \text{Arc cos}\left(\log \frac{1}{1^0}\right) = \text{Arc cos}(-1) = \pi$$

(۲)-۹۳

$$D_f = \mathbb{R}, D_g = \{0, 1, 2\}, D_h = \mathbb{R} \Rightarrow D_{f+g} = \{0, 1, 2\}$$

$$(f+g)(x) = \{(0, 1+2), (1, 2+2), (2, 3+2)\} = \{(0, 3), (1, 4), (2, 5)\}$$

$$D_{(f+g) \circ h} = \{x \in \mathbb{R} | x^2 - 2x + 3 \in \{0, 1, 2\}\} = \{1\}$$

$$(f+g) \circ h = (f+g)(h(1)) = (f+g)(2) = 5 \Rightarrow (f+g) \circ h = \{(1, 5)\}$$

(۴)-۹۴ تابع در $x = 1$ تعریف نشده است و آنچه که می‌باشد، حد تابع در این نقطه است و نه مقدار تابع.

(۲)-۹۵

$$\tan h^{-1} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}, \tan h^{-1} \left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{1}{2} \ln \frac{1/5}{9/5} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1}{9}\right) = \ln \left(\frac{1}{3}\right)$$

(۱)-۹۶

$$\cos hx + \sin hx = e^x, \cos h^2 x - \sin h^2 x = 1 \Rightarrow \cos h^2 x = 5$$

$$\sqrt{5} + 2 = e^x \Rightarrow x = \ln(\sqrt{5} + 2)$$

(۱)-۹۷

$$f(\sin hx) = 3 \sin hx \sqrt{\sin h^2 x + 1}, \cos h^2 x - \sin h^2 x = 1 \Rightarrow \cos hx = \sqrt{\sin h^2 x + 1}$$

$$f(\sin hx) = 3 \sin hx, \cos hx \Rightarrow f(\sin hx) = \sin h^2 x$$

(۳)-۹۸

$$\sin hx = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{e^{\ln 2} - e^{-\ln 2}}{2} = \frac{2 - \frac{1}{2}}{2} = \frac{3}{4}$$

(۳)-۹۹

$$f(a) + f(b) = \ln \frac{1-a}{1+a} + \ln \frac{1-b}{1+b} = \ln \left(\frac{1-a}{1+a} \times \frac{1-b}{1+b} \right) = \ln \frac{1-a-b+ab}{1+a+b+ab}$$

$$f\left(\frac{a+b}{1+ab}\right) = \ln \frac{1-(a+b)/(1+ab)}{1+(a+b)/(1+ab)} = \ln \frac{1+ab-a-b}{1+ab+a+b}$$

(۴)-۱۰۰

(۳)-۱۰۱

$$f(x+1) = x+1+[x+1] = x+1+[x]+1 = x+[x]+2 = f(x)+2$$

(۱)-۱۰۲

$$\tan hx = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{-x}(e^{2x} - 1)}{e^{-x}(e^{2x} + 1)} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

(۱)-۱۰۳

$$f \circ g(x) = \frac{g(x)+1}{g(x)-1} \Rightarrow \frac{g(x)+1}{g(x)-1} = -\frac{x+1}{x-1} \Rightarrow g(x) = \frac{1}{x}$$

(۳)-۱۰۴

$$f(x) = \log(\sqrt{x} + \sqrt{m^2 x^2 + 1}), f(-x) = \log(-\sqrt{x} + \sqrt{m^2 x^2 + 1})$$

$$f(-x) + f(x) = 0 \Rightarrow \log(-\sqrt{x} + \sqrt{m^2 x^2 + 1}) = 0 \Rightarrow m^2 = 1 \Rightarrow m = \pm 1$$

(۱)-۱۰۵

$$f(x) = \text{مقداری مثبت}, -f(x) = \text{مقداری منفی}, f[-f(x)] = f(\text{مقداری منفی}) = 1$$

(۳)-۱۰۶

$$f(x) = 0, f(-x) = 0 \Rightarrow f(x) = f(-x) \text{ زوج}, f(-x) = -f(x) \text{ فرد}$$

$$f(x) = 1, f(-x) = 1 \Rightarrow f(x) = f(-x) \text{ زوج}$$

(۲)-۱۰۷

$$f(-x) = -f(x) \Rightarrow (m-1)(-x) + 2m-1 = -[(m-1)x + 2m-1] \Rightarrow m = \frac{1}{2}$$

(۲)-۱۰۸

$$f(-x) = (-x)^2 - (-x) \sin^2(-x) = -x^2 + x \sin^2 x = -f(x)$$

$$f(1) \text{ فرد است، بنابراین برای هر } x \in D_f, f(-x) = -f(x), x \in D_f \text{ پس } f(0) = f(0) \text{ و } f(0) = 0 \text{ فرد است.}$$

(۲)-۱۱۰

$$f(x) = 2^{-x}(1 + 2^{x+1} + 2^{2x}) = 2^{-x} + 2 + 2^x$$

$$f(-x) = 2^x + 2 + 2^{-x} = f(x)$$

(۱)-۱۱۱

$$h(-x) = f(-x) + f(x) = h(x), g(-x) = f(-x) - f(x) = -g(x)$$

(۱)-۱۱۲

$$f(-x) = \sqrt{1-x+x^2} - \sqrt{1+x+x^2} = -(\sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2}) = -f(x)$$

(۳)-۱۱۳

$$f(-x, y) = x^2 + y^2 + 2x + 2y - 2xy \neq f(x, y)$$

$$f(-x, -y) = x^2 + y^2 + 2x - 2y + 2xy \neq -f(x, y)$$

(۲)-۱۱۴ تابع f فرد است هرگاه $x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f$ و $f(-x) = -f(x)$ بنابراین:

$$\begin{cases} x \geq 0 \Rightarrow -x < 0, f(-x) = -1 = -f(x) \\ x < 0 \Rightarrow -x > 0, f(-x) = 1 = -(-1) = -f(x) \end{cases}$$

(۴)-۱۱۵

$$f(-x) = \frac{a^{-x} + a^x}{2} = f(x) \text{ فرد}, g(x) = \frac{a^{-x} - a^x}{2} = -\frac{a^x - a^{-x}}{2} = -g(x) \text{ زوج}$$

بنابراین f, g تابعی فرد است. اگر $x \neq 0$ باشد، آن‌گاه $\frac{f}{g}$ نیز تابعی فرد خواهد بود.

(۲)-۱۱۶ نمودارهای (۳) و (۴) نمایش یک تابع نمی‌باشند. نمودار (۱) نمایش یک تابع زوج است. تنها تابعی که هم زوج و هم فرد است، تابع $f(x) = 0$ است و نمودار (۲) قسمتی از این تابع را نمایش می‌دهد.

(۱)-۱۱۷ چون دامنه تعریف اعداد نسبی است، پس $x = [x]$ و بنابراین:

$$f(x) = x|x| - x = x(|x| - 1), f(-x) = -x(|-x| - 1) = -x(|x| - 1) = -f(x)$$

(۱)-۱۱۸ تبدیل x به $-x$ و مقایسه $f(x)$ و $f(-x)$ در حل مسأله کافی نیست و به‌دست آوردن دامنه تابع و بررسی امکان تبدیل x به $-x$ در دامنه تعریف نیز باید انجام گیرد.

$$f(x) = \frac{[x] + [-x]}{x^2 + 1} \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$$

$$f(-x) = \frac{[-x] + [x]}{(-x)^2 + 1} = \frac{[x] + [-x]}{x^2 + 1} = f(x) \quad \text{زوج}$$

$$g(x) = \frac{x^2 \sin x}{[x] + [-x]} \Rightarrow [x] + [-x] \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} [x] + [-x] = 0 & x \in \mathbb{Z} \\ x + -x = -1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow D_g = \mathbb{R} - \mathbb{Z}$$

$$g(-x) = \frac{(-x)^2 \sin(-x)}{[-x] + [x]} = -\frac{x^2 \sin x}{[x] + [-x]} = -g(x) \quad \text{فرد}$$

(۱)-۱۱۹

$$f(-x) = (-x)^2 + \cos(-x) = x^2 + \cos x = f(x) \quad \text{زوج}$$

$$g(-x) = (-x)^2 - (-x) = -(x^2 - x) = -g(x) \quad \text{فرد}$$

۱۲۰- (۱)

$$\begin{aligned} Z \times (Z \cap \{1\}) &= Z \times \{1\} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\} \times \{1\} \\ &= \{\dots, (-2, 1), (-1, 1), (0, 1), (1, 1), (2, 1), \dots\} \quad \text{تابع ثابت} \end{aligned}$$

۱۲۱- (۴)

$$\begin{aligned} f(x_1) &= f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2, bx_1 + (1 - x_1)a = bx_2 + (1 - x_2)a \Rightarrow \\ (b - a)(x_1 - x_2) &= 0 \Rightarrow x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2, (b \neq a) \end{aligned}$$

۱۲۲- (۲)

$$\begin{aligned} f(x_1) &= f(x_2) \Rightarrow \frac{ax_1 + b}{cx_1 + d} = \frac{ax_2 + b}{cx_2 + d} \Rightarrow adx_1 - bcx_1 = adx_2 - bcx_2 \\ \Rightarrow (ad - bc)x_1 &= (ad - bc)x_2 \Rightarrow ad - bc \neq 0 \Rightarrow \frac{a}{c} \neq \frac{b}{d} \end{aligned}$$

۱۲۳- (۱)

$$f(x) = \frac{x}{1 + |x|} = \begin{cases} \frac{x}{1 + x} & x \geq 0 \quad (1) \\ \frac{x}{1 - x} & x < 0 \quad (2) \end{cases}$$

اولاً: توابع (۱) و (۲) یک به یک می‌باشند. ثانیاً: $R_1 = [0, 1)$ و $R_2 = (-1, 0)$ دو مجموعه مجزا هستند و در نتیجه تابع f یک به یک است.

۱۲۴- (۴)

$$f \circ f(x) = 3(3x + a) + a \equiv 9x + 4$$

$$9x + 4a \equiv 9x + 4 \Rightarrow a = 1$$

۱۲۵- (۲) از روی نمودار به سادگی قابل مشاهده است. اگر خطی موازی محور x ها با توجه به دامنه و برد تابع رسم کنیم، نمودار آن را در یک نقطه قطع می‌کند.

۱۲۶- (۲)

$$b = x^2 + 9x, (b \in \mathbb{R}^+) \Rightarrow x^2 + 9x - b = 0 \Rightarrow x = \frac{-9 \pm \sqrt{81 + 4b}}{2}$$

زیر رادیکال با توجه به اینکه $b \in \mathbb{R}^+$ همواره مثبت است. بنابراین تابع f پوششی است.

۱۲۷- (۴) ترکیب هر تابع با وارون خودش، تابعی همانی است.

۱۲۸- (۴) تابع f یک به یک نمی‌باشد زیرا $[\frac{1}{2}] = [\frac{1}{1}]$ ولی $\frac{1}{2} \neq \frac{1}{1}$ ولی f پوشا است زیرا بازای هر عدد صحیح، x در R وجود دارد که قسمت صحیح آن عدد مزبور گردد.

۱۲۹- (۳)

$$y = 2^{x-1}, x = 2^{y-1} \Rightarrow \log x = \log 2^{y-1} \Rightarrow \log x = (y - 1) \log 2$$

$$\Rightarrow y - 1 = \frac{\log x}{\log 2} \Rightarrow y = \log_2 x + 1 \Rightarrow f^{-1}(x) = \log_2 x + 1$$

۱۳۰- (۳)

$$x = \ln \ln y \Rightarrow e^x = \ln y \Rightarrow e^{e^x} = y \Rightarrow f^{-1}(x) = e^{e^x}$$

(۴)-۱۳۱

$$f(x+1) = 2x+1, x+1=t \Rightarrow x=t-1, f(t) = 2(t-1)+1 = 2t-1$$

$$f(x) = 2x-1, x = 2y-1 \Rightarrow y = \frac{x+1}{2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+1}{2}$$

(۳)-۱۳۲

$$f(\{a, c, e\}) = \{d\}, f^{-1}(\{b, c, d\}) = \{a, b, c, e\}$$

زیرا عضوی در A یافت نمی‌شود که تصویرش c باشد.

(۱)-۱۳۳

$$f(x) = \sqrt{x+1+2\sqrt{x+1}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1+\frac{1}{\sqrt{x+1}}}{2\sqrt{x+1+2\sqrt{x+1}}} > 0$$

چون $f'(x) > 0$ پس تابع اکیداً صعودی پس معکوس پذیر است.

$$\begin{aligned} y^2 &= x+1+2\sqrt{x+1} \Rightarrow y^2+1 = x+1+2\sqrt{x+1}+1 = (\sqrt{x+1}+1)^2 \\ \sqrt{y^2+1} &= \sqrt{x+1}+1 \Rightarrow \sqrt{y^2+1}-1 = \sqrt{x+1} \Rightarrow x+1 = y^2+1-2\sqrt{y^2+1} \\ \Rightarrow f^{-1}(x) &= x^2+1-2\sqrt{x^2+1} \end{aligned}$$

(۳)-۱۳۴

$$\begin{aligned} x &= 2(\lambda)^{y/2} \Rightarrow \log x = \log 2 + \log \lambda^{y/2} \Rightarrow \frac{y}{2} \log \lambda = \log \frac{x}{2} \\ \Rightarrow y &= \frac{\log \left(\frac{x}{2} \right)}{\log \lambda} = \log_{\lambda} \left(\frac{x}{2} \right) \Rightarrow f^{-1}(x) = \log_{\lambda} \frac{x}{2} \Rightarrow f^{-1}(\lambda) = \log_{\lambda}^2 = 2 \log_{\lambda}^2 = 2 \end{aligned}$$

(۱)-۱۳۵

$$\begin{aligned} y &= x^2 - 2x^2 + 2 \Rightarrow x^2 - 2x^2 + 2 - y = 0 \Rightarrow x^2 = 2 \pm \sqrt{4-2+y} \\ \Rightarrow x^2 &= 2 - \sqrt{2+y}, \text{ اگر } 0 \leq x \leq \sqrt{2} \Rightarrow 0 \leq x^2 \leq 2 \Rightarrow \text{حداکثر } x^2 \text{ مساوی } 2 \text{ است} \\ x &= \pm \sqrt{2 - \sqrt{2+y}} \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{2 - \sqrt{2+x}} \longrightarrow \text{ زیرا } x \text{ در فاصله مثبت است} \end{aligned}$$

(۱)-۱۳۶

$$x = \sin \frac{y+1}{y} \Rightarrow \text{Arc sin } x = \frac{y+1}{y} \Rightarrow y = \frac{1}{\text{Arc sin } x - 1}$$

۱۳۷-(۴) می‌دانیم شرط لازم و کافی برای اینکه مبدأ مختصات مرکز تقارن یک تابع باشد، آن است که تابع فرد باشد. پس:

$$\begin{aligned} f(-x) &= -f(x) \Rightarrow f(-x) + f(x) = 0 \Rightarrow \log(-ax + \sqrt{9x^2+1}) + \log(ax + \sqrt{9x^2+1}) = 0 \\ \Rightarrow \log(9x^2+1 - a^2x^2) &= 0 \Rightarrow 9x^2+1 - a^2x^2 = 1 \Rightarrow (9-a^2)x^2 = 0 \Rightarrow a = \pm 3 \end{aligned}$$

(۲)-۱۳۸

$$y = 2x-4, x = 2y-4 \Rightarrow y = \frac{x+4}{2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+4}{2} \Rightarrow f^{-1}(-6) = -1$$

۱۳۹- (۱) نقاط تقاطع دو تابع f و f^{-1} روی نیمساز ناحیه اول و سوم ($y = x$) است، بنابراین:

$$x = x^r + x + 27 \Rightarrow x^r = -27 \Rightarrow x = -3 \Rightarrow y = -3$$

(۳)-۱۴۰

$$y = \sin(\cos x) \Rightarrow \text{Arc sin } y = \cos x \Rightarrow x = \text{Arc cos Arc sin } y \Rightarrow f^{-1}(x) = \text{Arc cos Arc sin } x$$

۱۴۱- (۱) $f(x) = \sqrt{x-1} + |x|$ پس $x \geq 1$ و $D_f = [1, +\infty)$ و بنابراین ضابطه تابع به صورت $f(x) = \sqrt{x-1} + x$ است و $f'(x) = 1/2\sqrt{x-1} + 1 > 0$ پس تابع اکیداً صعودی و در نتیجه، یک به یک است.

x	$-\infty$	-2	$+2$	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$+$	$-$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$
		-12	20	$-\infty$

همان‌طور که ملاحظه می‌کند، تابع f در فاصله $[-2, 2]$ اکیداً صعودی است، لذا وارون‌پذیر است.

$$f'(x) = -3x^r + 12 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$$

(۳)-۱۴۳

$$\text{Arc sin} \left(\ln \frac{x_1}{y_0} \right) = \text{Arc sin} \left(\ln \frac{x_r}{y_0} \right) \Rightarrow \ln \frac{x_1}{y_0} = \ln \frac{x_r}{y_0} \Rightarrow x_1 = x_r$$

تابع f یک به یک و بنابراین معکوس‌پذیر است.

$$y = \text{Arc sin} \left(\ln \frac{x}{y_0} \right) \Rightarrow \ln \left(\frac{x}{y_0} \right) = \sin y \Rightarrow \frac{x}{y_0} = e^{\sin y}$$

$$\Rightarrow x = y_0 e^{\sin y} \Rightarrow y = y_0 e^{\sin x} \Rightarrow f^{-1}(x) = y_0 e^{\sin x}$$

(۱)-۱۴۴

$$\text{Arc cos} \frac{y x_1}{1+x_1} = \text{Arc cos} \frac{y x_r}{1+x_r} \Rightarrow \frac{y x_1}{1+x_1} = \frac{y x_r}{1+x_r} \Rightarrow x_1 = x_r$$

تابع f یک به یک و بنابراین معکوس‌پذیر است.

$$y = \text{Arc cos} \frac{y x}{1+x} \Rightarrow \cos y = \frac{y x}{1+x} \Rightarrow \cos x = \frac{y y}{y+1} \Rightarrow y = \frac{\cos x}{1-\cos x}$$

۱۴۵- (۴) تابع f یک به یک است، و بنابراین معکوس‌پذیر می‌باشد.

$$x = \sqrt{y^r - 1} \Rightarrow x^r = y^r - 1 \Rightarrow y^r = x^r + 1 \Rightarrow f^{-1}(x) = y = \sqrt{x^r + 1}$$

$$f^{-1} \circ f = \sqrt{(\sqrt{x^r - 1})^r + 1} = \sqrt{x^r - 1 + 1} = x$$

$$f \circ f^{-1} = \sqrt{(\sqrt{x^r + 1})^r - 1} = \sqrt{x^r + 1 - 1} = x$$

(۱)-۱۴۶

$$y = \sin hx + \cos hx = e^x, x = e^y \Rightarrow y = \ln x \text{ و } f^{-1}(x) = \ln x$$

(۲)-۱۴۷

$$y = \cot hx = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

$$x = \frac{e^y + e^{-y}}{e^y - e^{-y}} \Rightarrow e^y(x-1) = e^{-y}(x+1) \Rightarrow e^{2y} = \frac{x+1}{x-1} \Rightarrow y = \ln \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$$

(۴)-۱۴۸

$$y = \frac{e^x}{1+e^x} \Rightarrow y + ye^x = e^x \Rightarrow e^x(y-1) = -y \Rightarrow e^x = \frac{y}{1-y}$$

$$\Rightarrow x = \ln \left| \frac{y}{1-y} \right| \Rightarrow f^{-1}(x) = \ln \left| \frac{x}{1-x} \right|$$

$$f^{-1}(g(x)) = \ln \frac{\sin^r x}{1 - \sin^r x} = \ln(\tan x)^r = r \ln \tan x$$

(۴)-۱۴۹

$$x = \ln(y + \sqrt{y^r + 1}) \Rightarrow e^x = y + \sqrt{y^r + 1} \Rightarrow \sqrt{y^r + 1} = e^x - y \Rightarrow$$

$$y^r + 1 = e^{rx} - 2ye^x + y^r \Rightarrow y = \frac{e^{rx}}{2e^x} - \frac{1}{2e^x} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{2} \left(e^x - \frac{1}{e^x} \right) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

(۲)-۱۵۰

$$x \neq 0 \Rightarrow x^r > 0 \Rightarrow \operatorname{sgn}(x^r) = \begin{cases} 1 & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

۱۵۱- (۱) زیرا پس از رسم نمودار خطوطی موازی محور y ها وجود دارند که نمودار را در بیش از یک نقطه قطع می‌کنند.

(۱)-۱۵۲

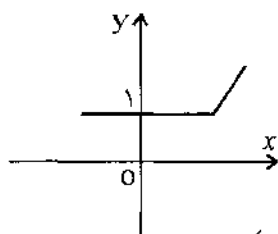
$$\begin{cases} \frac{r}{|x|} - 1 \geq 0 \Rightarrow (0, r], [-r, 0) \\ x^r - 1 > 0 \Rightarrow x > 1, x < -1 \end{cases} \Rightarrow [-r, -1), (1, r]$$

(۳)-۱۵۳

$$\left[\frac{1-x}{x} \right] = 1 \Rightarrow 1 \leq \frac{1-x}{x} < 2 \Rightarrow 1 \leq \frac{1}{x} - 1 < 2 \Rightarrow 2 \leq \frac{1}{x} < 3 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{3} < x \leq \frac{1}{2} \Rightarrow -2 \leq -6x < -1 \Rightarrow F(-6x) = -3$$

(۲)-۱۵۴



$$y = \begin{cases} 2x - 1 & x \geq 1 \\ 1 & x < 1 \end{cases}$$

(۲)-۱۵۵

$$\begin{cases} x_1^r - 3 = x_2^r - 3 \Rightarrow x_1 = x_2 & \text{یک به یک} \\ \forall b \in \mathbb{R}, b = x^r - 3 \Rightarrow x = \sqrt[r]{b+3} & \text{پوشنی} \end{cases}$$

۱۵۶- (۴) قرینه یک منحنی نسبت به نیمساز ناحیه اول و سوم همان معادله معکوس آن می‌باشد.

$$x = \sqrt[r]{y-1} + 1 \Rightarrow (x-1)^r = y-1 \Rightarrow (x-1)^r = y-1 \Rightarrow$$

$$x^r - rx^{r-1} + rx - 1 = y-1 \Rightarrow y = x^r - rx^{r-1} + rx$$

(۴)-۱۵۷

(۱)-۱۵۸

$$g \circ f(x) = \lambda(\sqrt{x})^\lambda = \lambda x, \quad (g \circ f)^{-1}(x) = \frac{x}{\lambda} \Rightarrow (g \circ f)^{-1}(1) = \frac{1}{\lambda}$$

(۳)-۱۵۹

$$0 \leq x^\lambda < x^\lambda + 1 \Rightarrow 0 \leq \frac{x^\lambda}{x^\lambda + 1} < 1 \Rightarrow \left\lfloor \frac{x^\lambda}{x^\lambda + 1} \right\rfloor = 0$$

از طرفی دامنه تعریف تابع $\mathbb{R}$ می‌باشد، یعنی دامنه متقارن است در نتیجه تابع هم فرد است و هم زوج.

(۳)-۱۶۰

$$\sin h(-x) = \frac{e^{-x} - e^x}{2} = -\frac{e^x - e^{-x}}{2} = -\sin hx \quad \text{فرد}$$

$$\cos h(-x) = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = \cos hx \quad \text{زوج}$$

$$\csc h(-x) = \frac{2}{e^{-x} - e^x} = \frac{2}{-(e^x - e^{-x})} = -\csc hx \quad \text{فرد}$$

$$\cot h(-x) = \frac{e^{-x} + e^x}{e^{-x} - e^x} = \frac{e^x + e^{-x}}{-(e^x - e^{-x})} = -\cot hx \quad \text{فرد}$$

۱۶۱-(۴) توابع f و g که دارای دو مقدار هستند و بنابراین ثابت نیستند. تابع h در صفر دارای مقدار دیگری است و ثابت نیست. فقط تابع ℓ در دامنه تعریفش ثابت است و دامنه آن اعداد گویا می‌باشد.

(۱)-۱۶۲

$$e^x - 1 = \pm(3 - 2e^x) \Rightarrow \begin{cases} 2e^x = 3 \Rightarrow e^x = \frac{3}{2} \Rightarrow x = \ln \frac{3}{2} \\ 2e^x - e^x = 3 \Rightarrow e^x = 3 \Rightarrow x = \ln 3 \end{cases}$$

(۳)-۱۶۳

$$(۱) \quad |5x + 2| < \frac{2}{5} \Rightarrow -\frac{2}{5} < 5x + 2 < \frac{2}{5} \Rightarrow -2 < 25x + 10 < 2 \Rightarrow -12 < 25x < -8 \Rightarrow -\frac{12}{25} < x < -\frac{8}{25}$$

$$(۲) \quad 0 < |5x + 2| \Rightarrow 5x + 2 = 0 \Rightarrow x = -\frac{2}{5}$$

بنابراین $x = -2/5$ را باید از $-12/25 < x < -8/25$ حذف کرد، یعنی: $(-12/25, -2/5) \cup (-2/5, -8/25)$

(۳)-۱۶۴

$$x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1, \quad 4 - x^2 > 0 \Rightarrow -2 < x < 2, \quad \log(4 - x^2) \neq 0 \Rightarrow x \neq \pm\sqrt{2} \Rightarrow Dg/f = [1, 2) - \{\sqrt{2}\}$$

۱۶۵-(۴) نمودارهای (۱) و (۲) مربوط به نمایش تابع نیستند. در نمودار (۳)، $y = 2$ پوشیده نمی‌گردد.

۱۶۶-(۴) برای رسم نمودار $y = [f(x)]$ ، ابتدا نمودار $y = f(x)$ را در دامنه تعریف آن همچنین خطوط افقی $y = n$ و $n \in \mathbb{Z}$ را رسم می‌کنیم. سپس بخشی از نمودار تابع $y = f(x)$ واقع مابین دو خط افقی متوالی را روی خط افقی زیرین تصویر می‌کنیم، بدین ترتیب نمودار تابع $y = [f(x)]$ به دست می‌آید.

(۳)-۱۶۷

$$y = g \circ f = g(f(x)) = \left(\frac{1}{\sqrt{x-1}} \right)^{-1} = (\sqrt{x-1})^4 \xrightarrow{x>1} y = x - 1$$

۱۶۸-(۳) تابع گزیده ۱ فاصله $1 < y < 2$ را نمی‌پوشاند (ممکن است فواصل دیگری را نیز نپوشاند) تابع گزیده ۲، $y > 0$ را نمی‌پوشاند. تابع گزیده ۴، $y = 0$ را نمی‌پوشاند. تنها گزیده ۳ تمام y ها را می‌پوشاند.

۱۶۹- (۲)

$$f(-x) = -x + \frac{1}{x} = -\left(x - \frac{1}{x}\right) = -f(x)$$

۱۷۰- (۴)

$$v(-x) = -v(x), u(-x) = u(x)$$

$$(uv)(-x) = u(-x)v(-x) = u(x)(-v(x)) = -u(x)v(x) = -uv(x) \quad \text{فرد}$$

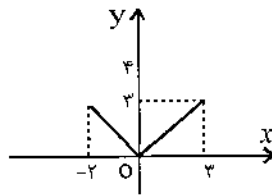
$$\left(\frac{u}{v}\right)(-x) = \frac{u(-x)}{v(-x)} = \frac{u(x)}{-v(x)} = -\frac{u(x)}{v(x)} = -\left(\frac{u}{v}\right)(x) \quad \text{فرد}$$

$$\left(\frac{v}{u}\right)(-x) = \frac{v(-x)}{u(-x)} = \frac{-v(x)}{u(x)} = -\left(\frac{v}{u}\right)(x) \quad \text{فرد}$$

۱۷۱- (۱) زیرا معکوس تابع f نسبت به خط $y = x$ متقارن است.

۱۷۲- (۲) اگر خطی به موازات محور x ها رسم کنیم. نمودار تابع را در دو نقطه قطع می‌کند و بنابراین یک به یک نیست و در نتیجه معکوس پذیر نمی‌باشد.

۱۷۳- (۲) به توضیحات قسمت‌های (۲-۱۵-۳) و (۲-۱۷-۳) مراجعه کنید.



۱۷۴- (۴)

۱۷۵- (۳)

باسخ تشریحی سؤالات تستی فصل ۴

۱- (۱)

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x + 2) = 3$$

۲- (۳)

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2 - 3x) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (-x^2 - 1) = -2 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$$

۳- (۴)

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (2x - 6) = -2, \lim_{x \rightarrow 1^-} (mx + n) = 2m + n \Rightarrow 2m + n = -2 \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (mx + n) = -2m + n, \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2) = 1 \Rightarrow -2m + n = 1 \quad (2)$$

از حل معادلات (۱) و (۲) خواهیم داشت: $m = -3/2, n = 1$

۴- (۱)

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2^+} (2 \sin x - 1) = 2 \sin \frac{\pi}{2} - 1 = 1, \lim_{x \rightarrow \pi/2^-} (\cos x + 1) = 0 + 1 = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pi/2} f(x) = 1$$

(۲)-۵

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} (ax + 2b) = 6 \Rightarrow 2a + 2b = 6 \quad (۱), \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} (ax^2 + bx + 2) = 2 \Rightarrow 4a + 2b = 0 \quad (۲)$$

از حل معادلات (۱) و (۲) خواهیم داشت: $a = -2$ و $b = 6$.

(۴)-۶

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} (b - 5x) = b - 10, \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} (ax + 2b) = 2a + 2b \Rightarrow 2a + 2b = b - 10 \quad (۱)$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} (ax + 2b) = -2a + 2b, \quad \lim_{x \rightarrow -2^-} (2x - a) = -6 - a \Rightarrow -2a + 2b = -6 - a \quad (۲)$$

از حل معادلات (۱) و (۲) خواهیم داشت: $a = -3$ و $b = -6$.

(۱)-۷

$$x \rightarrow 0^+ \Rightarrow \lim f(x) = \sqrt{3}, \quad x \rightarrow 0^- \Rightarrow \lim f(x) = \sqrt{3}$$

(۱)-۸

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = a + 2, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1 \Rightarrow a + 2 = 1 \Rightarrow a = -1$$

۱۱)-۹ $x^2 - x = x(x - 1)(x + 1)$ بنابراین صورت کسر به‌ازای هر عدد صحیح x حاصل‌ضرب سه عدد صحیح متوالی بوده و بر ۶ بخش‌پذیر است. پس به‌ازای $x = ۱۴۹۳$ حاصل عدد صحیح است. و می‌دانیم توابع جزء صحیح در نقاطی که عبارت داخل جزء صحیح عدد صحیح باشند، دارای حد نمی‌باشند ولی در هر نقطه صحیح مقدار دارند.

(۳)-۱۰

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [x] = -1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} [x^3] = 0, \dots$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} ([x] + [x^3] + [x^5] + \dots + [x^{1000}]) = (-1 + 0 - 1 + 0 - \dots) = -500$$

(۱)-۱۱

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} 2^{-(1/(x-1))} = 2^{-(2^{+\infty})} = 2^{-\infty} = \frac{1}{2^{\infty}} = 0$$

۱۲)-۳ فرض می‌کنیم $2^{1/x} = t$ بنابراین $2^{-1/x} = t^{-1}$ و در نتیجه:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^{1/x} - 2^{-1/x}}{2^{1/x} + 2^{-1/x}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t - t^{-1}}{t + t^{-1}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} = 1$$

(۴)-۱۳

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \frac{11}{0^+} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \frac{11}{0^-} = -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$$

(۴)-۱۴

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{1/5} - (1-x)^{1/5}}{(1+x)^{1/7} - (1-x)^{1/7}} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{خوبناله}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1/5(1+x)^{-4/5} + 1/5(1-x)^{-4/5}}{1/7(1+x)^{-6/7} + 1/7(1-x)^{-6/7}} = \frac{3}{2/6}$$

(۱)-۱۵

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \left(\frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3}{6n^3} = \frac{1}{3}$$

(۲)-۱۶

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|x|}{|x| + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|x|}{|x|(1 + 1/|x|)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + 1/|x|} = \frac{1}{1 + 0} = 1$$

(۲)-۱۷

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2+} \frac{\sec x}{\tan x} = \lim_{x \rightarrow \pi/2+} \frac{1/\cos x}{\sin x / \cos x} = \lim_{x \rightarrow \pi/2+} \frac{1}{\sin x} = \frac{1}{1} = 1$$

(۲)-۱۸

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{(2x+1)^4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 \left(1 - \frac{1}{x}\right) \left(1 - \frac{2}{x}\right) \left(1 - \frac{3}{x}\right) \left(1 - \frac{4}{x}\right)}{x^4 \left(2 + \frac{1}{x}\right)^4} = \frac{1}{16}$$

۱۹- (۴) صورت و مخرج کسر را بر x^{Δ} تقسیم می‌کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(2 - \frac{3}{x}\right)^{20} \left(3 + \frac{2}{x}\right)^{30}}{\left(2 + \frac{1}{x}\right)^{50}} = \frac{2^{20} \times 3^{30}}{2^{50}} = \frac{3^{30}}{2^{30}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{30}$$

(۳)-۲۰

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

۲۱- (۱) عبارت‌های صورت و مخرج تصاعد هندسی با مشخصات $(a = 1, r = 1/2)$ و $(a = 1, r = 1/3)$ می‌باشند و حد s_n هنگامی که $n \rightarrow \infty$ برابر $a/1 - r$ است. بنابراین:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = \frac{\frac{1}{1 - 1/2}}{\frac{1}{1 - 1/3}} = \frac{2}{3}$$

(۲)-۲۲

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{1 + 2 + 3 + \dots + n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{\frac{n}{2}(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)(n-2)!}{\frac{n(n+1)}{2}} \\ &= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n+1} \lim_{n \rightarrow \infty} (n-2)! = +\infty \end{aligned}$$

(۱)-۲۳

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\Delta}{\frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\Delta}{\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\Delta}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = \frac{\Delta}{1} = \Delta$$

(۲)-۲۴

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2^{1/2} \times 2^{1/4} \times 2^{1/8} \times \dots \times 2^{1/2^n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2^{1/2 + 1/4 + \dots + 1/2^n}\right) = 2$$

(۱)-۲۵

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(m-1)(x+1)}{(2-m)(x+2)} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{m-1}{2-m} = \frac{1}{2} \Rightarrow m = 2$$

(۴)-۲۶

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 |f(x) - 1|}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x)^2 [-(x - 2)]}{x - 2} = - \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)^2 = -16$$

(۲)-۲۷

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sin x - \cos x}{x^2} \stackrel{\frac{0}{0}}{\rightarrow} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x + \sin x}{2x} \stackrel{\frac{0}{0}}{\rightarrow} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + \sin x + \cos x}{2} = 1$$

(۲)-۲۸

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\ln(\cos x)}{\ln(\tan x)} &= \frac{-\infty}{+\infty} \stackrel{\frac{0}{0}}{\rightarrow} \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\frac{-\sin x}{\cos x}}{\frac{1 + \tan^2 x}{\tan x}} = \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{-\tan x}{1 + \tan^2 x} = \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{-\tan^2 x}{1} \\ &= \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{-\sin^2 x}{\cos^2 x} = - \lim_{x \rightarrow \pi/2} \sin^2 x = -1 \end{aligned}$$

(۳)-۲۹

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) + x}{f(x) + 1/x} = \frac{f(x) + 0}{f(x) + 0} = \frac{f}{f}$$

(۴)-۳۰ بنا به قضیه فشار:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - 1}{x} = f, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)^2 + x}{x^2} = f \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = f$$

(۱)-۳۱

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right) &= \infty - \infty, \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x-1-\ln x}{\ln x(x-1)} \right) \stackrel{\frac{0}{0}}{\rightarrow} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \frac{1}{x}}{\frac{x-1}{x} + \ln x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1) + x \ln x} \stackrel{\frac{0}{0}}{\rightarrow} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1 + \ln x + 1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(۴)-۳۲

$$\begin{aligned} x &= \frac{y+1}{y-1} \Rightarrow xy - 1x = y + 1 \Rightarrow y = \frac{1x+1}{x-1} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1x+1}{x-1} \\ \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{f(x)+1}{x-1} \right) &= \frac{\delta}{1-1} = \delta \end{aligned}$$

(۲)-۳۳

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{\delta}{f(x)} \right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{\delta}{x} \right)^x = e^{-\delta/f \times 1} = e^{-\delta/f}$$

(۱)-۳۴

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^k} = \frac{\infty}{\infty} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{\rightarrow} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{kx^{k-1}} = \frac{\infty}{\infty} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{\rightarrow} \dots \rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{k!} = \infty$$

(۴)-۳۵

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases} \Rightarrow |\operatorname{sgn}(x)| = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} |\operatorname{sgn}(x)| = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} |\operatorname{sgn}(x)| = \lim_{x \rightarrow 0^-} (1) = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} |\operatorname{sgn}(x)| = 1$$

(۳)-۳۶

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - |\tan x|}{|\sin x| - x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \tan x}{\sin x - x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{ل‌ه‌وپلا}} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - (1 + \tan^2 x)}{\cos x - 1} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{ل‌ه‌وپلا}} \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-2 \tan x (1 + \tan^2 x)}{-\sin x} &= \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{ل‌ه‌وپلا}} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-2(1 + \tan^2 x)^2 - 2 \tan^3 x (1 + \tan^2 x)}{-\cos x} = 2 \end{aligned}$$

(۴)-۳۷

$$\begin{aligned} n \rightarrow \infty &\Rightarrow \frac{\infty^0}{n} \rightarrow 0 \Rightarrow \sin \frac{\infty^0}{n} \sim \frac{\infty^0}{n} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \frac{\infty^0}{n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{\infty^0}{n} = \infty^0 \end{aligned}$$

(۱)-۳۸ وقتی $x \rightarrow 3^+$ ، $[x]$ برابر ۳ است و در نتیجه $3 - [x] = 0$ است.

(۱)-۳۹

$$\begin{aligned} y = x - \ln \cos hx &\Rightarrow e^y = e^{x - \ln \cos hx} \Rightarrow e^y = e^x \cdot e^{-\ln \cos hx} = \frac{e^x}{e^{\ln \cos hx}} \\ \Rightarrow e^y &= \frac{e^x}{\cos hx} = \frac{e^x}{\frac{e^x + e^{-x}}{2}} = \frac{2e^x}{e^x(1 + e^{-2x})} \Rightarrow e^y = \frac{2}{1 + e^{-2x}} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^y &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{1 + e^{-2x}} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} e^y = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln \cos hx) = \ln 2 \end{aligned}$$

(۱)-۴۰

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} &= 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{ax^b} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{ل‌ه‌وپلا}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{abx^{b-1}} = \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{abx^{b-1}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \times \frac{x^2}{4}}{abx^{b-1}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2abx^{b-1}} \Rightarrow b - 1 = 2 \Rightarrow b = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2abx^{b-1}} &= \frac{1}{2ab} = 1 \Rightarrow \frac{1}{2a} = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(۴)-۴۱

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\Lambda^{\sqrt{x}} - 1}{\sqrt{x} - 1} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{ل‌ه‌وپلا}} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} \Lambda^{\sqrt{x}} \ln \Lambda}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \frac{\ln \Lambda}{\ln 2}$$

(۲)-۴۲

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(x+n)^n - x^n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n + n^n + 2nx^{n-1} + 2n^2x^{n-2} - x^n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (2nx^{n-1} + 2n^2x^{n-2}) = 2x^2$$

(۳)-۴۳

$$x \rightarrow -\infty \Rightarrow \sqrt{x^2 - 1} \sim -(x - 1)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{Arc} \cos \frac{x - (x - 1)}{\sqrt{x^2 - 1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{Arc} \cos \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} = \operatorname{Arc} \cos(0) = \frac{\pi}{2}$$

(۱)-۴۴

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot e^{-x} = \infty \times 0 \longrightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\frac{1}{e^{-x}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{\text{ل‌ه‌سپتال}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

(۲)-۴۵

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + e^{1/x})^{1/x} = 1^\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + e^{1/x})^{1/x} = \exp \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x + e^{1/x})}{x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{ل‌ه‌سپتال}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + e^{1/x}}{x + e^{1/x}} = \frac{1 + 1}{1} = 2, \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + e^{1/x})^{1/x} = e^2$$

(۳)-۴۶

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cdot 1/x \cdot 1/x \cdot \dots \cdot 1/nx}{x^n} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n (1 \times 1/x \times 1/x \times \dots \times 1/n)}{x^n} = 1 \times 1/x \times 1/x \times \dots \times 1/n = 1/n!$$

(۲)-۴۷

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - x)^{1/x} = 1^\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - x)^{1/x} = \exp \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 - x)}{x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{ل‌ه‌سپتال}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{1}{1-x}}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{1-x} = -1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - x)^{1/x} = e^{-1}$$

(۴)-۴۸

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x-1/2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x/2} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{-1/2}$$

$$= \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \right)^{1/2} \times 1 = e^{1/2} \times 1 = e^{1/2}$$

(۱)-۴۹

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin x)^{\cot x} = 0^\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin x)^{\cot x} = \exp \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \sin x}{\tan x} = \frac{-\infty}{0} \xrightarrow{\text{ل‌ه‌سپتال}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{1 + \tan^2 x} = \frac{0}{0} = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin x)^{\cot x} = e^{+\infty} = +\infty$$

(۱)-۵۰

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin x + \cos x)^{1/x} = 1^\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin x + \cos x)^{1/x} = \exp \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\sin x + \cos x)}{x} = \frac{0}{0}$$

$$\xrightarrow{\text{ل‌ه‌سپتال}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x} = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin x + \cos x)^{1/x} = e^1 = e$$

(۲)-۵۱

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}}{\sqrt[5]{x} + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[5]{x}} + \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[5]{x}} + \frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[5]{x}}}{\frac{\sqrt[5]{x} + 1}{\sqrt[5]{x}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \sqrt[5]{\frac{1}{x}} + \sqrt[5]{\frac{1}{x^2}}}{\sqrt[5]{2 + \frac{1}{x}}} = \frac{1}{\sqrt[5]{2}} = \frac{\sqrt[5]{2}}{2}$$

(۳)-۵۲

$$\lim_{x \rightarrow \cdot} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) = \infty - \infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \cdot} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow \cdot} \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)} \stackrel{\text{هسپتال}}{=} \frac{0}{0} \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow \cdot} \frac{e^x - 1}{e^x - 1 + xe^x} \stackrel{\text{هسپتال}}{=} \lim_{x \rightarrow \cdot} \frac{e^x}{e^x + e^x + xe^x} = \frac{1}{2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \cdot} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) = \frac{1}{2}$$

(۲)-۵۳ داریم $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -2$ و $g(-2) = 0$ و $g(0) = -2$ بنابراین تابع g در نقاط -2 و 0 پیوسته است، در نتیجه:

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(g(g(x))) = g(\lim_{x \rightarrow 0} g(g(x))) = g(g(\lim_{x \rightarrow 0} g(x))) = g(g(-2)) = -2$$

(۱)-۵۴

$$x + 2f = t^f \Rightarrow x = t^f - 2f, x \rightarrow 1 \Rightarrow t \rightarrow 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - 2}{\sqrt{x} + 2f - 2} = \lim_{t \rightarrow 3} \frac{2t^f - 2f}{t - 2} = \lim_{t \rightarrow 3} \frac{2(t - 2)(t^f + 2t + 4)}{t - 2} = \lim_{t \rightarrow 3} 2(t^f + 2t + 4) = 54$$

(۱)-۵۵

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} (1 + \cos x)^{\sec x} = 1^\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pi/2} (1 + \cos x)^{\sec x} = \exp \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\sec x \ln(1 + \cos x)}{\cos x} \stackrel{\text{هسپتال}}{=} \frac{0}{0} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{-\sin x}{1 + \cos x} = \frac{1}{1 + \cos \frac{\pi}{2}} = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pi/2} (1 + \cos x)^{\sec x} = e^1$$

(۱)-۵۶

$$x \rightarrow +\infty \Rightarrow \sqrt{x^2 + 2x - 1} \sim (x + 1), \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 2 - ax + b) = (1 - a)x + (b + 2)$$

$$(1 - a)x + (b + 2) \equiv 0 \Rightarrow 1 - a = 0 \Rightarrow a = 1, b + 2 = 0 \Rightarrow b = -2 \Rightarrow a + b = -1$$

(۳)-۵۷

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x + 1} - mx - n \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1 - m)x^2 - (m + n)x + 1 - n}{x + 1} = 0$$

بنابراین ضرایب x^2 و x در صورت و مخرج برابر صفر است، یعنی:

$$1 - m = 0 \Rightarrow m = 1, m + n = 0 \Rightarrow n = -1$$

(۲)-۵۸

$$x \rightarrow 1^+ \Rightarrow [x] = 1, x - 1 > 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(-1)^{[x]}}{x - 1} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

$$x \rightarrow 1^- \Rightarrow [x] = 0, x - 1 < 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(-1)^{[x]}}{x - 1} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

۵۹- (۴) حد در $x \rightarrow 0$ وجود ندارد. زیرا حد چپ برابر با صفر و حد راست برابر با بی‌نهایت است. با فرض $x \rightarrow 0^+$ داریم: $\lim (\sin x) e^{1/x} = 0 \times \infty$ بنابراین:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{e^{1/x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{1/x}}{\frac{1}{x}} = 1 \times \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{1}{x^2} e^{1/x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{1/x} = e^\infty = \infty$$

(۳)-۶۰

۶۱- (۱) اگر $ax = t$ ، آنگاه:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + ax)^{a/x} = \lim_{t \rightarrow 0} (1 + t)^{a/t} = \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ (1 + t)^{1/t} \right\}^{at} = e^{a^2}$$

(۱)-۶۲

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{ل‌ه‌وپلاز}} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x}}{\frac{-1/x^2}{1 + 1/x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \cos \frac{1}{x} = 1$$

(۴)-۶۳

$$x \rightarrow 0 \Rightarrow \sin \sin \sin x \sim \sin \sin x \sim \sin x \sim x$$

$$x \rightarrow 0 \Rightarrow \tan x \sim x, \tan^2 x \sim x^2, \dots, \tan nx \sim nx$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{nx^n}{x \times x^2 \times x^3 \times \dots \times nx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{nx^n}{1 \times 2 \times \dots \times n \times x^n} = \frac{n}{n!}$$

(۱)-۶۴

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x} = \infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x} = \exp \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{\sin x}} = \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{\text{ل‌ه‌وپلاز}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{-1/x}{-\cos x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2 x}{x \cos x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{ل‌ه‌وپلاز}} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \sin x \cos x}{\cos x - x \sin x} = \frac{0}{1-0} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x} = e^0 = 1$$

(۳)-۶۵

$$\lim_{x \rightarrow k} \frac{x^a - k^a}{k^b - x^b} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{ل‌ه‌وپلاز}} \lim_{x \rightarrow k} \frac{ax^{a-1}}{-bx^{b-1}} = -\frac{a}{b} k^{a-b}$$

(۳)-۶۶

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+c}{x-c}\right)^x &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2c}{x-c}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2c}{x-c}\right)^{x-c} \left(1 + \frac{2c}{x-c}\right)^c \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2c}{x-c}\right)^{x-c} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2c}{x-c}\right)^c = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2c}{x-c}\right)^{x-c} \times 1 = e^{2c} \\ e^{2c} = 2 &\Rightarrow 2c = \ln 2 \Rightarrow c = \frac{1}{2} \ln 2 \Rightarrow c = \ln \sqrt{2} \end{aligned}$$

(۲)-۶۷

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{x + \sqrt{x}}} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} \left(\sqrt{1 + \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^3}}}} \right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^3}}}}} = 1$$

۶۸- (۱) x با مقادیر بزرگتر از ۱ به ۱ میل می‌کند. پس می‌توان فرض کرد $1 < x < \sqrt{2}$. در این صورت $1 < x^2 < 2$ و در نتیجه $1 = [x]^2 = [x^2]$. به علاوه $x^2 - 1 \neq 0$. پس برای $1 < x < \sqrt{2}$ داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{[x^2] - [x]^2}{x^2 - 1} = 0$$

(۳)-۶۹

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pi/2-} \frac{\sec^2 x}{\sec^2 x} &= \lim_{x \rightarrow \pi/2-} \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{هسپتال}} \lim_{x \rightarrow \pi/2-} \frac{-2 \cos x \sin x}{-2 \cos x \sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \pi/2-} \frac{2(\cos x \sin x)}{2 \cos x \sin x} = \lim_{x \rightarrow \pi/2-} \frac{\sin 2x}{\sin 2x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{هسپتال}} \lim_{x \rightarrow \pi/2-} \frac{2 \cos 2x}{2 \cos 2x} = \frac{2(-1)}{2(-1)} = 1 \end{aligned}$$

(۱)-۷۰

$$\lim_{x \rightarrow +0} \sin^{-1} x \cdot \csc x = 0 \times (+\infty), \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin^{-1} x}{\sin x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{هسپتال}} \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\cos x} = \frac{1}{1} = 1$$

(۳)-۷۱

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2 \sec x} \right) &= (+\infty) - (+\infty), \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec x - 1}{x^2 \sec x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{هسپتال}} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec x \tan x}{x \sec x + x^2 \sec x \tan x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x + x^2 \tan x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{هسپتال}} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \tan^2 x}{x + x^2 \tan x + x^2(1 + \tan^2 x)} &= \frac{1}{x + 0 + 0} = \frac{1}{x} \end{aligned}$$

(۲)-۷۲

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\cos^2 x - \cos^2 x}{x^2 - |x|} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{هسپتال}} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2 \sin x}{2x - 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2 \sin x}{2x^2 - |x|} = \frac{-2 \sin(-1)}{1} = 2 \sin 1$$

(۲)-۷۳

$$\begin{aligned} x \rightarrow +\infty \Rightarrow \frac{a}{x^x} \rightarrow 0 \Rightarrow \sin \frac{a}{x^x} \sim \frac{a}{x^x} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^x} \cot \frac{a}{x^x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x^x} \cos \frac{a}{x^x}}{\sin \frac{a}{x^x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x^x} \cos \frac{a}{x^x}}{\frac{a}{x^x}} = \frac{1 \times 1}{a} = \frac{1}{a} \end{aligned}$$

۷۴- (۱) $\sin 1/x$ در نقطه‌ای به طول صفر حد ندارد و بین ۱ و -۱ در نوسان است ولی حد مخرج بی‌نهایت و بنابراین حد کسر برابر صفر است.

(۱)-۷۵

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Arctan} x - \operatorname{Arcsin} x}{x(1 - \cos x)} &= \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{هویتال}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{1 - \cos x + x \sin x} = \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x^2)^{-1} - (1-x^2)^{-1/2}}{1 - \cos x + x \sin x} &= \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{هویتال}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x(1+x^2)^{-2} - x(1-x^2)^{-3/2}}{2 \sin x + x \cos x} = \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2(1+x^2)^{-2} - (1-x^2)^{-3/2}}{2 \frac{\sin x}{x} + \cos x} &= \frac{-2-1}{2+1} = -1\end{aligned}$$

(۱)-۷۶

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+2}{x-1} \right)^{2x} &= 1^\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+2}{x-1} \right)^{2x} = \exp \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left(\frac{x+2}{x-1} \right)}{\frac{1}{2x}} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{هویتال}} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{-2}{(x-1)(x+2)}}{\frac{-1}{2x^2}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^2 + x - 2} = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+2}{x-1} \right)^{2x} = e^2\end{aligned}$$

۷۷- (۴) زیرا x نمی‌تواند به سمت 0^- میل کند.

(۲)-۷۸

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} y &= \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{هویتال}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 - 6 + 6 \cos x}{2x^2 - 2x \sin x - x^2 \cos x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{هویتال}} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x - 6 \sin x}{4x - 2 \sin x - 2x \cos x + x^2 \sin x} &= \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{هویتال}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 - 6 \cos x}{4 - 6 \cos x + 6x \sin x + x^2 \cos x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{هویتال}} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 \sin x}{4 \sin x + 4x \cos x - x^2 \sin x} &= \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{هویتال}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 \cos x}{4 \cos x - 4x \sin x - x^2 \cos x} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n} &= 0 \text{ در نتیجه } 0 < x^2 < 1 \text{ آن گاه } -1 < x < 1 \text{ و اگر } f(0) = 1 \text{ داریم} \\ \text{بنابراین } \lim_{n \rightarrow \infty} 1/(1+x^{2n}) &= 1 \text{ در ضمن } f(-1) = f(1) = 1/2\end{aligned}$$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & |x| > 1 \\ \frac{1}{2} & |x| = 1 \\ 1 & |x| < 1 \end{cases}$$

(۱)-۸۰

(۱)-۸۱

$$\begin{aligned}x+2=t \Rightarrow x=t-2 \Rightarrow f(t) &= \frac{t-2+1}{t-2-1} = \frac{t-2}{t-3} \Rightarrow f(x) = \frac{x-2}{x-3} \\ \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x-3} &= \frac{0}{-1} = 0\end{aligned}$$

(۲)-۸۲

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + e^{-2x}}{e^x - e^{-2x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x \left(1 + \frac{1}{e^{2x}} \right)}{e^x \left(1 - \frac{1}{e^{2x}} \right)} = \frac{1+0}{1-0} = 1$$

(۴)-۸۳

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{1 - \cos \sqrt{x}}} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{1} \sin \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{1} |\sin x|} = \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1} |x|} = \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{x}}{-\sqrt{1} \sqrt{x}} = -\sqrt{1}$$

(۲)-۸۴

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\sqrt{1 + \tan x} - \sqrt{1 - \tan x}} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\sqrt{1 + \tan x} - \sqrt{1 - \tan x}} \times \frac{\sqrt{1 + \tan x} + \sqrt{1 - \tan x}}{\sqrt{1 + \tan x} + \sqrt{1 - \tan x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x (\sqrt{1 + \tan x} + \sqrt{1 - \tan x})}{\sqrt{x} \tan x} = \frac{x(\sqrt{1 + 0} + \sqrt{1 - 0})}{\sqrt{x}} = 1$$

(۲)-۸۵

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^{\sqrt{x}} - \sqrt{x}^{\sqrt{x}} - x}{\sqrt{x}^{\sqrt{x}} + x^{\sqrt{x}}} \right)^{x^{\sqrt{x}} - x/x + x^{\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}^{\sqrt{x}}} \right)^{x^{\sqrt{x}}/x^{\sqrt{x}}} = \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right)^{+\infty} = 0$$

(۱)-۸۶

$$\lim_{x \rightarrow \pi/\sqrt{e}} \frac{\tan x - 1}{\sqrt{x} - \pi} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{هسپتال}} \lim_{x \rightarrow \pi/\sqrt{e}} \frac{1 + \tan^2 x}{\sqrt{x}} = \frac{1 + 1}{\sqrt{e}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

(۲)-۸۷

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{\sqrt{x}} + \sqrt{x} a x^{\sqrt{x}} - x - \sqrt{x} a}{a x^{\sqrt{x}} + x(1 - a) - 1} = 1 \Rightarrow \frac{1 + \sqrt{x} a - 1 - \sqrt{x} a}{a + 1 - a - 1} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{هسپتال}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}^{\sqrt{x}} + \sqrt{x} a x^{\sqrt{x}} - 1}{\sqrt{x} a x + 1 - a} = 1 \Rightarrow \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x} a - 1}{\sqrt{x} a + 1 - a} = 1 \Rightarrow \frac{\sqrt{x} a + \sqrt{x}}{a + 1} = 1 \Rightarrow a = -\frac{1}{\sqrt{x}}$$

(۳)-۸۸

$$\lim_{x \rightarrow 1/\sqrt{e}+} (a x^{\sqrt{x}}) = \frac{a}{\sqrt{e}}, \lim_{x \rightarrow 1/\sqrt{e}-} (x^{\sqrt{x}}) = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow \frac{a}{\sqrt{e}} = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow a = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

(۲)-۸۹

$$\lim_{x \rightarrow -\sqrt{e}+} (\sqrt{x} m x + \delta) = -\sqrt{x} m + \delta, \lim_{x \rightarrow -\sqrt{e}-} [x] = -\sqrt{x} \Rightarrow -\sqrt{x} m + \delta = -\sqrt{x} \Rightarrow m = \sqrt{x}$$

(۲)-۹۰

$$\lim_{x \rightarrow 0+} (e^x + e^{-x}) = 2, \lim_{x \rightarrow 0-} (\sqrt{x} a - x) = \sqrt{x} a \Rightarrow 2 = \sqrt{x} a \Rightarrow a = 1$$

(۲)-۹۱

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1 - x^{\sqrt{x}}} \ln x = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{هسپتال}} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x}}{1 - \sqrt{x}} = -\frac{1}{\sqrt{x}}$$

چون شرط پیوستگی آن است که $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$ باشد، لذا کافی است $a = -1/\sqrt{2}$ انتخاب شود.

(۲)-۹۲

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} ([x] + a) = 1 + a$$

تابع در $x = 1$ پیوستگی راست دارد بنابراین، $\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = f(1)$ یا $1 + a = 1$ یا $a = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} ([x] + b x) = 1 + \sqrt{x} b, \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = 1 \Rightarrow 1 + \sqrt{x} b = 1 \Rightarrow b = 0$$

(۲)-۹۳

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x - 1)}{\sqrt{x} - 1} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{هسپتال}} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos(x - 1)}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \frac{1 \times 1}{1} = 1$$

چون شرط پیوستگی آن است که $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$ ، بنابراین کافی است $m = 2$ قرار گیرد تا تابع در $x = 1$ پیوسته شود. (۴)-۹۴

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2$$

(۱)-۹۵

$$f(2) = \frac{2a-1}{2a+1}, \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2-4}{x^2-1} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{هسپتال}} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x}{2x} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2-4}{x^2-1} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x}{2x} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{2a-1}{2a+1} \Rightarrow a = 1$$

(۱)-۹۶

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2^+} (\sin x + \cos x) = 1, \lim_{x \rightarrow \pi/2^-} (2 \sin^2 x - 1) = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pi/2} f(x) = 1 = f\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

(۴)-۹۷

$$f(a) = a, \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = 2a - \frac{a^2}{a^2} = a, \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \frac{a^2}{a} = a$$

$$f(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$$

(۴)-۹۸

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = 2 \Rightarrow \text{تابع در نقطه } x = 1 \text{ پیوسته است}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) = \frac{5}{3} \Rightarrow \text{تابع در نقطه } x = 2 \text{ پیوسته است}$$

به‌طور کلی در نقاط غیر از ۱- پیوسته است.

(۲)-۹۹

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{هسپتال}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+x^2} = 1$$

بنابراین $f(0)$ باید برابر ۱ اختیار شود تا تابع f در نقطه ۰ پیوسته باشد.

۱۰۰- (۴) تابع $f(x)$ در $x = \pm 1$ ناپیوسته است و چون $x = 1$ و $x = -1$ در فاصله $[-1/2, 3/4]$ قرار ندارند.

بنابراین تابع $f(x)$ در فاصله $[-1/2, 3/2]$ پیوسته است.

(۱)-۱۰۱

$$3e^x - 3 = 0 \Rightarrow e^x = 1 \Rightarrow x = 0$$

۱۰۲- (۳) گزینه (۱) غلط است زیرا در $x = 1$ تعریف نشده و بنابراین گزینه (۲) هم غلط است. از طرفی

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \sin(\pi x) = 0$$

(۴)-۱۰۳

$$x^2 - x \geq 0, x(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x = 0, x = \pm 1$$

x	-۱	۰	۱	
$x^2 - x$	-	+	-	+
	ناپیوسته	پیوسته	ناپیوسته	پیوسته

$\{x | x < -1 \text{ یا } 0 < x < 1\}$ فاصله ناپیوسته

(۴)-۱۰۴

$$\sin x + \frac{\delta}{4} = 0 \Rightarrow \sin x = -\frac{\delta}{4}$$

می‌دانیم $1 \leq \sin x \leq -1$ است، پس مخرج کسر هیچ‌گاه صفر نمی‌شود.

(۱)-۱۰۵

$$\ln x = 0 \Rightarrow x = e^0 \Rightarrow x = 1, x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1, \ln x - 1 = 0 \Rightarrow x = e$$

(۱)-۱۰۶ دامنه تعریف تابع $\mathbb{R} - \{0\}$ است، بنابراین در نقطه $x = 0$ گسسته است.

(۴)-۱۰۷

$$f \circ g = f(g(x)) = \sin^2 x - 1 \quad \text{همواره پیوسته است}$$

(۴)-۱۰۸ زیرا $x^2 + 1$ همواره مثبت است، در نتیجه تابع همواره پیوسته است.

(۲)-۱۰۹ گسستگی این تابع باید در نقطه $x = 0$ و $x = 1$ مورد بررسی قرار گیرد.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-1) = -1, \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x - 1) = -1, f(0) = -1$$

تابع در $x = 0$ پیوسته است.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 - 1) = 0, \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (-1) = -1, f(1) = -1$$

تابع در نقطه $x = 1$ از چپ پیوسته است و از سمت راست گسسته می‌باشد.

(۳)-۱۱۰

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(x^2 - \frac{x-1}{x-1} \right) = 1 - 1 = 0, \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(x^2 + \frac{x-1}{x-1} \right) = 1 + 1 = 2, f(1) = 2$$

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$$

(۲)-۱۱۱

$$f(\tan x) = \sqrt{\tan x - 1} \Rightarrow \tan x - 1 \geq 0 \Rightarrow \tan x \geq 1 \Rightarrow \sin x \geq \cos x \Rightarrow \frac{\pi}{4} \leq x < \frac{\pi}{2}$$

(۱)-۱۱۲

$$f(n) = 4n - 2n = n, \lim_{x \rightarrow n^+} f(x) = 4n + 3(-n - 1) = n - 3$$

$$\lim_{x \rightarrow n^-} f(x) = 4(n - 1) + 3(-n) = n - 4, \lim_{x \rightarrow n^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow n^-} f(x)$$

(۱)-۱۱۳

$$-x^2 + 4x - 3 \geq 0, -x^2 + 4x - 3 = 0 \Rightarrow x = 1, x = 3$$

$$\frac{x}{-x^2 + 4x - 3} \quad \begin{array}{c|cc} & 1 & 3 \\ \hline & - & + & - \end{array} \quad \text{فاصله پیوستگی} = \{x | 1 \leq x \leq 3\} = [1, 3]$$

(۳)-۱۱۴ که $f = g \circ h$ و $h(x) = \sqrt{1 - x^2}$ و $D_h = [-1, 1]$ و برای $x \in [-1, 0) \cup (0, 1]$ داریم:

$$0 \leq \sqrt{1 - x^2} < 1 \Rightarrow \begin{cases} f(x) = 0 & x \in [-1, 0) \cup (0, 1] \\ f(x) = 1 & x = 0 \end{cases}$$

از طرفی $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0 = f(1)$ و $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 0 = f(-1)$ پس $(-1, 0) \cup (0, 1)$ مجموعه نقاط پیوستگی است.

۱۱۵- (۴) $f = g \circ h$ که $g(x) = [x]$ و $h(x) = \frac{2}{x}$ و $0 \notin D_h$ و g در نقاط صحیح ناپیوسته است. پس:

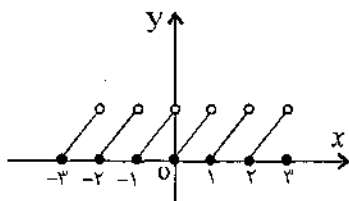
$$\text{مجموعه نقاط پیوستگی} = \mathbb{R} - \{-1, -2, 0, 1, 2\}$$

(۱۱۶-)

$$f(x) = (-1)^{[x]} = \begin{cases} +1 & 2k \leq x < 2k+1 \\ -1 & 2k'-1 \leq x < 2k' \end{cases} \quad (k, k' \in \mathbb{Z})$$

بنابراین تابع در نقاط صحیح ناپیوسته است.

۱۱۷- (۴) $y = x - n$ و $n \leq x < n+1$ بنابراین این تابع در نقاط صحیح ناپیوسته (متصل) است.



(۱۱۸-)

$$\text{sgn}[|x|] = \begin{cases} 0 & 0 \leq |x| < 1 \\ 1 & |x| \geq 1 \end{cases} = \begin{cases} 0 & -1 < x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \text{ یا } x \leq -1 \end{cases}$$

بنابراین تابع در نقاط $x = -1$ و $x = 1$ ناپیوسته است.

۱۱۹- (۲) مقدار تابع در $x = 0$ مساوی ۱ است یعنی $f(0) = 1$ و حد راست تابع در $x \rightarrow 0^+$ مساوی ۱ می‌باشد یعنی $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1$ ولی تابع در $x = 0$ حد چپ ندارد زیرا تابع در $x < 0$ معین نیست پس تابع در $x = 0$ فقط پیوستگی راست دارد.

(۱۲۰-)

$$f(2) = 0, \lim_{x \rightarrow 2^+} (2x - 1) = 3, \lim_{x \rightarrow 2^-} (2 - x) = 0 \Rightarrow f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 0$$

$$f(-2) = -1, \lim_{x \rightarrow -2^+} (2 - x) = 4, \lim_{x \rightarrow -2^-} (x + 1) = -1 \Rightarrow f(-2) = \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -1$$

(۱۲۱-)

$$g^2(x) + g(x) < 0, g^2(x) + g(x) = 0 \Rightarrow g(x) = 0, g(x) = -1 \Rightarrow -1 < g(x) < 0 \Rightarrow \{x \mid -1 < g(x) < 0\}$$

۱۲۲- (۲) در توابع لگاریتمی بایستی $(x^2 - 1)^2 > 0$. این عبارت همیشه مثبت است ولی به ازای $x = 1$ حاصل این عبارت صفر می‌شود، در نتیجه در $x = 1$ تابع گسسته است.

(۱۲۳-)

$$1 + e^{1/x} = 0 \Rightarrow e^{1/x} = -1 \Rightarrow \ln e^{1/x} = \ln(-1)$$

$\ln(-1)$ نامعین است، پس این تابع همیشه پیوسته است.

(۱)-۱۲۴

$$e^{2x} - 16 = 0 \Rightarrow e^{2x} = 16 \Rightarrow \ln e^{2x} = \ln 16 \Rightarrow 2x = \ln 16 \Rightarrow x = \ln \sqrt{16} \Rightarrow x = \ln 4$$

۱۲۵-(۳) تابع $f(x) = 1/x$ در تمام نقاط دامنه اش، $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$ ، پیوسته است.

۱۲۶-(۴) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(g(x)) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(g(x)) = 0 = f(g(0))$ پس گزینه های (۱) و (۳) صحیح است.

پس گزینه (۲) صحیح است. $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \pi \neq -\pi = \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x)$

۱۲۷-(۱) تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x - 10/x - 2 & x \neq 2 \\ 7 & x = 2 \end{cases}$ بازای هر x حقیقی پیوسته است زیرا:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 7 = f(2)$$

۱۲۸-(۴) زیرا داریم $g \circ f = g(f(x))$ ، اگر تابع در x_0 پیوسته باشد و تابع g در $f(x_0)$ پیوسته باشد، آنگاه تابع $g \circ f$ پیوسته است.

۱۲۹-(۲) زیرا $f(x) + g(x) = \begin{cases} 6x & x \geq 1 \\ 6 & x < 1 \end{cases}$ که این تابع در $x_0 = 1$ پیوسته است.

۱۳۰-(۱) می دانیم اگر تابع g در $c = x_0$ و تابع f در $g(c)$ پیوسته باشد، آنگاه تابع $f \circ g$ در $c = x_0$ پیوسته است.

۱۳۱-(۲)

$$3x^2 - 4x^2 - 7x = 0 \Rightarrow x(3x^2 - 4x - 7) = 0 \Rightarrow x = 0, x = -1, x = \frac{7}{4}$$

بنابراین تابع در $x = 0$ و $x = -1$ پیوسته است.

۱۳۲-(۳) می دانیم تابع f به معادله $f(x) = [x]$ در نقاط $x \in \mathbb{Z}$ حد ندارد و پیوسته هم نیست. برای اینکه این تابع در نقاط $x \in \mathbb{Z}$ پیوسته باشد باید کداری کنیم تا عمل $[x]$ از مسأله حذف شود، لذا پس از فاکتورگیری از $[x]$ ، ضریب آن را مساوی صفر قرار می دهیم:

$$f(x) = (a^2 - 3a + 2)[x] + 2x \Rightarrow a^2 - 3a + 2 = 0 \Rightarrow a = 1, 2$$

۱۳۳-(۳) با توجه به نمودار این تابع در نقطه $x_0 = 1$ پیوسته نیست ولی پیوستگی چپ دارد.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -1, f(1) = -1$$

۱۳۴-(۲) با توجه به نمودار این تابع در نقطه $x_0 = 1$ نه پیوستگی راست دارد و نه پیوستگی چپ.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2, \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2, f(1) = 1$$

۱۳۵-(۱)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \sqrt{2}, \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \sqrt{2}, f(0) = 1$$

بنابراین، این تابع در نقطه $x_0 = 0$ پیوسته نیست، نه پیوستگی راست دارد و نه پیوستگی چپ، ولی این تابع در نقطه $x_0 = 0$ حد دارد.

۱۳۶-(۴)

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3, x \leq 1 \Rightarrow D_f = \{x | x \geq 3, x \leq 1\} \\ x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \notin D_f \end{cases}$$

(۳)-۱۳۷

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{1/x} = 1, \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{1/x} = \infty$$

بنابراین منحنی دارای دو مجانب $x = 0$ و $y = 1$ می‌باشد.

(۴)-۱۳۸

$$x^5 + 32 \Rightarrow x^5 = (-2)^5 \Rightarrow x = -2 \quad \text{مجانب قائم}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^5 + 32} = 0 \Rightarrow y = 0 \quad \text{مجانب افقی}$$

(۲)-۱۳۹

$$\cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots$$

چون $0 \leq x \leq 2\pi$ است. فقط $x = \pi/2$ و $x = 3\pi/2$ مجانب‌های قائم می‌باشند.

(۳)-۱۴۰

$$2 + \cos = 0 \Rightarrow \cos x = -2 \quad \text{مجانب قائم ندارد}$$

(۲)-۱۴۱

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{5 + |x|} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{5 + x} = 1 \Rightarrow y = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{5 + |x|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{5 - x} = -1 \Rightarrow y = -1$$

(۱)-۱۴۲

$$y = mx + h, m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}}{x} = 1$$

(۲)-۱۴۳

$$x^2 + 2x - 1 \quad | \quad \frac{x}{x+2} \Rightarrow y = x + 2 \Rightarrow y - x - 2 = 0$$

$$\vdots$$

$$\frac{\quad}{-1}$$

(۱)-۱۴۴

$$x^2 + 3 \quad | \quad \frac{x-1}{x+1} \Rightarrow y = x + 1 \Rightarrow \text{عرض از مبدأ} = 1$$

$$\vdots$$

$$\frac{\quad}{4}$$

(۴)-۱۴۵

مجانب افقی ندارد $x \rightarrow +\infty \Rightarrow y \rightarrow +\infty + \infty \Rightarrow y \rightarrow +\infty$ اگر

میهم است $x \rightarrow -\infty \Rightarrow y \rightarrow -\infty + \infty$ اگر

رفع ابهام:

$$x \rightarrow -\infty \Rightarrow \sqrt{x^2 - 6x + 3} \sim -\sqrt{1} \left(x + \frac{6}{2} \right) \sim -(x + 3)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 4 - \sqrt{x^2 - 6x + 3}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 4 - x - 3) \Rightarrow y = 1$$

(۱)-۱۴۶

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x + \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x + \frac{x^2}{-x} \right) = 0 \Rightarrow y = 0 \quad \text{مجانِب افقی}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \frac{x^2}{x} \right) = 2x \Rightarrow y = 2x \quad \text{مجانِب مایل}$$

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \quad \text{مجانِب‌های قائم}$$

۱۴۷- (۲) عبارت $x^2 - 2x + 4$ ریشه حقیقی ندارد و بنابراین مجانب قائم ندارد، از طرفی:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{x - 1}{x^2 - 2x + 4} \right) = 3 + 0 \Rightarrow y = 3 \quad \text{مجانِب افقی}$$

(۴)-۱۴۸

$$\left(y = \frac{x^2 + x}{\sqrt{x^2 + 1}}, y = ax + b \right) \Rightarrow ax + b = \frac{x^2 + x}{\sqrt{x^2 + 1}} \Rightarrow a^2 x^2 + 2abx + b^2 = \frac{x^2 + 2x^2 + x^2}{x^2 + 1}$$

$$\Rightarrow (a^2 - 1)x^2 + (2ab - 2)x^2 + (a^2 + b^2 - 1)x^2 + 2ab + b^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a^2 - 1 = 0 \Rightarrow a = \pm 1 \Rightarrow y = x + 1 \\ 2ab - 2 = 0 \Rightarrow b = \pm 1 \Rightarrow y = -x - 1 \end{cases}$$

هیچ‌کدام از معادلات فوق قابل قبول نیست، زیرا یک دسته از بی‌نهایت‌های تابع در هیچ‌کدام از آن‌ها صدق نمی‌کند.

(۱)-۱۴۹

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \arccos \frac{1 - x^2}{1 + x^2} = \arccos(-1) = \pi \Rightarrow y = \pi$$

(۱)-۱۵۰

$$\text{مجانِب افقی } y = 1 \Rightarrow \frac{1}{b} = 1 \Rightarrow b = 1$$

$$(3, 2): 2 = \frac{3 + a}{2b + 2} \Rightarrow 6b + 4 = 3 + a \Rightarrow a = 7$$

(۲)-۱۵۱

$$x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1, x = -2 \quad \text{مجانِب‌های قائم}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2 + x - 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 = 1 \quad \text{مجانِب افقی ندارد}$$

$$x^2 \mid x^2 + x - 2 \Rightarrow y = x - 1 \quad \text{مجانِب مایل}$$

⋮

$$\frac{2}{3x - 2}$$

(۳)-۱۵۲

$$x > 0 \Rightarrow y = \frac{x}{x-1} \Rightarrow \begin{cases} \text{مجانِب قائم} : x = 1 \\ \text{مجانِب افقی} : y = 1 \end{cases}$$

$$x < 0 \Rightarrow y = \frac{-x}{x-1} \Rightarrow \begin{cases} \text{مجانِب قائم} : x = 1 \\ \text{مجانِب افقی} : y = -1 \end{cases}$$

(۲)-۱۵۳

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{2x^2 - 1} \Rightarrow y = \infty \quad \text{مجانِب افقی ندارد}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x + \frac{2x}{x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x - 2x}{x-1} \Rightarrow y = \infty \quad \text{مجانِب افقی ندارد}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|x|}{x} = \pm 1 \Rightarrow y = \pm 1 \quad \text{مجانِب افقی}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - \sqrt{x}) \Rightarrow y = \infty \quad \text{مجانِب افقی ندارد}$$

۱۵۴-(۳) تابع f دارای $(n-1)$ مجانب قائم در نقاط $2, 3, 4, \dots, n$ می‌باشد و همچنین دارای مجانب افقی به معادله $y = 0$ می‌باشد. بنابراین مجموعاً دارای n مجانب است.

(۴)-۱۵۵

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y = \frac{x-2}{ax-3} \Rightarrow ax-3=0 \Rightarrow x = \frac{3}{a} \Rightarrow \frac{1}{y} = \frac{3}{a} \Rightarrow a=6$$

پاسخ تشریحی سؤالات تستی فصل ۵

(۲)-۱

$$y = (x^2 + 1)(x^2 + 1)(x^2 - 1) = (x^2 + 1)(x^2 - 1) = x^4 - 1 \Rightarrow y' = 4x^3$$

۲-(۳) با فرض $g(x) = (1-x)(2-x) \dots (10-x)$ خواهیم داشت:

$$f(x) = x.g(x) \Rightarrow f'(x) = g(x) + x.g'(x) \Rightarrow f'(0) = g(0) + 0 \times g'(0)$$

$$\Rightarrow f'(0) = g(0) \Rightarrow f'(0) = (1-0)(2-0) \dots (10-0) = 10!$$

(۴)-۳

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+m}}, f'(1) = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{1+m}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{1+m} = 1 \Rightarrow m=0$$

(۱)-۴

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2} \left(-\sin \frac{x}{2} \right)}{1 + \cos^2 \frac{x}{2}} \Rightarrow f'(\frac{\pi}{2}) = \frac{-\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = -\frac{1}{3}$$

(۱)-۵

$$f(x) + g(x) = \log(\sqrt{x^2+4} - x) + \log(\sqrt{x^2+4} + x) = \log(\sqrt{x^2+4} - x)(\sqrt{x^2+4} + x)$$

$$= \log(x^2+4 - x^2) = \log 4 \Rightarrow f(x) + g(x) = \log 4 \Rightarrow f'(x) + g'(x) = 0 \Rightarrow f'(x) = -g'(x)$$

(۳)-۶

$$y'_x = y'_u \times u'_v \times v'_x \Rightarrow y'_x = \frac{1}{\sqrt{u}} \cdot 2v \cdot (-2x^{-2}) = -2x^{-2}$$

(۱)-۷

$$g(x) = f(mx) \Rightarrow g'(x) = mf'(mx) \Rightarrow g'(\circ) = mf'(\circ) \Rightarrow f'(\circ) = \frac{7}{m}$$

(۲)-۸

$$y' = -\frac{7}{x^2} f\left(\frac{7}{x}\right) \Rightarrow y'_{(-7)} = -\frac{7}{7} f'\left(-\frac{7}{7}\right) = \frac{-1}{7} \times 7 = -1$$

(۴)-۹

$$f'_+(x) = 3 \Rightarrow f'_+(\circ) = 3, f'_-(x) = 2x - 1 \Rightarrow f'_-(\circ) = -1 \Rightarrow f'_+(\circ) \neq f'_-(\circ)$$

(۱)-۱۰

$$f'(x) = (4 - f'(x)) \cos(2x - f(x)) \Rightarrow f'(\circ) = (4 - f'(\circ)) \cos(\circ - f(\circ)) \Rightarrow f'(\circ) = 4 - f'(\circ) \Rightarrow f'(\circ) = 2$$

(۳)-۱۱

$$y^1 = \sin^1 \alpha - 7 \sin \alpha \cos \alpha + 7 \cos^1 \alpha$$

$$y' = \cos \alpha + 7 \sin \alpha \Rightarrow y'^1 = \cos^1 \alpha + 7 \sin \alpha \cos \alpha + 7 \sin^1 \alpha$$

$$y^1 + y'^1 = 7(\sin^1 \alpha + \cos^1 \alpha) + \sin^1 \alpha + \cos^1 \alpha = 7 + 1 = 8$$

(۲)-۱۲

$$y = f(x^7) \Rightarrow y' = 7x f'(x^7) = 7x(2x^7 - 2) = 14x^8 - 14x$$

(۳)-۱۳ به‌طورکلی مشتق تابع جزء صحیح به‌صورت مقابل است:

$$[f(x)]' = \begin{cases} \circ & n < f(x) < n+1, n \in Z \\ \text{وجود ندارد} & f(x) = n, n \in Z \end{cases}$$

(۲)-۱۴

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{1+x^2}{\text{Arc tan } x}} \Rightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=1} = \frac{1}{\frac{\pi}{4}} = \frac{4}{\pi}$$

(۲)-۱۵

$$xy = 1 \Rightarrow y = x^{-1} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -x^{-2} \Rightarrow \frac{d^2 y}{dx^2} = 2x^{-3}$$

$$xy = 1 \Rightarrow x = y^{-1} \Rightarrow \frac{dx}{dy} = -y^{-2} \Rightarrow \frac{d^2 x}{dy^2} = 2y^{-3}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} \cdot \frac{d^2 x}{dy^2} = 2x^{-3} \cdot 2y^{-3} = 4(xy)^{-3} = 4(1)^{-3} = 4$$

(۱)-۱۶

$$e^y - xe^x = \circ \Rightarrow e^y \frac{dy}{dx} - e^x - xe^x = \circ \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{e^x(x+1)}{e^y}$$

$$e^y = xe^x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x+1}{x} \Rightarrow \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{x - (x+1)}{x^2} = -\frac{1}{x^2} = -x^{-2}$$

(۴)-۱۷

$$h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) \Rightarrow h'(\sqrt{2}) = f'(g(\sqrt{2})) \cdot g'(\sqrt{2}), g'(x) = 2x - 2 \Rightarrow g'(\sqrt{2}) = 2$$

$$h'(\sqrt{2}) = 2f'(2) = 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$$

(۱)-۱۸

$$f'(x) = 2(|x+1| - |x|) \left(\frac{x+1}{\sqrt{(x+1)^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2}} \right) \Rightarrow f'(1) = 2(2-1)(1-1) = 0$$

(۱)-۱۹

$$y' = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin h^{\frac{x}{\sqrt{2}}} \cdot \cos h^{\frac{x}{\sqrt{2}}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin h^{\frac{x}{\sqrt{2}}} \cdot \cos h^{\frac{x}{\sqrt{2}}} \times \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$y' = \sin h^{\frac{x}{\sqrt{2}}} \cdot \cos h^{\frac{x}{\sqrt{2}}} \left(1 + \sin h^{\frac{x}{\sqrt{2}}} \right) = \sin h^{\frac{x}{\sqrt{2}}} \cdot \cos h^{\frac{x}{\sqrt{2}}}$$

$$\text{داریم: } \sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)]$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\sin(\cos^{\frac{1}{2}} x + \sin^{\frac{1}{2}} x) + \sin(\cos^{\frac{1}{2}} x - \sin^{\frac{1}{2}} x)] = \frac{1}{\sqrt{2}} [\sin(1) + \sin(\cos^{\frac{1}{2}} x)]$$

$$f'(x) = -\sin^{\frac{1}{2}} x \cos(\cos^{\frac{1}{2}} x)$$

(۴)-۲۱

$$y = e^x \operatorname{Arctan} e^x - \frac{1}{\sqrt{2}} \ln(1 + e^{\sqrt{2}x}) \Rightarrow y' = e^x \cdot \frac{e^x}{1 + e^{\sqrt{2}x}} + e^x \operatorname{Arctan} e^x - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2} e^{\sqrt{2}x}}{1 + e^{\sqrt{2}x}}$$

$$y' = \frac{e^{\sqrt{2}x}}{1 + e^{\sqrt{2}x}} + e^x \operatorname{Arctan} e^x - \frac{e^{\sqrt{2}x}}{1 + e^{\sqrt{2}x}} \Rightarrow y' = e^x \operatorname{Arctan} e^x$$

(۲)-۲۲

$$f \circ f = x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f \circ f \circ f = x^{\frac{1}{4}} \Rightarrow (f \circ f \circ f)'(x) = \frac{1}{4} x^{-\frac{3}{4}}$$

(۳)-۲۳

$$y'_{(\sqrt{x})} = \frac{(\operatorname{Arcsin} x^{\frac{1}{2}})'}{(\sqrt{x})'} = \frac{\frac{\frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{1-x^{\frac{1}{2}}}}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \frac{\frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} \sqrt{x}}{\sqrt{1-x^{\frac{1}{2}}}}$$

(۲)-۲۴

$$x'_{xy} = -\frac{x \cos xy - x \sin xy}{y \cos xy - y \sin xy} = -\frac{x(\cos xy - \sin xy)}{y(\cos xy - \sin xy)} = -\frac{x}{y}$$

(۴)-۲۵

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin^{\frac{1}{2}} x \cdot \cos^{\frac{1}{2}} x = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin^{\frac{1}{2}} x \Rightarrow y' = \cos^{\frac{1}{2}} x \Rightarrow y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos^{\frac{1}{2}} \frac{\pi}{4} = 0$$

(۲)-۲۶

$$y' = \sqrt{2} e^{\sqrt{2}x} \Rightarrow y'' = \sqrt{2} e^{\sqrt{2}x} \Rightarrow y''' = \sqrt{2} e^{\sqrt{2}x} \Rightarrow \dots \Rightarrow y^{(n)} = \sqrt{2} e^{\sqrt{2}x} \Rightarrow y^{(n)}_{(x)} = \sqrt{2} e^{\sqrt{2}x}$$

۲۷-(۲) به علت وجود عامل $(x + ۱۰)$ در تابع، مقدار تابع به ازای $x = -۱۰$ برابر صفر می شود، لذا:

$$\begin{aligned} f(x) &= (x + ۱۰)[x(x + ۱)(x + ۲) \cdots (x + ۹)(x + ۱۱) \cdots (x + ۲۰)] \\ f'(x) &= ۱ \times [x(x + ۱)(x + ۲) \cdots (x + ۹)(x + ۱۱) \cdots (x + ۲۰)] \\ &\quad + [x(x + ۱) \cdots (x + ۹)(x + ۱۱) \cdots (x + ۲۰)]'(x + ۱۰) \\ f'(-۱۰) &= (-۱۰)(-۹)(-۸) \cdots (-۱)(۱)(۲) \cdots (۱۰) + ۰ = ۱۰ \times ۹ \times ۸ \times \cdots \times \\ &\quad \times ۱ \times ۱ \times ۲ \times \cdots \times ۱۰ = ۱۰! ۱۰! \end{aligned}$$

(۲)-۲۸

$$\begin{aligned} y^r x^r + y^r \left(\frac{dy}{dx} \right) &= 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x^r}{y^r} \Rightarrow \frac{d^r y}{dx^r} = -\frac{y^r y^r - y^r x^r \left(\frac{dy}{dx} \right)}{y^{2r}} \\ &= -\frac{y^r y^r - y^r x^r \left(-\frac{x^r}{y^r} \right)}{y^{2r}} = -\frac{y^r y^r + \frac{y^r x^r}{y^r}}{y^{2r}} = -\frac{y^r (y^r + x^r)}{y^{2r}} = -\frac{y^r}{y^r} \end{aligned}$$

(۲)-۲۹

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{y \sin t \cos t}{-y \cos t \sin t} = -۱ \Rightarrow \frac{d^r y}{dx^r} = 0$$

(۱)-۳۰

$$y' = y^r e^{x^r-۱} + y^r x^r e^{x^r-۱} + y^r e^{x^r-۱} + e^{x-۱} \Rightarrow y'_{(۱)} = ۱۰$$

(۱)-۳۱

$$\cos x - e^y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{-\sin x}{-e^y} = -\frac{\sin x}{\cos x} = -\tan x$$

(۲)-۳۲

$$y^{(\Delta)} = \frac{(-۱)^{\Delta-۱} \Delta! (-۱)}{(x+۱)^{\Delta+۱}} = \frac{(-۱)^{\Delta} \Delta!}{(x+۱)^{\Delta}} = \frac{-۱ ۲۰}{(x+۱)^{\Delta}}$$

(۱)-۳۳

$$y = \ln e^x + \ln \left(\frac{x-۱}{x+۱} \right)^{1/2} = x \ln e + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x-۱}{x+۱} \right) = x + \frac{1}{2} [(\ln(x-۱) - \ln(x+۱))]$$

$$y' = ۱ + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x-۱} - \frac{1}{x+۱} \right) = ۱ + \frac{1}{2} \left(\frac{2}{x^2-۱} \right) = ۱ + \frac{1}{x^2-۱} = \frac{x^2}{x^2-۱} \Rightarrow y'_{(-۱)} = 0$$

(۳)-۳۴

$$y = \sin \Delta x \cos y x = \frac{1}{2} [\sin(\Delta x + y x) + \sin(\Delta x - y x)] = \frac{1}{2} (\sin y x + \sin y x)$$

$$y^{(n)} = \frac{1}{2} \left[y^n \sin \left(y x + \frac{n\pi}{2} \right) + y^n \sin \left(y x + \frac{n\pi}{2} \right) \right]$$

$$y^{(r)} = \frac{1}{2} [y^r \sin(y x + ۱۰\pi) + y^r \sin(y x + ۱۰\pi)] = \frac{1}{2} [y^r (\sin y x) + y^r (\sin y x)]$$

(۳)-۳۵

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \left(e^u \ln u + \frac{e^u}{u} \right) \left(\frac{-۱-t-۱+t}{(۱+t)^2} \right) (e^x + x e^x)$$

$$x = 0 \Rightarrow t = 0 \Rightarrow u = ۱ \Rightarrow y = 0, \quad \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = e \times (-۲) \times ۱ = -۲e$$

(۱)-۳۶

$$f'_+(x) = 3 \Rightarrow f'_+(2) = 3, f'_-(x) = 2 \Rightarrow f'_-(3) = 2 \Rightarrow f'_+(3) \neq f'_-(3)$$

(۴)-۳۷

$$f'(x) = m(\sin x)^{m-1}(\cos x \cos mx - \sin x \sin mx) = m(\sin x)^{m-1} \cos(m+x)x$$

(۱)-۳۸

$$g'(x) = 2f'(x) \cdot f(x) - \frac{f'(x)}{f'(x)} \Rightarrow g'(a) = 2 \times 2 \times \frac{1}{2} - \frac{2}{\frac{1}{2}} = -6$$

(۲)-۳۹

$$y = 0 \Rightarrow x^0 = 1 \Rightarrow x = 1, x' = -\frac{xy^x + x^y}{\Delta x^x + yxy} \Rightarrow x'_{(1)} = -\frac{1}{\Delta}$$

(۱)-۴۰

$$f(x) = |x|^r = (\sqrt{x})^r = (x^r)^{r/2} \Rightarrow f'(x) = \frac{r}{2} (rx)(x^r)^{1/2} = rx(x^r)^{1/2}$$

$$f'(x) = rx|x| \Rightarrow D_{f'(x)} = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$$

(۴)-۴۱

$$f(x) = \begin{cases} x^r & x \geq 0 \\ -x^r & x < 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} rx^r & x \geq 0 \\ -rx^r & x < 0 \end{cases} \Rightarrow f''(x) = \begin{cases} rx & x \geq 0 \\ -rx & x < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^r - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^r = 0 \\ f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x^r - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} -x^r = 0 \end{cases} \Rightarrow f'_+(0) = f'_-(0) = f'(0) = 0$$

$$\begin{cases} f''_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{rx^r - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} rx = 0 \\ f''_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-rx^r - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} -rx = 0 \end{cases} \Rightarrow f''_+(0) = f''_-(0) = f''(0) = 0$$

(۲)-۴۲

$$f'_-(0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\operatorname{sgn}(h) - \operatorname{sgn}(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \left(-\frac{1}{h} \right) = +\infty$$

(۲)-۴۳

$$f(x) = \operatorname{Arctan}(\tan x) = \begin{cases} x & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ \pi - x & \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(x) = 1 \\ f'(x) = -1 \end{cases}$$

(۴)-۴۴

$$f'(x) = \frac{e}{x \ln e} = \frac{1}{x \ln e} = (x \ln e)^{-1} \Rightarrow f''(x) = -(\ln e)(x \ln e)^{-2}$$

$$f''(1) = -(\ln e)(\ln e)^{-2} = -(\ln e)^{-1} = -\frac{1}{\ln e}$$

(۴)-۴۵

$$y = \cos h^r x + \sin h^r x \Rightarrow y' = r \cos hx \sin hx + r \sin hx \cos hx$$

$$y' = r \sin hx \cos hx = r \times r \sin hx \cos hx = r \sin h^2 x$$

(۳)-۴۶

$$f'(x) = re^x + rex^e \Rightarrow f''(x) = re^x + re^x + rex^e \Rightarrow f''(0) = r$$

(۳)-۴۷

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{a(\lambda + \sin t)}{a(\lambda - \cos t)} = \cot \frac{t}{r}$$

(۲)-۴۸

$$y' = be^{a+bx} \Rightarrow y'' = b^r e^{a+bx} \Rightarrow y''' = b^r e^{a+bx} \Rightarrow \dots \Rightarrow y^{(n)} = b^r e^{a+bx}$$

(۱)-۴۹

$$y' = r \times r^{rx} \ln r \Rightarrow y'' = r^r \times r^{rx} (\ln r)^r \Rightarrow \dots \Rightarrow y^{(\delta)} = r^\delta \times r^{rx} (\ln r)^\delta = (r \ln r)^\delta r^{rx}$$

(۳)-۵۰

$$y = e^{x^x} \Rightarrow \ln y = x \ln x \Rightarrow \frac{y'}{y} = \ln x + 1 \Rightarrow y' = (\ln x + 1)e^{x^x} \Rightarrow y'_{(1)} = (0 + 1)e = e$$

۵۱- (۴) از دو طرف معادله مفروض نسبت به x به طور ضمنی مشتق می‌گیریم:

$$\frac{\lambda}{x+y} \left(\lambda + \frac{dy}{dx} \right) = \frac{\lambda}{\lambda + \frac{x^r}{y^r}} \cdot \frac{y-x \frac{dy}{dx}}{y^r} \Rightarrow \frac{\lambda + \frac{dy}{dx}}{x+y} = \frac{y-x \frac{dy}{dx}}{y^r + x^r} \Rightarrow$$

$$y^r + x^r + (y^r + x^r) \frac{dy}{dx} = xy + y^r - (x^r + xy) \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{xy - x^r}{rx^r + xy + y^r}$$

(۳)-۵۲

$$x \rightarrow -\frac{\lambda}{r} \Rightarrow f(x) = -rx - \lambda + x - \lambda = -x - r \Rightarrow f' \left(-\frac{\lambda}{r} \right) = -\lambda$$

(۲)-۵۳

$$f'(x) = x^{\sin hx} \left(\cos hx \cdot \ln x + \sin hx \cdot \frac{\lambda}{x} \right) = x^{\sin hx} \left(\frac{x \cos hx \cdot \ln x + \sin hx}{x} \right)$$

$$f'(x) = \frac{x^{\sin hx}}{x} (x \cos hx \cdot \ln x + \sin hx) = x^{\sin hx-1} (x \cos hx \cdot \ln x + \sin hx)$$

(۱)-۵۴

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\lambda}{x} \sin h(\ln x) + \frac{\lambda}{x} \cos h(\ln x)$$

$$\frac{d^r y}{dx^r} = -\frac{\lambda}{x^r} \sin h(\ln x) + \frac{\lambda}{x^r} \cos h(\ln x) - \frac{\lambda}{x^r} \cos h(\ln x) + \frac{\lambda}{x^r} \sin h(\ln x) = 0$$

(۳)-۵۵

$$\frac{dy}{dx} = \cos h^{-1}x + x \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} - \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \cos h^{-1}x$$

(۳)-۵۶ داریم $g(x) = f(f(x))$ بنابراین $f'(x) \cdot g'(x) = f'(f(x))$ خواهیم داشت:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x^2}}{\left(\frac{x+1}{x}\right)^2} = (x+1)^{-2}, \quad g'(x) = (f(x)+1)^{-2} \cdot (x+1)^{-2} \Rightarrow$$

$$g'(x) = \left(\frac{\frac{1}{1+\frac{1}{x}} + 1}{1 + \frac{1}{x}}\right)^{-2} \cdot (x+1)^{-2} = \left(\frac{x}{x+1} + 1\right)^{-2} \cdot (x+1)^{-2} = \left(\frac{2x+1}{x+1}\right)^{-2} \cdot (x+1)^{-2}$$

$$g'(x) = (2x+1)^{-2}$$

(۱)-۵۷ پیوستگی تابع در نقطه $x=0$ را بررسی می‌کنیم، $f(0)=0$ و $\lim_{x \rightarrow 0} x \cos x = 0$ بنابراین تابع در نقطه $x=0$ پیوسته است، مشتق‌پذیری تابع در این نقطه را به‌وسیله فرمول

$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ بررسی می‌کنیم:

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - 0}{x} = 1$$

(۲)-۵۸

$$y' = (\tan x)^{\cos x} \left(-\sin x \ln |\tan x| + \frac{1}{\sin x} \right) \Rightarrow y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \times \left(0 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

(۲)-۵۹

$$\left(\frac{g}{f}\right)'(2) = \frac{g'(2)f(2) - g(2)f'(2)}{f^2(2)} = \frac{(2)(3) - (-5)(-1)}{3^2} = \frac{1}{9}$$

(۴)-۶۰

$$y^2 = \tan x + \sqrt{\tan x + \sqrt{\tan x + \dots}} \Rightarrow y^2 = \tan x + y \Rightarrow y^2 - \tan x - y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{-(1 + \tan^2 x)}{2y - 1} = \frac{1 + \tan^2 x}{2y - 1}$$

(۳)-۶۱ تابع $[x]$ در نقاطی که x عدد صحیح است گسسته بوده و مشتق‌پذیر نیست و در نقاط دیگر مشتق آن صفر است، بنابراین:

$$f'(x) = -2\pi[x] \cos \pi x \cdot \sin \pi x \Rightarrow f'(x) = -\pi[x] \sin 2\pi x$$

(۱)-۶۲

$$u = \cos \sin x \Rightarrow f(x) = \sin u \Rightarrow f'(x) = u' \cos u \Rightarrow f'(x) = u' \cos \cos \sin x$$

برای محاسبه u' فرض می‌کنیم $v = \sin x$

$$u = \cos v \Rightarrow u' = -v' \sin v = -\cos x (\sin \sin x)$$

$$f'(x) = -\cos x (\sin \sin x) (\cos \cos \sin x)$$

(۱)-۶۳

$$f(x) = |(x-1)^2(x+2)| = (x-1)^2|x+2|$$

چون $x_0 = 1$ جواب داخل قدرمطلق نیست، پس تابع در $x_0 = 1$ مشتق‌پذیر است.

(۲)-۶۴

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \cos \frac{1}{x} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \cos \frac{1}{x} = \cos(0)$$

عددی نامعلوم در فاصله $[-1, 1]$

(۳)-۶۵ با توجه به گزینه‌های داده شده $f'(x)$ از درجه دوم است، پس تابع f از درجه سوم است.

$$f(x) = ax^3 \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 \Rightarrow f''(x) = 6ax$$

$$f(x) = f'(x) \cdot f''(x) \Rightarrow ax^3 = 3ax^2 \cdot 6ax \Rightarrow ax^3 = 18a^2x^3 \Rightarrow a = \frac{1}{18}$$

$$f'(x) = 3ax^2 = 3 \times \frac{1}{18}x^2 = \frac{1}{6}x^2$$

(۴)-۶۶ با توجه به فرمول $y = k/(x-a)^n \Rightarrow y' = -kn/(x-a)^{n+1}$ داریم:

$$y = \frac{(x-2)^2 - 4}{(x-2)^2} = 1 - \frac{4}{(x-2)^2} \Rightarrow y' = \frac{8}{(x-2)^3} \Rightarrow y'' = \frac{-24}{(x-2)^4} \Rightarrow y''' = \frac{96}{(x-2)^5}$$

(۲)-۶۷

$$f'(x) = \lambda x, g'(x) = 1, (f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = \lambda(x-1)$$

(۲)-۶۸

$$\frac{dx}{dy} = (-2y + 4)e^{-y^2 + 4y + 2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{e^{y^2 - 4y - 2}}{4 - 2y}$$

(۲)-۶۹

(۲)-۷۰

$$y = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases} \Rightarrow y' = \begin{cases} 2x & x \geq 0 \\ -2x & x < 0 \end{cases}$$

(۱)-۷۱

$$f(x) = \begin{cases} 1-x & x < 1 \\ (1-x)(2-x) & 1 \leq x \leq 2 \\ x-2 & x > 2 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} -1 & x < 1 \\ 2x-3 & 1 \leq x \leq 2 \\ 1 & x > 2 \end{cases}$$

(۱)-۷۲ در حالت کلی داریم $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+mh) - f(x-nh)}{h} = (m+n)f'(x)$ به شرطی که این حد موجود باشد.

در نتیجه حد داده شده برابر است با $\Delta f'(\pi/4)$:

$$f'(x) = \Delta(1 + \tan^2 x) \tan^2 x \Rightarrow \Delta f' \left(\frac{\pi}{4} \right) = 2\Delta(1+1)(1) = \Delta$$

(۲)-۷۳

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = f'(2) = \frac{2}{3}, \left[f \left(\frac{1}{x} \right) \right]' = -\frac{1}{x^2} f' \left(\frac{1}{x} \right) \xrightarrow{x=1/2} -4f'(2) = -4 \left(\frac{2}{3} \right) = -\frac{8}{3}$$

۷۴- (۲) مشتق راست در $x = ۳$:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = f'_+(3)$$

$$f(x) = 9 - x^2 \Rightarrow f'(x) = -2x \Rightarrow f'_+(3) = -6$$

۷۵- (۴)

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow m^-} (x^r) = \lim_{x \rightarrow m^+} (ax + b) \Rightarrow m^r = am + b \\ f'_-(x^r) = f'_+(ax + b) \xrightarrow{\text{در نقطه } x=m} 2m = a \end{cases} \Rightarrow b = -m^r$$

۷۶- (۳) برای آنکه $f'(1)$ موجود باشد، بایستی $f'_+(1) = f'_-(1)$ پس:

$$f'_+(1) = a, f'_-(1) = 2 \Rightarrow a = 2$$

اگر $f'(1)$ موجود باشد، آنگاه f در ۱ پیوسته است، پس:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} (ax + b) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2) \Rightarrow a + b = 1 \Rightarrow b = -1$$

۷۷- (۲) اولاً: تابع f و تابع f' باید در $x = 0$ پیوسته باشند.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = a, \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1 \Rightarrow a = -1$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x^2 - 2x & x \geq 0 \\ 2bx + c & x < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = c \end{cases} \Rightarrow c = 0$$

ثانیاً: تابع f' باید در $x = 0$ مشتق‌پذیر باشد.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x^2 - 2x}{x} = -2 = f''_+(0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2bx + c - c}{x} = 2b = f''_-(0) \Rightarrow 2b = -2 \Rightarrow b = -1$$

$$a + b + c = -1 - 1 + 0 = -2$$

۷۸- (۴)

$$f'_+(1) = 2 \times 1 = 2, f'_-(1) = 2 \Rightarrow f'(1) = f'_+(1) = f'_-(1) = 2$$

$$مماس بر منحنی یک تابع فقط در نقطه عطف ($y'' = 0$) از منحنی عبور می‌کند:$$

$$-\frac{1}{x} \Rightarrow y - 2 = -\frac{1}{x}(x - 1) \Rightarrow y = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x}$$

۷۹- (۳) می‌دانیم خط مماس بر منحنی یک تابع فقط در نقطه عطف ($y'' = 0$) از منحنی عبور می‌کند:

$$y' = 3mx^2 - 6x + 1 \Rightarrow y'' = 6mx - 6 = 0 \xrightarrow{x=1} 12m - 6 = 0 \Rightarrow m = \frac{1}{2}$$

۸۰- (۱)

$$y' = -\frac{2(y-x) - 2}{2(y-x)} \Rightarrow y' = \frac{2(2-6) + 2}{2(2-6)} = \frac{2}{4} \Rightarrow y - 2 = \frac{2}{4}(x - 6) \Rightarrow 4y - 2x + 10 = 0$$

(۳)-۸۱

$$\text{محور عرضها: } x = 0 \Rightarrow y = \ln 1 \Rightarrow y = 0, y' = \frac{1}{x-1} \Rightarrow y'(1) = 1$$

$$y - 0 = 1(x - 1) \Rightarrow y = x - 1 \xrightarrow[\text{محور عرضها}]{x=0} y = -1$$

(۲)-۸۲

$$y' = -3 \sin x + 2 \cos x \Rightarrow y'_{(0)} = -3 \sin 0 + 2 \cos 0 = 2 \Rightarrow \text{ضریب زاویه خط قائم} = -1/2$$

$$y - 2 = -\frac{1}{2}(x - 0) \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + 2$$

(۴)-۸۳

$$Y'_x = \frac{y'_\theta}{x'_\theta} = \frac{-\sin \theta}{-2 \cos \theta} = \frac{1}{2} \tan \theta = \frac{1}{2} \tan \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{ضریب زاویه خط قائم} = -2$$

(۲)-۸۴

$$y' = f'(x) = \sin hx = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \Rightarrow f'(0) = 0$$

$$x = 0 \Rightarrow y = \frac{1+1}{2} = 1 \Rightarrow y - 1 = 0(x - 0) \Rightarrow y = 1$$

(۳)-۸۵

$$\text{محور عرضها: } x = 0 \Rightarrow (y - 2)^2 = 9 \Rightarrow y = 5, -1 \Rightarrow (0, 5)$$

$$y'_x = -\frac{2(x-1)}{2(y-2)} \xrightarrow{(0,5)} y' = \frac{1}{2(5-2)} = \frac{1}{12} \Rightarrow$$

$$\text{ضریب زاویه خط قائم} = -12 \Rightarrow y = -12x + 5$$

(۱)-۸۶

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-3}{2} = 1 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow \text{نقطه عطف } (1, 2)$$

$$y'_x = 3x^2 - 6x + 5 \Rightarrow y'_{(1)} = 3 - 6 + 5 = 2 \Rightarrow y - 2 = 2(x - 1) \Rightarrow y = 2x$$

۸۷- (۴) خط مماس در نقطه min تابع رسم شده است که موازی محور x هاست، $y' = 0 \Rightarrow 2x + 4 = 0 \Rightarrow x = -2$

(۱)-۸۸

$$A \text{ در نقطه } y = 0 \Rightarrow 0 = \log_7 x \Rightarrow x = 7^0 = 1 \Rightarrow A(1, 0)$$

$$y'_x = \frac{1}{x \ln 7} \Rightarrow y'_{(1)} = \frac{1}{\ln 7} \Rightarrow y - 0 = \frac{1}{\ln 7}(x - 1) \Rightarrow y = \frac{x-1}{\ln 7}$$

(۳)-۸۹

$$y' = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow y'_{(0)} = 1, x = 0 \Rightarrow y = 0, y - 0 = 1(x - 0) \Rightarrow y = x$$

(۳)-۹۰

$$y' = 1 - \frac{\lambda}{x^2} = \frac{x^2 - \lambda}{x^2} = \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}{x^2} \geq 0 \Rightarrow x \geq 2 \text{ یا } x < 0$$

(۴)-۹۱

$$y' = 2x^2 - 6x = 0 \Rightarrow 2x(x - 3) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 3$$

چون $x = 1$ بین دو ریشه فوق است. پس y' در همسایگی ۱ منفی است، لذا درست چپ و راست آن تابع نزولی است.

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
y'		$+$	$-$	$+$

(۱)-۹۲

$$y' = 2^{x-1} \cdot \ln 2 \cdot 2^{x-1} > 0 \Rightarrow y' > 0$$

(۱)-۹۳

$$y' = \frac{1 \cdot a}{(x + \lambda a)^2} < 0 \Rightarrow 1 \cdot a < 0 \Rightarrow a < 0$$

(۱)-۹۴

$$y' = 3mx^2 - 6x - 1 = 0, x' + x'' = -\frac{b}{a} \Rightarrow \frac{6}{3m} = 1 \Rightarrow m = 1$$

۹۵-(۴) باید معادله حاصل از تلاقی خط $y = 3$ و منحنی $y = ax^2 + 6x$ دارای ریشه مضاعف باشد:

$$ax^2 + 6x = 3 \Rightarrow ax^2 + 6x - 3 = 0, \Delta' = 0 \Rightarrow 9 + 3a = 0 \Rightarrow a = -3$$

(۲)-۹۶

$$y' = \ln^2 x + 2 \ln x = 0 \Rightarrow \ln x (\ln x + 2) = 0 \Rightarrow \ln x = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$\ln x + 2 = 0 \Rightarrow \ln x = -2 \Rightarrow x = e^{-2}, y'' = \frac{2}{x} \ln x + \frac{2}{x} \Rightarrow y''(1) = 0 + 2 > 0$$

(۲)-۹۷

$$y' = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = e^{-x}(2x - x^2) = 0 \Rightarrow e^{-x} > 0, x = 0, x = 2$$

$$y'' = 2e^{-x} - 2xe^{-x} - (2xe^{-x} - x^2e^{-x}) = 0 \Rightarrow y''(1) > 0 \Rightarrow \min(0, 0)$$

$$y''(2) < 0 \Rightarrow \max(2, 2e^{-2})$$

(۲)-۹۸

$$f'(x) = -\frac{9}{x^2} + \frac{2x}{9} = \frac{2x^3 - 81}{9x^2} = 0 \Rightarrow 2x^3 - 81 = 0 \Rightarrow x = \frac{3\sqrt[3]{12}}{2}$$

$$f''(x) = \frac{18}{x^3} + \frac{2}{9} \xrightarrow[\text{نقطه مشتق}]{\text{بازی طرف}} f''(x) > 0 \Rightarrow \text{نوع نقطه می‌نیم است}$$

(۲)-۹۹

$$y' = 2e^x + 2xe^x = 0 \Rightarrow 2e^x(1 + x) = 0 \Rightarrow 2e^x > 0, 1 + x = 0 \Rightarrow x = -1$$

$$y'' = 2e^x + 2xe^x \Rightarrow y''(-1) > 0 \Rightarrow \min\left(-1, -\frac{2}{e}\right)$$

(۴)-۱۰۰

$$y' = \frac{-x^2 + 1 + 2x^2}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^2 + 1}{(x^2 - 1)^2} \Rightarrow y' > 0 \Rightarrow \text{تابع همواره صعودی و فاقد اکسترمم}$$

(۳)-۱۰۱

$$f'(x) = \frac{m - x^2}{(x^2 + m)^2} = 0 \Rightarrow m - x^2 = 0 \Rightarrow m - (\sqrt{2})^2 = 0 \Rightarrow m = 2$$

نکته: (۱)-۱۰۲: در تابع $f(x) = \lambda(x-a)^n + b$

الف) اگر $n = 2k$ و $\lambda > 0$ ، آنگاه $M(a, b)$ نقطه می نیمم تابع است.

ب) اگر $n = 2k$ و $\lambda < 0$ ، آنگاه $M(a, b)$ نقطه ماکزیمم تابع است.

ج) اگر $n = 2k + 1$ ، آنگاه $M(a, b)$ نقطه عطف تابع است.

(۱)-۱۰۳

$$y = x'^2 + x''^2 = (x' + x'')^2 - 2x'x'' = (m - 2)^2 + 2(m + 1) = m^2 - 2m + 6$$

$$y' = 2m - 2 = 0 \Rightarrow m = 1$$

(۴)-۱۰۴

$$f'(x) = 6x^2 - 6(m+n)x + 6mn = 0 \xrightarrow{m=n} x^2 - 2mx + m^2 = 0$$

$$(x - m)^2 = 0 \Rightarrow x = m, f''(x) = 2x - 2m \xrightarrow{x=m} f''(x) = 0$$

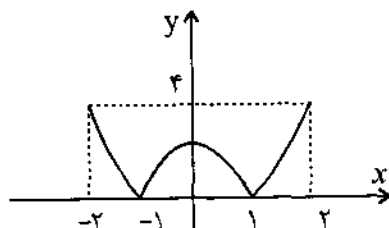
(۳)-۱۰۵

$$y' = 2x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm 1, x = 1 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow (1, -1), x = -1 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow (-1, 3)$$

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow \frac{y + 1}{x - 1} = \frac{3 + 1}{-1 - 1} \Rightarrow 4x - 4 = -2y - 2 \Rightarrow y = -2x + 1$$

(۳)-۱۰۶

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & |x| > 1 \\ 1 - x^2 & |x| < 1 \end{cases}$$



در نمودار فوق تابع f در $x = 1$ و $x = -1$ مشتق پذیر نمی باشد، و بنابراین در فاصله $[-2, 2]$ مشتق پذیر نمی باشد. اما در این فاصله دو min دارد.

(۱)-۱۰۷

$$f'(x) = -\frac{4}{x^2} + \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = \pm 4$$

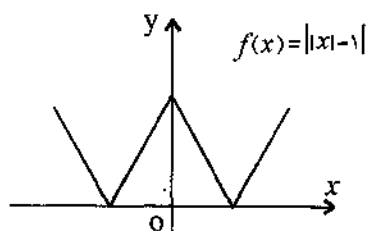
$$f''(x) = \frac{8}{x^3} \Rightarrow f''(4) > 0 \Rightarrow \min(4, 4), f''(-4) < 0 \Rightarrow \max(-4, -4)$$

(۱)-۱۰۸

$$f'(x) = 4x^2 - 16x = 0 \Rightarrow 4x(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow x = 0, 2, -2$$

$$y = f(0) = 16, y = f(2) = 0, y = f(-2) = 0, y = f(-1) = 9, y = f(4) = 144$$

$$x = 0, x = 1, x = -1 \quad (۴) - ۱۰۹$$



(۱) - ۱۱۰

$$y' = \sin hx = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = 0 \Rightarrow e^x - e^{-x} = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow (0, 1)$$

$$y'' = \cos hx = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \Rightarrow y''(0) = 1 > 0 \Rightarrow \text{نقطه min}$$

(۳) - ۱۱۱

$$y' = 4x^3 - 12x^2 = 0 \Rightarrow 4x^2(x - 3) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 3$$

$$y'' = 12x^2 - 24x = 0 \Rightarrow 12x(x - 2) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 2$$

$$(x < 2 \Rightarrow f''(x) < 0, x > 2 \Rightarrow f''(x) > 0) \Rightarrow \text{نقطه عطف } (2, -6)$$

یا چون $x = 2$ ریشه ساده معادله $y'' = 0$ است، طول نقطه عطف معمولی منحنی تابع است (۵-۱۴ را ببینید).

(۳) - ۱۱۲

$$y' = \cos hx = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \Rightarrow y' > 0 \Rightarrow \text{فاقد min, max}$$

$$y'' = \sin hx = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = 0 \Rightarrow e^x - e^{-x} = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow (0, 0)$$

$$(x < 0 \Rightarrow f''(x) < 0, x > 0 \Rightarrow f''(x) > 0) \Rightarrow \text{نقطه عطف } (0, 0)$$

(۴) - ۱۱۳ تابع در فاصله $[0, 5]$ صعودی است، پس حداکثر آن در $x = 5$ خواهد بود یعنی:

$$y = 2^x = 2^5 = 32$$

(۲) - ۱۱۴

$$y' = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow \frac{-1 + x}{x^2} = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow (1, 0)$$

$$y'' = \frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^2} = \frac{2 - x}{x^3} \Rightarrow y''(1) = 1 > 0 \Rightarrow \text{نوع نقطه می‌نیم است}$$

(۲) - ۱۱۵

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} - 1 + x - 1 = \frac{(x-1)^2}{x} \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2} = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

(۱, ۰) نقطه عطف منحنی است زیرا به ازای آن $y' = 0$ و y'' تغییر علامت می‌دهد.

(۴) - ۱۱۶

$$\begin{cases} x > 0 \Rightarrow y = x^3 + 4x \Rightarrow y' = 3x^2 + 4 \\ x < 0 \Rightarrow y = -x^3 + 2x \Rightarrow y' = -3x^2 + 2 \end{cases}$$

در مجاورت صفر مشتق‌های چپ و راست هر دو مثبت هستند اما مسأری نیستند و در نتیجه این نقطه اکسترم نمی‌تواند باشد و چون مشتق وجود ندارد، نقطه عطف هم نیست.

(۱)-۱۱۷

$$x' + x'' = -\frac{b}{a} = \frac{2 + \alpha^2}{1 + \alpha^2} = \frac{1}{1 + \alpha^2} + \frac{1 + \alpha^2}{1 + \alpha^2} = \frac{1}{1 + \alpha^2} + 1$$

$x' + x''$ وقتی ماکزیمم است که مخرج عبارت $1/(1 + \alpha^2)$ کم‌ترین مقدار را داشته باشد، یعنی $\alpha = 0$.

(۲)-۱۱۸

نکته: اگر معادله تابع به صورت $f(x) = \sqrt[n]{(x-a)^n}$ باشد، ریشه ساده داخل رادیکال طول نقطه عطف است.

نکته: اگر معادله تابع به صورت $f(x) = \sqrt[n]{(x-a)^{2n}}$ باشد، ریشه مضاعف داخل رادیکال طول نقطه

بازگشت است.

یادآوری: هرگاه تابع f در نقطه x_0 پیوسته باشد و مشتق‌های راست و چپ در نقطه x_0 نامتناهی و مختلف‌العلامه باشند، نقطه x_0 را نقطه بازگشت منحنی تابع گوئیم.

(۳)-۱۱۹

$$f'(x) = \frac{4}{3}x^{1/3} + \frac{4}{3}x^{-2/3} = \frac{4}{3}x^{-2/3}(x+1) = 0 \Rightarrow x = 0, x = -1$$

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$
$f'(x)$		$-$	0	$+$

min

$$y' = 3x^2 \Rightarrow y'' = 6x = 0 \Rightarrow x = 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y''		$-$	$+$

(۲)-۱۲۰

(۱)-۱۲۱

$$y' = -2 \cos x \sin x + \sin x \Rightarrow \sin x(-2 \cos x + 1) = 0 \Rightarrow \sin x = 0 \Rightarrow x = 0, \pi, 2\pi$$

$$-2 \cos x + 1 = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, y = 0 \Rightarrow \cos x(\cos x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \cos x = 1 \Rightarrow x = 0, 2\pi$$

x	0	$\frac{\pi}{3}$	π	$\frac{5\pi}{3}$	2π
y'	0	$-$	$+$	$-$	$+$
y	0	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$
		$-\frac{1}{4}$	2	$-\frac{1}{4}$	
		min	max	min	

(۲)-۱۲۲

$$y' = \cos x - 2 \sin x \cos x \Rightarrow \cos x(1 - 2 \sin x) = 0 \Rightarrow \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$$

$$\sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, y = 0 \Rightarrow \sin x(1 - \sin x) = 0 \Rightarrow \sin x = 0 \Rightarrow$$

$$x = 0, \pi, 2\pi, \sin x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
y'	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0
y	0	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$
	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	0	-2	0
		max	min	max		min	

۱۲۳- (۳) اگر منحنی را با $y = -9$ تقاطع دهیم باید $\Delta = 0$ باشد. در نتیجه:

$$\frac{x^2 - ax - 5}{x^2 - ax + 5} = -9 \Rightarrow x^2 - ax + 4 = 0 \Rightarrow \Delta = 0 \Rightarrow a^2 - 12 = 0 \Rightarrow a = \pm 2\sqrt{3}$$

(۳)-۱۲۴

$$y' = \frac{-2}{(x-1)^2} < 0 \Rightarrow \text{ترونی}, y'' = \frac{4}{(x-1)^3}, x \in [2, 3] \Rightarrow y'' > 0 \Rightarrow \text{محدب}$$

(۱)-۱۲۵

$$\max \text{ یا } \min : M(2, 1) \Rightarrow \begin{cases} y = x^2 - ax^2 + b - 2 \\ y' = 2x^2 - 2ax \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 = 4 - 2a + b - 2 \\ 0 = 4 - 2a \end{cases} \Rightarrow a = 2, b = 1$$

$$c : y = x^2 - 2x^2 + 5, x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2} = 1 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow \omega(1, 3)$$

(۳)-۱۲۶

$$y' = 2x^2 + 2px \Rightarrow \begin{cases} f(2) = 0 \Rightarrow 8 + 4p + q = 0 \\ f'(2) = 0 \Rightarrow 12 + 2p = 0 \end{cases} \Rightarrow p = -6, q = 4$$

۱۲۷- (۴) برای مثال تابع $y = x^2$ را بررسی می‌کنیم. $f'(0) = f''(0) = 0$ و تابع در $x = 0$ نه max و نه min دارد ولی گزینه (۳) صحیح نیست زیرا $f(x) = x^2$ و $f'(0) = f''(0) = 0$ و تابع در $x = 0$ می‌نیم نسبی دارد.

(۲)-۱۲۸

$$D_f = \mathbb{R}, y' = 2nx^{2n-1}, y' = 0 \Rightarrow 2nx^{2n-1} = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow (0, 0)$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$
y	$+\infty$	$\searrow$	$\nearrow$

$\Rightarrow \{+\infty, 0\} \Rightarrow \min y = 0$ می‌نیم مطلق

(۱)-۱۲۹

$$y' = \frac{2x(ax+b) - a(x^2+3)}{(ax+b)^2} \Rightarrow y' = \frac{ax^2 + 2bx - 3a}{(ax+b)^2} = 0 \Rightarrow ax^2 + 2bx - 3a = 0, \Delta' = b^2 + 3a^2 > 0$$

چون Δ' همواره مثبت است، معادله $y' = 0$ دارای دو ریشه متمایز است و y' به‌ازای این دو مقدار تغییر علامت می‌دهد. پس، یکی از این نقاط max و یکی min تابع است.

۱۳۰- (۳) این سؤال درست مانند آن است که بگویند تابع دارای چند نقطه اکسترمم است.

$$y' = x^2 - 2x - 3 = 0, \Delta = 4 + 12 > 0$$

بنابراین تابع دارای یک max و یک min است در نتیجه دو مماس موازی محور x ها دارد.
(۱۳۱-۱)

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{2t+2}{2t} = 0 \Rightarrow 2t+2=0 \Rightarrow t=-1 \Rightarrow x=1, y=-1$$

$$\text{فرض: } z = \frac{2t+2}{2t} \Rightarrow z'_x = \frac{z'_t}{x'_t} = \frac{\frac{-2}{2t^2}}{2t} = \frac{-1}{2t^3} \xrightarrow{t=-1} z'_x > 0$$

(۱۳۲-۳)

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{e^{-t} - te^{-t}}{e^t + te^t} = \frac{1-t}{1+t} \cdot e^{-2t}, \text{ فرض: } z = \frac{1-t}{1+t} \cdot e^{-2t}$$

$$z'_x = \frac{z'_t}{x'_t} = \frac{\frac{-2}{(1+t)^2} \cdot e^{-2t} - 2 \times \frac{1-t}{1+t} \times e^{-2t}}{e^t + te^t} = \frac{e^{-2t}}{e^t + te^t} \left(\frac{-4 + 2t^2}{(1+t)^2} \right) = 0$$

$$\Rightarrow e^{-2t} > 0, -4 + 2t^2 = 0 \Rightarrow t = \pm\sqrt{2} \Rightarrow x = \sqrt{2}e^{\sqrt{2}}$$

(۱۳۳-۲)

$$y' = e^x - e^{-x} \Rightarrow e^x - e^{-x} = 0 \Rightarrow e^x = e^{-x} \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 2$$

$$y'' = e^x + e^{-x} \Rightarrow y''_{(0)} = 2 > 0 \Rightarrow \min(0, 2)$$

۱۳۴-۴) چون تابع در a تعریف شده و مشتق آن صفر است پس نقطه به طول a یا اکسترم یا عطف است اما $f''(a) \neq 0$ پس نقطه عطف نیست و چون $f''(a) > 0$ است، تقعر منحنی به سمت بالا می باشد پس در این نقطه تابع می نیمی برابر $2a$ دارد.

۱۳۵-۲) سوی تقعر منحنی نمایش تابع، $y = mx^2 + 1/2x^2 + m$ ، در نقطه عطف ($y'' = 0$) عوض می شود.

$$y' = 2mx^2 + x \Rightarrow y'' = 4mx + 1 = 0 \Rightarrow 4m\left(\frac{1}{4}\right) + 1 = 0 \Rightarrow m = -1$$

(۱۳۶-۴)

$$y' = x - \frac{1}{x} \Rightarrow y'' = 1 + \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 + 1}{x^2}$$

y'' به ازای هیچ مقداری از x در دامنه تعریفش برابر صفر نخواهد شد تا تغییر علامت دهد.

(۱۳۷-۲)

$$y' = 3x^2 - 2x - 9 \Rightarrow y'' = 6x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$$

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
y''		$-$	$+$
تقعر		رو به پایین	رو به بالا
تحدب		رو به بالا	رو به پایین

(۱۳۸-۴)

$$f'(x) = \frac{(x^2-9) - 2x(x+3)}{(x^2-9)^2} = -\frac{(x+3)^2}{(x^2-9)^2} = 0 \Rightarrow -(x+3)^2 = 0 \Rightarrow x = -3$$

داریم $D_f = \mathbb{R} - \{-3, 3\}$ و چون -3 در دامنه تابع نیست، پس f هیچ عدد بحرانی ندارد.
۱۳۹- (۳) به‌ارای جميع مقادیر x ، $y'' > 0$ بوده و در نتیجه تقعر منحنی به سمت بالاست

$$y' = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow y'' = \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$$

۱۴۰- (۳) چون در نقاط $-\pi$ و 0 و π ، $f''(x)$ تغییر علامت می‌دهد بنابراین تابع $f(x)$ در این نقاط، نقطه عطف دارد.

$$f'(x) = \cos x \Rightarrow f''(x) = -\sin x = 0 \Rightarrow x = -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi$$

x	-2π	$-\pi$	0	π	2π
$f''(x)$	0	$-$	0	$+$	0

(۲)-۱۴۱

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$y = f(-1/5) = \frac{9}{\lambda}, y = f(-1) = 2, y = f(1) = -2, y = f(2) = 2$$

۱۴۲- (۱) $f'(x) = mx^2 - 2x - 4$ برای اینکه تابع همواره نزولی باشد، بایستی $f'(x) \leq 0$ بنابراین:

$$\begin{cases} \Delta' \leq 0 \Rightarrow 1 + 4m \leq 0 \Rightarrow m \leq -\frac{1}{4} \\ a < 0 \Rightarrow m < 0 \Rightarrow m < 0 \end{cases} \Rightarrow m \leq -\frac{1}{4}$$

(۲)-۱۴۳

$$f'(x) = 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1 \quad \begin{array}{c|ccc} x & -\infty & 1 & +\infty \\ \hline f'(x) & - & 0 & + \end{array}$$

در $(-\infty, 1)$ و $(1, +\infty)$ اکیداً یکنوا می‌باشد، زیرا در هر فاصله مشتق یک علامت دارد و پیوسته است.

۱۴۴- (۳) از $f' < 0$ نتیجه می‌شود f اکیداً نزولی است و از $f'' < 0$ نتیجه می‌شود که f به‌سوی پایین است که در میان نمودارهای داده شده فقط نمودار گزینه ۳ دارای این دو شرط است.

(۴)-۱۴۵

$$f'(x) = -2(2x^2 + 2x + 1)e^{-2x} = -4e^{-2x} \left[\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \right], \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(x) < 0$$

(۱)-۱۴۶

$$y^x = x^y \Rightarrow \ln y^x = \ln x^y \Rightarrow x \ln y = y \ln x \Rightarrow \ln y + \frac{xy'}{y} = \frac{y}{x} + y' \ln x$$

$$\Rightarrow y' = \frac{\ln y - \frac{y}{x}}{\ln x - \frac{x}{y}} \xrightarrow{x=y=1} y' = \frac{0-1}{0-1} = 1$$

(۴)-۱۴۷

$$y = \sin x \Rightarrow u' = \cos x \Rightarrow u'' = -\sin x \Rightarrow u''' = -\cos x, \dots$$

$$v = u \Rightarrow v' = 1 \Rightarrow v'' = 0 \Rightarrow \dots \Rightarrow v^{(n)} = 0$$

$$y^{(12)} = (x \sin x)^{12} = \sum_{i=1}^{12} \binom{12}{i} (\sin x)^{(12-i)} x^{(i)} = \binom{12}{1} (\sin x)^{11} x + \binom{12}{2} (\sin x)^{10} \times 0 + \dots$$

$$y^{(12)} = 12(-\cos x) \xrightarrow{x=\pi} = 12$$

(۱)-۱۴۸

$$y' = \ln x + 1 \Rightarrow y'(1) = \ln 1 + 1 = 1 \Rightarrow y - 0 = 1(x - 1) \Rightarrow y = x - 1$$

$$0 = x - 1 \Rightarrow x = 1$$

(۲)-۱۴۹

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = f(-2,5 - 0,5) - f(-2,5) = -14,25$$

(۱)-۱۵۰

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{f(2,1) - f(2)}{0,1} = \frac{0,2}{0,1} = 2$$

(۲)-۱۵۱

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & (1 - x^2) \geq 0 \\ -1 + x^2 & (1 - x^2) < 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x < -1 \\ 1 - x^2 & 0 \leq x < 1 \\ x^2 - 1 & x > 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 - 1) = 0, \lim_{x \rightarrow 1^-} (1 - x^2) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$$

پس تابع در نقطه $x = 1$ پیوسته است.

(۴)-۱۵۲

$$f^{-1} \text{ روی } A'(, 1) \Rightarrow f \text{ روی } A(1,) \Rightarrow y = f(1) = 1^0 \Rightarrow A(1, 1^0) \Rightarrow A'(1^0, 1)$$

$$f'(x) = 3x^2 + 1 \Rightarrow -\frac{1}{f'(1)} = -\frac{1}{4} \Rightarrow f^{-1} \text{ ضریب زلویه قائم} = -4$$

$$y - 1 = -4(x - 1^0) \Rightarrow y = -4x + 41$$

(۴)-۱۵۳

$$f(x) = x + \cos x \Rightarrow 0 \leq f'(x) \leq 2 \quad f(x) = 2x - \cos x \Rightarrow 1 \leq f'(x) \leq 2$$

$$f(x) = -x + 3 \cos x \Rightarrow -4 \leq f'(x) \leq 2 \quad f(x) = -x + \cos x \Rightarrow -2 \leq f'(x) \leq 0$$

۱۵۴- (۱) نقطه دلخواهی از منحنی را $A(x, \sqrt{2x+4})$ انتخاب می‌کنیم و فاصله این نقطه را از مبدأ محاسبه می‌کنیم:

$$OA = \sqrt{x^2 + 2x + 4} = \sqrt{(x+1)^2 + 3}$$

۱۵۵- (۳) نقطه دلخواه $P(x, x^2 + 1)$ را روی سهمی انتخاب می‌کنیم و فاصله این نقطه از نقطه $(3, 1)$ را محاسبه می‌کنیم.

$$d = \sqrt{(x-3)^2 + (x^2+1-1)^2} = \sqrt{x^4 + x^2 - 6x + 9}$$

اکنون x را چنان تعیین می‌کنیم که d می‌نیم باشد.

$$d' = \frac{4x^3 + 2x - 6}{2\sqrt{x^4 + x^2 - 6x + 9}} = 0 \Rightarrow 2x^3 + x - 3 = 0 \Rightarrow x = 1$$

به‌ازای $x = 1$ داریم $y = 2$ لذا نقطه $(1, 2)$ صحیح است.

(۱۱)-۱۵۶

$$w(1, 2) \Rightarrow \begin{cases} y = ax^2 + bx^2 + c \\ y'' = 6ax + 2b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 = a + b + c \\ 0 = 6a + 2b \end{cases} \Rightarrow a = 1, b = -3$$

$$c: y = x^2 - 3x^2 + 4 \Rightarrow y' = 2x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x' + x'' = -\frac{b}{a} = -\frac{-6}{1} = 6$$

۱۵۷- (۴) تابع در فاصله $1 \leq x \leq -1$ پیوسته است، اما در نقطه $x = 0$ مشتق‌پذیر نیست. بنابراین قضیه رول صادق نیست.

۱۵۸- (۲) تابع f پیوسته و به‌ازای تمام مقادیر x مشتق‌پذیر است و $f(-2) = f(2) = -8$ بنابراین $f'(c) = 0$ (به‌ازای برخی مقادیر c)، به‌طوری که $c \in (-2, 2)$:

$$f'(x) = 2x^2 - 4x - 4, f'(c) = 0 \Rightarrow 2c^2 - 4c - 4 = 0 \Rightarrow c = 2, c = -\frac{2}{1}$$

$$2 \notin (-2, 2), -\frac{2}{1} \in (-2, 2)$$

۱۵۹- (۱) اولاً: تابع $f(x) = x^2 + 2x^2 - 2$ به‌ازای تمام مقادیر x پیوسته و مشتق‌پذیر است. ثانیاً: $f(1) = 1$ و $f(-2) = -2$ مختلف‌العلامه هستند. ثالثاً: $f'(x) = 4x^2 + 6x^2$ هرگز در بین 1 و 0 صفر نمی‌شوند در نتیجه معادله دقیقاً یک ریشه دارد.

۱۶۰- (۱) توابع چندجمله‌ای پیوسته و در $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیرند، که در هر سه گزینه صادق است. ولی شرط سوم قضیه رول فقط در گزینه (۱) صادق است، $f(-\sqrt{2}) = f(\sqrt{2}) = 0$.

(۲)-۱۶۱

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{(x-1)^2}, f(b) - f(a) = (b-a)f'(c) \Rightarrow f(3) - f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(3 - \frac{3}{2}\right)f'(c) \\ \Rightarrow \frac{5}{2} - \frac{5}{2} = \left(\frac{3}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{(c-1)^2}\right) \Rightarrow (c-1)^2 = 1 \Rightarrow c-1 = \pm 1 \Rightarrow c = 0, c = 2$$

۱۶۲- (۳) در گزینه (۱)، $f(a) = 0$ ولی $f(b) \neq 0$. در گزینه (۲)، تابع در $x = 0$ مشتق ندارد؛ و در گزینه (۴) تابع پیوسته نیست.

۱۶۳- (۳) $\tan^2 x \cdot \cot^2 x = (\tan^2 x)^2 (\cot^2 x)^2 = 1$ چون حاصل ضرب مذکور ثابت است حاصل جمع $\tan^2 x$ و $\cot^2 x$ وقتی می‌نیم است که داشته باشیم:

$$\frac{\tan^2 x}{2} = \frac{\cot^2 x}{1} \Rightarrow \tan^2 x = 2 \cot^2 x \Rightarrow \frac{1}{\cot^2 x} = 2 \cot^2 x \Rightarrow \cot^2 x = \frac{1}{2} \\ \Rightarrow \cot^2 x = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \tan^2 x = \frac{2}{\sqrt{2}} \Rightarrow \min y = \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

۱۶۴- (۲)

$$y = (\sin^2 x)^{\frac{1}{3}} (\cos^2 x)^{\frac{2}{3}}, \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad \text{ثابت}$$

$$\frac{\sin^2 x}{1} = \frac{\cos^2 x}{2} \Rightarrow \cos^2 x = 2 \sin^2 x \Rightarrow \sin^2 x + 2 \sin^2 x = 1 \Rightarrow 3 \sin^2 x = 1$$

$$\Rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{3} \Rightarrow \cos^2 x = \frac{2}{3}, \max : y = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

۱۶۵- (۲) در فاصله $[-1, 4]$ پیوسته و در فاصله $(-1, 4)$ مشتق‌پذیر است. بنابراین نقطه‌ای مانند $c \in (-1, 4)$ وجود دارد به طوری که:

$$a = -1, b = 4 \rightarrow f(b) - f(a) = (b - a)f'(c) \Rightarrow f(4) - f(-1) = (4 + 1)f'(c)$$

$$\Rightarrow 15c^2 = 65 \Rightarrow c^2 = \frac{13}{3} \Rightarrow c = \pm \sqrt{\frac{13}{3}} \Rightarrow c = -\sqrt{\frac{13}{3}} \notin (-1, 4)$$

۱۶۶- (۳)

$$\frac{\tan^{-1} x - \tan^{-1} 0}{x - 0} = \frac{1}{1 + c^2}, 0 < c < 1 \Rightarrow \frac{\tan^{-1} x}{x} = \frac{1}{1 + c^2}, 0 < c < 1$$

$$0 < c^2 < 1 \Rightarrow 1 < 1 + c^2 < 2 \Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{1}{1 + c^2} < 1$$

۱۶۷- (۱)

$$\begin{cases} x + y = 2m \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{x + y}{xy} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2m}{xy}$$

مقدار $1/x + 1/y$ زمانی کم‌ترین مقدار را دارد که xy ماکزیمم باشد و چون مجموع x و y عدد ثابتی است، xy هنگامی ماکزیمم خواهد بود که $x = y$ باشد، پس:

$$\begin{cases} x = y \\ x + y = 2m \end{cases} \Rightarrow x = m, y = m \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2m}{m^2} = \frac{2}{m}$$

۱۶۸- (۴) درگزینه (۱) تابع در $x = b$ تعریف نشده است. درگزینه (۲) تابع در فاصله (a, b) مشتق‌پذیر نمی‌باشد. درگزینه (۳) تابع در $[a, b]$ پیوسته نیست. ولی درگزینه (۴) تابع هر دو شرط قضیه مقدار میانگین را دارد.

۱۶۹- (۱)

$$\frac{f(2) - f(-2)}{g(2) - g(-2)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \Rightarrow \frac{(4 - 4) - (4 + 4)}{5 + 3} = \frac{2c - 2}{2} \Rightarrow 2c - 2 = -2 \Rightarrow c = 0$$

۱۷۰- (۱) $b < a \Rightarrow \log_a^b < 1$ ماکزیمم عبارت وقتی حاصل می‌شود که $\sin x$ حداقل مقدار را داشته باشد.

$$\min \sin x = -1, \max (\log_a^b)^{\sin x} = (\log_a^b)^{-1} = \frac{1}{\log_a^b} = \log_b^a$$

۱۷۱- (۱)

$$f(3) - f(1) = (3 - 1)f'(c) \Rightarrow \sqrt{2} - 0 = (3 - 1) \left(\frac{1}{2\sqrt{c-1}} \right) \Rightarrow c = \frac{3}{2}$$

(۳)-۱۷۲

$$\begin{aligned} 2x + \Delta y = 3^0 &\Rightarrow y = \frac{3^0 - 2x}{\Delta} \Rightarrow p = xy = \frac{3^0 x - 2x^2}{\Delta} \\ p' = 3^0 - 2x = 0 &\Rightarrow x = \Delta \Rightarrow y = 2, \max(p) = 1\Delta \end{aligned}$$

(۱)-۱۷۳

$$df = \frac{\frac{-2x^2}{2\sqrt{1-x^2}} - \sqrt{1-x^2}}{1 + \frac{1-x^2}{x^2}} dx = \frac{-2}{2x^2\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

(۳)-۱۷۴

$$dy = (e^x + xe^x + 1)dx \Rightarrow dy = (e^1 + 0 + 1)(e^0 \cdot 1) = e^1 \cdot 2$$

(۲)-۱۷۵

$$\begin{aligned} \Delta y &\approx f(x + \Delta x) - f(x) = 2(x + \Delta x)^2 - (x + \Delta x) - 2x^2 + x \\ \Delta y &\approx \Delta x(2x + 2\Delta x - 1) \approx e^1 \cdot 1(2 + e^1 \cdot 2 - 1) = e^1 \cdot 3 \cdot 2 \end{aligned}$$

(۲)-۱۷۶

$$dx = -e^1 \cdot 1 + 1 = e^1 \cdot 2, dy = (2x - 1)dx = (-2 - 1)(e^1 \cdot 2) = -e^1 \cdot 1$$

(۲)-۱۷۷

$$\Delta y \approx f(x + \Delta x) - f(x) = (2^1 \cdot 1)^2 - 2(2^1 \cdot 1) + \Delta - 2 + 2 - \Delta \approx e^1 \cdot 2 \cdot 1$$

(۴)-۱۷۸

$$dy = \left(\frac{2x}{x^2} + \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \right) dx = \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{2x} \right) dx \Rightarrow dy = \frac{\Delta dx}{2x}$$

(۱)-۱۷۹

$$dy = \frac{\frac{-2x(1+x^2) - 2x(1-x^2)}{(1+x^2)^2}}{\frac{1-x^2}{1+x^2}} dx \Rightarrow dy = \frac{-2x}{1-x^2} dx$$

$$d^2y = \frac{-2(1-x^2) + 2x^2(-2x)}{(1-x^2)^2} dx^2 = \frac{-4x}{(1-x^2)^2} dx^2 \Rightarrow d^2y = \frac{-2(2x^2+1)}{(1-x^2)^2} dx^2$$

(۲)-۱۸۰

$$\begin{aligned} dy &= (-2x e^{-x^2} \ln 2) dx \Rightarrow d^2y = -2 \times e^{-x^2} \ln 2 + (-2x \ln 2)(-2x e^{-x^2} \ln 2) dx^2 \\ d^2y &= -2 \times e^{-x^2} \ln 2(1 - 2x^2 \ln 2) dx^2 \end{aligned}$$

(۲)-۱۸۲

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = 1 - f(x) + f(x) - 1 = (\lambda x - 2)\Delta x + f(\Delta x)^2$$

$$dy = (\lambda x - 2)dx = (\lambda x - 2)\Delta x$$

$$\Delta y - dy = f(\Delta x)^2 = 1 \times 0.1^2 = 0.01$$

(۲)-۱۸۳

$$dy = (2x - 4)dx = (2 \times 0.1 - 4)(0.1) = -0.38 \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{-0.38}{1} = -0.38$$

(۲)-۱۸۴

$$dy = \frac{1}{x} \left[1 \times \sqrt{x+1} + \frac{1}{\sqrt{x+1}}(x+1) \right] dx = \frac{1}{x} \left[\frac{2(x+1) + x+1}{2\sqrt{x+1}} \right] dx$$

$$dy = \frac{1}{x} \left[\frac{3(x+1)}{2\sqrt{x+1}} \right] dx \Rightarrow dy = \frac{x+1}{\sqrt{x+1}} dx$$

(۱)-۱۸۵ اگر $f(x) = \sin x$ داریم $f'(x) = \cos x$ بنابراین:

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x \Rightarrow \sin(x + \Delta x) \approx \sin x + \cos x \cdot \Delta x$$

$\Delta x = \pi/180$ (بر حسب رادیان) و $x = 45^\circ$ پس:

$$\sin 46^\circ \approx \sin 45^\circ + \cos 45^\circ \times \frac{\pi}{180} \approx \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\pi}{180} \approx \frac{\sqrt{2}}{2} \left(1 + \frac{\pi}{180} \right)$$

(۳)-۱۸۶

$$dy = \left(\frac{-x^2 + 1}{(1+x^2)^2} + \frac{1}{1+x^2} \right) dx = \frac{2dx}{(1+x^2)^2}$$

(۲)-۱۸۷

$$y = \sin(\arcsin x) = x \Rightarrow dy = dx$$

(۲)-۱۸۸

$$y = \arcsin \sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}} = \arctan x \Rightarrow dy = \frac{dx}{1+x^2}$$

(۱)-۱۸۹

(۳)-۱۹۰

$$MN = \Delta y = y' \cdot \Delta x = \frac{1}{2\sqrt{x}} \times 0.1 = 0.05$$

(۳)-۱۹۱ نقاط بحرانی را تعیین می‌کنیم:

$$f'(x) = \frac{1}{x}(x+1)^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x(x+1)}}$$

مشتق تابع هیچ وقت برابر صفر نمی‌شود ولی به ازای ریشه مخرج، مشتق وجود ندارد.

$$x+1=0 \Rightarrow x=-1$$

پس $x = -1$ نقطه بحرانی تابع است.

$$f(-2) = (-2+1)^{1/2} = \sqrt{(-1)^2} = 1$$

$$f(-1) = (-1+1)^{1/2} = 0$$

$$f(1) = (1+1)^{1/2} = \sqrt{2}$$

(۲)-۱۹۲

$$f'(x) = \frac{3x^2 - 6x}{2\sqrt{(x^2 - 3x^2 + 4)^2}} = \frac{x^2 - 2x}{\sqrt{(x^2 - 3x^2 + 4)^2}}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x-2) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 2$$

و بازای ریشه مخرج مشتق تابع وجود ندارد، پس داریم:

$$x^2 - 3x^2 + 4 = 0 \Rightarrow (x+1)(x^2 - 4x + 4) = 0 \Rightarrow (x+1)(x-2)^2 = 0 \Rightarrow x = -1, x = 2$$

پس مجموعه نقاط بحرانی عبارت از $\{0, -1, 2\}$ است.

(۴)-۱۹۳

$$y' = \frac{2x + 2 - 2x}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2} \Rightarrow y'' = \frac{-4}{(x+1)^3}, \quad x+1=0 \Rightarrow x=-1$$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y''		$+$	$-$

هر چند y'' در نقطه‌ای به طول $x = -1$ تغییر علامت می‌دهد ولی این نقطه، نقطه عطف منحنی نیست زیرا تابع در $x = -1$ پیوسته نیست.

(۲)-۱۹۴ چون n یک عدد صحیح و مثبت است بنابراین $(2n+1)$ یک عدد فرد صحیح و مثبت و $2n$ یک عدد زوج صحیح و مثبت است پس:

$$y' = (2n+1)x^{2n} \geq 0$$

و در نتیجه تابع همواره صعودی و فاقد اکسترم نسبی است.

زیرا: (۲)-۱۹۵

$$y' = 4x^2 - 24x^2 + 48x \Rightarrow y'' = 12x^2 - 48x + 48 \Rightarrow y'' = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2 \geq 0$$

پاسخ تشریحی سؤالات تستی فصل ۶

(۱)-۱

$$\int \frac{e^{2x} + 1}{e^x + 1} dx = \int \frac{(e^x + 1)(e^{2x} - e^x + 1)}{e^x + 1} dx = \int (e^{2x} - e^x + 1) dx = \frac{1}{3} e^{3x} - e^x + x + c$$

(۱)-۲

$$\int \frac{1+x^2+2x}{1+x^2} dx = \int \frac{1+x^2}{1+x^2} dx + \int \frac{2x}{1+x^2} dx = x + \ln(1+x^2) + c$$

(۲)-۳

$$\int \sin h^{\frac{1}{r}} x dx = \int \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^{\frac{1}{r}} dx = \frac{1}{r} \int (e^{rx} + e^{-rx} - 2) dx = \frac{1}{r} \left(\frac{1}{r} e^{rx} - \frac{1}{r} e^{-rx} - 2x \right) + c$$

(۴)-۴

$$\int \frac{x^r}{1+x^r} dx = \int \left(1 - \frac{1}{1+x^r} \right) dx = \int dx - \int \frac{dx}{1+x^r} = x - \text{Arc tan } x + c$$

(۲)-۵

$$\begin{aligned} \int \sin hx \cdot \sin h^{\frac{1}{r}} x dx &= \frac{1}{r} \int (e^x - e^{-x})(e^{rx} - e^{-rx}) dx = \frac{1}{r} \int e^{rx} dx - \frac{1}{r} \int e^{-rx} dx \\ &- \frac{1}{r} \int e^x dx + \frac{1}{r} \int e^{-x} dx = \frac{1}{r^2} e^{rx} + \frac{1}{r^2} e^{-rx} - \frac{1}{r^2} e^x - \frac{1}{r^2} e^{-x} + c \xrightarrow{c=1, x=0} I = 1 \end{aligned}$$

(۳)-۶

$$\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \int \frac{dx}{e^x + \frac{1}{e^x}} = \int \frac{e^x dx}{e^{2x} + 1}, e^x = \tan t \Rightarrow e^x dx = (1 + \tan^2 t) dt$$

$$I = \int \frac{1 + \tan^2 t}{1 + \tan^2 t} dt = \int dt = t + c = \text{Arc tan } e^x + c$$

(۲)-۷

$$\begin{aligned} \int x \sqrt{x} dx &= \int x \cdot x^{1/2} dx = \int x^{3/2} dx = \frac{r}{\frac{r}{2}} x^{r/2} + c \\ \frac{r}{\frac{r}{2}} + c &= r \Rightarrow c = r - \frac{r}{2} \Rightarrow c = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(۲)-۸

$$\begin{aligned} \ln(\ln x) = u &\Rightarrow \frac{1}{\ln x} dx = du \Rightarrow \frac{dx}{x \ln x} = du \\ I = \int \frac{du}{u} &= \ln u + c = \ln \ln(\ln x) + c \xrightarrow{c=1} I = \ln \ln(\ln x) + 1 \end{aligned}$$

(۱)-۹

$$\begin{aligned} x = u &\Rightarrow dx = du, e^{-x} dx = dv \Rightarrow -e^{-x} = v \\ \int x e^{-x} dx &= -x e^{-x} + \int e^{-x} dx = -x e^{-x} - e^{-x} + c \\ I(x) = -x e^{-x} - e^{-x} + c &\xrightarrow{c=1} I(1) = -1 e^{-1} + 1 = \frac{e-1}{e} \end{aligned}$$

(۱)-۱۰

$$\begin{aligned} \text{Arc tan } x = u &\Rightarrow \frac{1}{1+x^2} dx = du, dx = dv \Rightarrow x = v \\ \int \text{Arc tan } x dx &= x \text{Arc tan } x - \int \frac{x}{1+x^2} dx = x \text{Arc tan } x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + c \end{aligned}$$

(۳)-۱۱

$$\begin{aligned}\ln x = u &\Rightarrow \frac{1}{x} dx = du, dx = dv \Rightarrow x = v \\ \int \ln x dx &= x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln x - x + c \\ \ln(1) - 1 + c &= 1 \Rightarrow c = 2\end{aligned}$$

(۳)-۱۲

$$\begin{aligned}\sqrt{x} = t &\Rightarrow \frac{dx}{2\sqrt{x}} = dt \Rightarrow dx = 2\sqrt{x} dt \Rightarrow I = \int (2te^t) dt \\ t = u &\Rightarrow dt = du, e^t dt = dv \Rightarrow e^t = v \\ I &= 2(te^t - \int e^t dt) = 2te^t - 2e^t + c = 2e^t(t - 1) + c = 2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x} - 1) + c\end{aligned}$$

(۱)-۱۳

$$\begin{aligned}\ln x = u &\Rightarrow \frac{dx}{x} = du, \sqrt{x} dx = dv \Rightarrow \frac{1}{2} x \sqrt{x} = v \\ \int \sqrt{x} \ln x dx &= \frac{1}{2} x \sqrt{x} \ln x - \frac{1}{2} \int \sqrt{x} dx = \frac{1}{2} x \sqrt{x} \ln x - \frac{1}{4} x \sqrt{x} + c\end{aligned}$$

(۲)-۱۴

$$\begin{aligned}I &= \int \frac{dx}{1+x^2} = \int \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{1}\right)^2} = \frac{1}{1} \int \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{1}\right)^2}, u = \frac{x}{1} \Rightarrow du = \frac{1}{1} dx \\ I &= \frac{1}{1} \int \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{1} \text{Arc tan } u = \frac{1}{1} \text{Arc tan } \left(\frac{x}{1}\right) + c\end{aligned}$$

(۱)-۱۵

(۱)-۱۶

$$\begin{aligned}(\ln x)^2 = u &\Rightarrow \frac{2}{x} \ln x dx = du, dx = dv \Rightarrow x = v \\ \int (\ln x)^2 dx &= x(\ln x)^2 - 2 \int \ln x dx, \ln x = u \Rightarrow \frac{dx}{x} = du, dx = dv \Rightarrow x = v \\ \int (\ln x)^2 dx &= x(\ln x)^2 - 2[x \ln x - \int dx] = x(\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x + c\end{aligned}$$

(۳)-۱۷

$$\begin{aligned}\ln(2x) = u &\Rightarrow \frac{dx}{x} = du, x^5 dx = dv \Rightarrow \frac{1}{6} x^6 = v \\ \int x^5 \ln(2x) dx &= \frac{1}{6} x^6 \ln 2x - \frac{1}{6} \int x^6 \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{1}{6} x^6 \ln 2x - \frac{1}{72} x^6 + c\end{aligned}$$

(۲)-۱۸

$$f(x) = 2^{2-x} \Rightarrow F(x) = -\frac{2^{2-x}}{\ln 2} + c$$

(۱)-۱۹

$$x = u \Rightarrow dx = du, \sin hx dx = dv \Rightarrow \cos hx = v$$

$$\int x \sin hx dx = x \cos hx - \int \cos hx dx = x \cos hx - \sin hx + c$$

(۴)-۲۰

(۱)-۲۱

$$\int \frac{dx}{a^x - x^x} = \frac{1}{x} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + c, \int \frac{dx}{x^x - x^x} = \frac{1}{x} \ln \left| \frac{x+x}{x-x} \right| = \frac{1}{x} \ln \left| \frac{2}{0} \right| - \frac{1}{x} \ln |1| = \frac{1}{x} \ln 2$$

(۴)-۲۲

$$dy = (x+1)^{-x} dx \Rightarrow \int dy = \int (x+1)^{-x} dx \Rightarrow y = -\frac{1}{x+1} + c$$

$$y(1) = -1 + c = 1 \Rightarrow c = 2 \Rightarrow y = -\frac{1}{x+1} + 2 = \frac{2x+1}{x+1}$$

(۱)-۲۳

$$\int \sin x \cdot \cos^{x/r} x dx = - \int (-\sin x) \cos^{x/r} x dx = -\frac{r}{\delta} \cos^{\delta/r} x + c$$

(۳)-۲۴

$$u = y - x^x \Rightarrow du = -x^x dx \Rightarrow x^x dx = -\frac{1}{x^x} du$$

$$I = \int (y - x^x)^{1/\delta} \left(-\frac{1}{x^x} du \right) = -\frac{1}{x^x} \int u^{1/\delta} du = -\frac{1}{x^x} \cdot \frac{u^{x/\delta}}{\frac{x}{\delta}} = -\frac{\delta}{x^x} (y - x^x)^{x/\delta} + c$$

(۲)-۲۵

$$u = 1 - \cos x \Rightarrow du = \sin x dx$$

$$\int \sin x (1 - \cos x)^{1/r} dx = \int u^{1/r} du = \frac{r}{x} u^{r/r} + c = \frac{r}{x} (1 - \cos x)^{r/r} + c$$

(۲)-۲۶

$$I(x) = \int e^{\ln x} dx = \int x dx = \frac{1}{x} x^x + c \Rightarrow I(1) = \frac{1}{1} + 1 = \frac{2}{1}$$

(۳)-۲۷

$$u = x^x \Rightarrow du = x dx, dv = e^{-x} dx \Rightarrow v = -e^{-x}$$

$$\int x^x e^{-x} dx = -x^x e^{-x} - \int -x^x e^{-x} dx$$

$$u = -x^x \Rightarrow du = -x dx, dv = e^{-x} dx \Rightarrow v = -e^{-x}$$

$$F(x) = -x^x e^{-x} - \left(x^x e^{-x} - \int x^x e^{-x} dx \right) = -e^{-x} (x^x + x^x + 1) + c$$

(۳)-۲۸

$$f(x) = \cos^x x + \sin x = \frac{1}{x} (\cos^x x + 1) + \sin x = \frac{1}{x} \cos^x x + \sin x + \frac{1}{x}$$

$$F(x) = \frac{1}{x} \sin^x x - \cos x + \frac{1}{x} + c$$

(۴)-۲۹

$$f(x) = \wedge(x + \imath)^{-\imath} \Rightarrow F(x) = -\imath(x + \imath)^{-\imath} + c = \frac{-\imath}{(x + \imath)^{\imath}} + c$$

$$F(\imath) = -\frac{\imath}{\imath^{\imath}} + c = \imath \Rightarrow c = \imath \Rightarrow F(x) = \frac{-\imath}{(x + \imath)^{\imath}} + \imath \Rightarrow F(\circ) = -\imath$$

(۴)-۳۰

$$\int \frac{dx}{x^{\imath}(\imath + x)} = \int \frac{(\imath + x) - x}{x^{\imath}(\imath + x)} dx = \int \frac{dx}{x^{\imath}} - \int \frac{dx}{x(\imath + x)} = \int x^{-\imath} dx - \int \frac{(\imath + x) - x}{x(\imath + x)} dx$$

$$= -\frac{\imath}{x} - \int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{\imath + x} = -\frac{\imath}{x} - \ln x + \ln(\imath + x) + c = -\frac{\imath}{x} + \ln \frac{x + \imath}{x} + c$$

(۱)-۳۱

$$x + \imath = t \Rightarrow dx = dt \longrightarrow I = \int \frac{(t - \imath)e^{t-\imath}}{t^{\imath}} dt$$

$$I = \int \frac{e^{t-\imath}}{t} dt - \int \frac{e^{t-\imath}}{t^{\imath}} dt \longrightarrow e^{t-\imath} = u \Rightarrow e^{t-\imath} dt = du, \frac{dt}{t^{\imath}} = dv \Rightarrow v = -\frac{\imath}{t}$$

$$I = \int \frac{e^{t-\imath}}{t} dt - \left(-\frac{\imath}{t} e^{t-\imath} + \int \frac{\imath}{t} e^{t-\imath} dt \right) = \int \frac{e^{t-\imath}}{t} dt + \frac{\imath}{t} e^{t-\imath} - \int \frac{e^{t-\imath}}{t} dt$$

$$I = \frac{\imath}{t} e^{t-\imath} + c = \frac{e^x}{x + \imath} + c \xrightarrow{c = -\imath, x = \imath} I = \imath - \imath = \circ$$

(۴)-۳۲

$$\sin \imath x \cos \imath x = \frac{\imath}{\imath} [\sin(\imath x + \imath x) + \sin(\imath x - \imath x)] = \frac{\imath}{\imath} (\sin \varphi x + \sin \imath x)$$

$$\int \frac{\imath}{\imath} (\sin \imath x + \sin \varphi x) dx = \frac{\imath}{\imath} \left(-\frac{\imath}{\imath} \cos \imath x - \frac{\imath}{\varphi} \cos \varphi x \right) + c = -\frac{\imath}{\imath \imath} \cos \varphi x - \frac{\imath}{\imath} \cos \imath x + c$$

(۲)-۳۳

$$\int \frac{dx}{x \ln x} = \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} dx = \ln(\ln x) \Rightarrow F(x) = \ln(\ln x)$$

$$F(e^{\imath}) - F(e) = \ln(\ln e^{\imath}) - \ln(\ln e) = \ln \imath - \ln \imath = \ln \imath$$

(۳)-۳۴

$$f(x) = \tan^{\imath} x = \tan^{\imath} x + \tan^{\imath} x - \tan^{\imath} x = \tan^{\imath} x (\tan^{\imath} x + \imath) - \tan^{\imath} x - \imath + \imath$$

$$f(x) = (\imath + \tan^{\imath} x) \tan^{\imath} x - (\imath + \tan^{\imath} x) + \imath \Rightarrow F(x) = \frac{\imath}{\imath} \tan^{\imath} x - \tan x + x + c$$

(۳)-۳۵ از طرفین تساوی داده شده نسبت به x مشتق می‌گیریم:

$$mf'(mx + n) = \imath f'(mx - \imath) \longrightarrow m = \imath, n = -\imath \Rightarrow m + n = \imath$$

(۳)-۳۶ چون $F(x) = \int f(x) dx$ ، لذا $F(x)$ یک تابع اولیه $f(x)$ است:

$$\int f(ax + b) dx = \frac{\imath}{a} F(ax + b) + c$$

۳۷- (۴) توابع f و g و h بر بازه $[0, 1]$ پیوسته است، پس بر این بازه انتگرال پذیر است. ولی تابع ℓ بر این بازه پیوسته نمی باشد زیرا $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ell(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0^-} \ell(x) = -\infty$ بنابراین انتگرال پذیر نیست.

(۳)-۳۸

$$\int_1^n [x] dx = \frac{n(n-1)}{2} \Rightarrow \int_1^5 [x] dx = \frac{5 \times 4}{2} = 10$$

(۱)-۳۹

$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \quad , \quad \frac{x}{x-2} \left| \begin{array}{ccc} -\infty & 2 & +\infty \\ - & 0 & + \end{array} \right.$$

$$\int_1^2 |x-2| dx = \int_1^2 (-x+2) dx + \int_2^2 (x-2) dx = \left(-\frac{x^2}{2} + 2x \right) \Big|_1^2 + \left(\frac{x^2}{2} - 2x \right) \Big|_2^2 = 1$$

(۱)-۴۰

$$x = 2 \sin t \Rightarrow dx = 2 \cos t dt, x = 2 \Rightarrow 2 = 2 \sin t \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}, x = 0 \Rightarrow 0 = 2 \sin t \Rightarrow t = 0$$

$$I = \int_0^{\pi/2} \sqrt{4 - 4 \sin^2 t} \cdot 2 \cos t dt = \int_0^{\pi/2} 4 \cos^2 t dt = \int_0^{\pi/2} 2 \left(\frac{1 + \cos 2t}{2} \right) dt = (2t + \sin 2t) \Big|_0^{\pi/2} = \pi$$

(۳)-۴۱

$$\int \frac{\sin x}{\sqrt{1 + \tan^2 x}} dx = \int \frac{\sin x}{\sqrt{1/\cos^2 x}} dx = \int \frac{\sin x}{1/\cos x} dx = \int \sin x \cos x dx$$

$$= \int \frac{1}{2} \sin 2x dx = \frac{1}{2} \int \sin 2x dx = -\frac{1}{4} \cos 2x + c \Rightarrow F(x) = -\frac{1}{4} \cos 2x + c$$

$$F(\pi) - F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{4}$$

(۱)-۴۲ می دانیم $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ و $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \sqrt{1 + \sin^2 x} dx = \int_{\pi/2}^{\pi} \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x + \sin^2 x} dx =$$

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \sqrt{(\sin x + \cos x)^2} dx = \int_{\pi/2}^{\pi} (\sin x + \cos x) dx = (-\cos x + \sin x) \Big|_{\pi/2}^{\pi} = 0$$

۴۳- (۴) به ترتیب $\sin^2 x$ و $x^{1/2}$ توابعی فرد و زوج هستند و می دانیم حاصل ضرب آن ها یک تابع فرد است:

$$\int_{-\pi}^{\pi} x^{1/2} \sin^2 x dx = 0$$

(۳)-۴۴

$$\int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 2x dx + \int_1^2 (2x-1) dx = \left[\frac{2x^2}{2} \right]_1^2 + \left[x^2 - x \right]_1^2 = \frac{5}{2}$$

(۳)-۴۵

$$\int_2^a 2x^2 dx = x^3 \Big|_2^a = 2^3 \Rightarrow a^3 - 2^3 = 2^3 \Rightarrow a^3 = 2^6 \Rightarrow a = 2^2 = 4$$

(۱)-۴۶

$$u = x \Rightarrow du = dx, dv = f''(x)dx \Rightarrow v = f'(x)$$

$$I = x f'(x) \Big|_0^2 - \int_0^2 f'(x) dx = x f'(x) \Big|_0^2 - f(x) \Big|_0^2 = 2f'(2) - f(2) + f(0)$$

۴۷- (۱) $\cos x$ تابعی زوج و $\ln \frac{2+x}{2-x}$ تابعی فرد است، می‌دانیم حاصل ضرب یک تابع زوج و یک تابع فرد، تابعی فرد است و نیز می‌دانیم اگر $f(x)$ تابعی فرد باشد، آن‌گاه $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$.

(۳)-۴۸

$$\frac{1}{2} < x < 1 \Rightarrow 1 < \frac{1}{x} < 2 \Rightarrow \left[\frac{1}{x} \right] = 1$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \left[\frac{1}{x} \right] \frac{dx}{x^2} = \int_{1/2}^1 x^{-2} dx = -\frac{1}{x} x^{-1} \Big|_{1/2}^1 = -\frac{1}{1} + 2 = \frac{1}{2}$$

(۴)-۴۹

$$I = \int_0^1 \frac{x+2-2}{x+2} dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{2}{x+2} \right) dx = x - 2 \ln(x+2) \Big|_0^1$$

$$I = 1 - 2 \ln 3 + 2 \ln 2 = 1 + 2(\ln 2 - \ln 3) = 1 + 2 \ln \frac{2}{3}$$

(۱)-۵۰

$$\frac{d}{dx} \int_1^{\sin x} (t^2 + 1)^2 dt = (\sin^2 x + 1)^2 \cdot \frac{d(\sin x)}{dx} = 1 \frac{d(1)}{dx} = \cos x (\sin^2 x + 1)^2$$

(۲)-۵۱

$$u = 1 + 2x \Rightarrow x = \frac{u-1}{2} \Rightarrow dx = \frac{du}{2}, x=0 \Rightarrow u=1, x=2 \Rightarrow u=5$$

$$I = \int_1^5 \frac{u-1}{2} \cdot u^{-1/2} \frac{du}{2} = \frac{1}{4} \int_1^5 (u^{1/2} - u^{-1/2}) du = \frac{1}{4} \left(\frac{2}{3} u^{3/2} - 2u^{1/2} \right) \Big|_1^5 = \frac{1}{3}$$

(۳)-۵۲

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_x^{2x} \frac{dt}{t} = \lim_{x \rightarrow \infty} (\ln t) \Big|_x^{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} [\ln(2x) - \ln(x)] = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{2x}{x} \right) = \ln 2$$

(۱)-۵۳

$$I = \int_{\pi/4}^{\pi/2} (\tan^2 x + \cot^2 x + 2 \tan x \cdot \cot x) dx = \int_{\pi/4}^{\pi/2} (\tan^2 x + \cot^2 x + 2) dx$$

$$I = \int_{\pi/4}^{\pi/2} (\tan^2 x + 1 + \cot^2 x + 1) dx = (\tan x - \cot x) \Big|_{\pi/4}^{\pi/2} = \frac{2\sqrt{2}}{2}$$

۵۴- (۴) انتگرال‌های ۱ و ۲ و ۳ در حدود انتگرال پیوسته نیستند و بنابراین انتگرال پذیر نمی‌باشند، اما:

$$\int_0^2 \frac{x^2-1}{x-1} dx = \int_0^2 (x+1) dx$$

(۳)-۵۵

$$\int_0^1 f'(x) dx = f(x) \Big|_0^1 = f(1) - f(0) = 1 - 0 = 1$$

(۲)-۵۶

$$f(x) = \int_{\sqrt{x}}^x t^{-1/2} dt = (-2t^{-1/2}) \Big|_{\sqrt{x}}^x \Rightarrow F(x) = -\frac{2}{\sqrt{x}} + 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{2}{\sqrt{x}} + 1 \right) = 0 + 1 = 1$$

(۱)-۵۷

$$F'(x) = x^2 + x \Rightarrow F''(x) = 2x + 1 \Rightarrow F''(2) = 1 \cdot 2 + 1 = 3$$

(۳)-۵۸

$$0 < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow 1 < \sin x + \cos x < \sqrt{2} \Rightarrow [\sin x + \cos x] = 1$$

$$\int_0^{\pi/2} (\sin x + \cos x) dx = (-\cos x + \sin x) \Big|_0^{\pi/2} = 1 - (-1) = 2$$

(۴)-۵۹

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x} dx = 1 \ln |x| \Big|_1^b = 1 \ln |b| - 1 \ln |1| = 1 \ln |b|$$

اگر $b \rightarrow \infty$, $1 \ln |b| \rightarrow \infty$. در نتیجه انتگرال ناسره واگراست و دارای مقدار معینی نمی‌باشد.

(۲)-۶۰

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sec x \cdot \tan x}{\sec x} = \tan x \Rightarrow \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 + \tan^2 x} dx = \int_0^{\pi/2} \sec x dx$$

$$\ln(\sec x + \tan x) \Big|_0^{\pi/2} = \ln(2 + \sqrt{2})$$

(۲)-۶۱ زیرا اگر $0 < x < 1$ باشد، آنگاه $\sqrt{x} > x^2$ است.

(۱)-۶۲

$$f'(x) = xe^{-x^2} \Rightarrow xe^{-x^2} = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = f(0) = 0 \Rightarrow (0, 0)$$

(۲)-۶۳

$$A.V = \frac{1}{\frac{\pi}{2} - 0} \int_0^{\pi/2} \tan x dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\frac{2}{\pi} \ln \cos x \Big|_0^{\pi/2} = \frac{2 \ln 2}{\pi}$$

(۱)-۶۴

$$\frac{dy}{dx} = x^2 - 2x + 2 \Rightarrow \frac{d^2 y}{dx^2} = 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1$$

(۲)-۶۵

$$\int_1^x \frac{dt}{t} = \ln t \Big|_1^x = \ln x \xrightarrow{0 < x < 1} \ln x < 0$$

(۲)-۶۶

$$y = \frac{1}{r} x^r - \frac{1}{r} \ln x \Rightarrow y' = x - \frac{1}{rx}$$

$$\int_1^r \sqrt{1 + \left(x - \frac{1}{rx}\right)^2} dx = \int_1^r \left(x + \frac{1}{rx}\right) dx = \left(\frac{x^2}{2} + \frac{\ln x}{r}\right) \Big|_1^r = \frac{r}{2} + \frac{1}{r} \ln r$$

(۱)-۶۷

$$u = vx \Rightarrow du = v dx, dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x$$

$$\int vx e^x dx = vx e^x - \int e^x v dx = vx e^x - v e^x + c$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} vx e^x dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^{\infty} vx e^x dx = (vx e^x - v e^x) \Big|_a^{\infty} = -v - v a e^a + v e^a$$

وقتی که $e^a \rightarrow 0$, $a \rightarrow -\infty$ در نتیجه انتگرال هم‌گرا و برابر $-v$ است.

(۱)-۶۸

$$u = \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x}, x = 1 \Rightarrow u = 0, x = e \Rightarrow u = 1$$

$$I = \int_1^e \frac{(\ln x)^r}{x} dx = \int_0^1 u^r du = \frac{1}{r+1} u^{r+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{r+1}$$

(۱)-۶۹

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{r} (\sin 5x - \sin x) dx = \left(-\frac{1}{r} \cos 5x + \frac{1}{r} \cos x\right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{2}{r}$$

(۴)-۷۰

$$f''(x) = \sin \frac{x}{r} \Rightarrow f'(x) = -r \cos \frac{x}{r} + c \Rightarrow f(x) = -r \sin \frac{x}{r} + cx + d$$

(۳)-۷۱

$$\frac{d}{dx} \left(\int_0^y e^t dt + \int_0^x \cos t dt \right) = 0 \Rightarrow e^y \cdot \frac{dy}{dx} + \cos x = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{\cos x}{e^y}$$

(۳)-۷۲ $|x|$ تابعی زوج است، بنابراین:

$$\int_{-11}^{11} |x| dx = 2 \int_0^{11} |x| dx = 2 \int_0^{11} x dx = 2 \times \frac{x^2}{2} \Big|_0^{11} = (11)^2$$

(۲)-۷۳

$$\frac{1}{(x-3)(x+3)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+3} \Rightarrow \frac{1}{(x-3)(x+3)} = \frac{(A-B)x + 3A - 3B}{(x-3)(x+3)}$$

$$\begin{cases} A-B=0 \\ 3A-3B=1 \end{cases} \Rightarrow A=\frac{1}{6}, B=-\frac{1}{6}$$

(۱)-۷۴

$$\frac{dL'}{dt} = \frac{\sin t'}{t} \times 1 - 0 = \frac{\sin t'}{t}$$

از طرفی:

$$\int_0^t \cos tx \, dx = \left[\frac{1}{t} \sin tx \right]_0^t = \frac{\sin t'}{t}$$

۷۵-(۳) تابع $f(x) = 1/x^r$ در $x = 0$ ناپیوسته و $\lim_{x \rightarrow 0} 1/x^r = \infty$ بنابراین:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^r} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x^r} + \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_{\delta}^1 \frac{dx}{x^r} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(-\frac{1}{x} \right) \Big|_{-1}^{-\varepsilon} + \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \left(-\frac{1}{x} \right) \Big|_{\delta}^1 \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right) + \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{\delta} - 1 \right) \end{aligned}$$

هیچ‌کدام از دو حد بالا موجود نمی‌باشد و انتگرال ناسره واگراست.

۷۶-(۴) تابع $f(x) = \ln x$ در فاصله $[0, 1]$ پیوسته و $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x) = -\infty$ بنابراین:

$$I = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^1 \ln x \, dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (x \ln x - x) \Big|_{\varepsilon}^1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (0 - 1 - \varepsilon \ln \varepsilon + \varepsilon) = -1 - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (\varepsilon \ln \varepsilon),$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (\varepsilon \ln \varepsilon) = 0 \times \infty, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon \ln \varepsilon = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\ln \varepsilon}{\frac{1}{\varepsilon}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{1}{\varepsilon}}{-\frac{1}{\varepsilon^2}} = 0 \Rightarrow I = -1$$

۷۷-(۴) تابع $f(x) = 1/\sqrt{r^2 - x^2}$ در فاصله $[0, r]$ پیوسته و $\lim_{x \rightarrow r^-} 1/\sqrt{r^2 - x^2} = +\infty$ بنابراین:

$$\begin{aligned} \int_0^r \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_0^{r-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \sin^{-1} \frac{x}{r} \Big|_0^{r-\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\sin^{-1} \frac{r-\varepsilon}{r} - \sin^{-1} 0 \right) = \sin^{-1} 1 - 0 = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

(۱)-۷۸

$$\begin{aligned} u = x^r &\Rightarrow du = r x^{r-1} dx, \quad \int_1^r r x^{r-1} dx = \frac{1}{r} \int_1^r r^u du = \frac{1}{r} \times \frac{1}{\ln r} \times r^u \Big|_1^r \\ &= \frac{1}{r \ln r} (r^r - 1) \simeq \frac{1}{r \times 0.693147} \times 2555 \simeq 122.63 \end{aligned}$$

(۲)-۷۹

$$\int_1^r \frac{dx}{x^2 + x} = \int_1^r \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx = \ln x \Big|_1^r - \ln(x+1) \Big|_1^r = \ln \frac{r}{1} + \ln 1 \Rightarrow \ln \frac{r}{1} = \ln A \Rightarrow A = \frac{r}{1}$$

(۳)-۸۰

$$A = \int_0^1 \left(rx + \frac{1}{x^2 + 1} \right) dx = \left(x^2 + \text{Arc tan } x \right) \Big|_0^1 = 1 + \frac{\pi}{4}$$

(۲)-۸۱

$$I = \frac{0}{0} \Rightarrow I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^r}{r x^r} = \frac{1}{r}$$

(۱)-۸۲

$$u = 1 + \sin \sqrt{x} \Rightarrow du = \frac{1}{\sqrt{x}} \cos \sqrt{x} dx$$

$$I = \int \frac{du}{u} = \ln |u| + c = \ln |1 + \sin \sqrt{x}| + c$$

(۲)-۸۳

$$u = \cos^x x \Rightarrow du = -x \cos x \sin x dx \Rightarrow du = -\sin x dx$$

$$I = \int \frac{\sin x}{\sqrt{1 - \cos^x x}} dx = - \int \frac{du}{\sqrt{1 - u^x}} = -\sin^{-1} \frac{u}{1} + c = -\sin^{-1} \cos^x x + c$$

(۱)-۸۴

$$\int \left(1 - \frac{1}{x^x} \right) dx = x + \frac{1}{x} + c = \frac{x^x + 1}{x} + c \Rightarrow f(x) = x^x + 1$$

(۱)-۸۵

$$f(x) = \int_1^x t^t dt \Rightarrow f'(x) = x^x = e^{x \ln x} \Rightarrow f''(x) = (\ln x + 1) e^{x \ln x}$$

$$f''(x) = (\ln x + 1) x^x = (\ln x + 1) f'(x)$$

(۲)-۸۶

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a) \Rightarrow \int_1^x \frac{1}{x} dx = f(x)(x-1) \Rightarrow \ln x \Big|_1^x = \frac{1}{c}$$

$$\ln x - \ln 1 = \frac{1}{c} \Rightarrow c = \frac{1}{\ln x}$$

(۳)-۸۷

$$\int dy = \int e^x (x+1) dx, u = x+1 \Rightarrow du = dx, e^x dx = dv \Rightarrow e^x = v$$

$$y = (x+1)e^x - \int e^x dx \Rightarrow y = (x+1)e^x - e^x + c \Rightarrow y = xe^x + c$$

$$\text{مبدأ مختصات } (0,0) \Rightarrow 0 = 0 + c \Rightarrow c = 0 \Rightarrow y = xe^x$$

(۱)-۸۸

$$y''' = x \Rightarrow y'' = \frac{1}{2}x^2 + c \xrightarrow{\text{نقطه عطف}} 0 = -x + c \Rightarrow c = x$$

$$y'' = \frac{1}{2}x^2 + x \Rightarrow y' = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + c \xrightarrow{\text{نقطه صفر}} 0 = 0 + 0 + c \Rightarrow c = 0$$

$$y' = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 \Rightarrow y = \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{6}x^3 + c \xrightarrow{\text{نقطه } (1,1)} 1 = 0 + 0 + c \Rightarrow c = 1$$

(۲)-۸۹

$$y' = \int (x^x - x + 1) dx \Rightarrow y' = \frac{1}{x^x} - \frac{1}{x} + x + c \xrightarrow{\text{min}(0,0)} c = 0$$

$$y = \int \left(\frac{1}{x^x} - \frac{1}{x} + x \right) dx \Rightarrow y = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^2 + c \xrightarrow{\text{مبدأ } (0,0)} c = 0$$

(۳)-۹۰

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 6x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 3x^2 + c, y = x - 2 \Rightarrow m = y' = 1$$

$$1 = 3 + c \Rightarrow c = -2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 3x^2 - 2 \Rightarrow y = x^3 - 2x + c,$$

$$1 = 3 + c \Rightarrow c = -2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 3x^2 - 2 \Rightarrow y = x^3 - 2x + c,$$

$$1 = 3 + c \Rightarrow c = -2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 3x^2 - 2 \Rightarrow y = x^3 - 2x + c,$$

$$\int_{-1}^1 |x + |x|| dx = \int_{-1}^1 2x dx = x^2 \Big|_{-1}^1 = 1$$

(۲)-۹۲

$$y = x^2 - 4x = x(x - 4) = 0 \Rightarrow x = 0, x = \pm 4$$

$$S = \left| \int_{-4}^0 (x^2 - 4x) dx \right| + \left| \int_0^4 (x^2 - 4x) dx \right| = \left| \left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 \right) \Big|_{-4}^0 \right| + \left| \left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 \right) \Big|_0^4 \right| = 8$$

(۳)-۹۳

$$S = \left| \int_{-\pi/2}^0 \sin x dx \right| + \left| \int_0^{\pi/2} \sin x dx \right| = \left| (-\cos x) \Big|_{-\pi/2}^0 \right| + \left| (-\cos x) \Big|_0^{\pi/2} \right| = 2$$

(۱)-۹۴

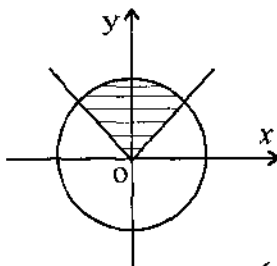
$$S = \int_{-2}^2 x dx = \left| \int_{-2}^0 x dx \right| + \left| \int_0^2 x dx \right| = \left| \frac{x^2}{2} \Big|_{-2}^0 \right| + \left| \frac{x^2}{2} \Big|_0^2 \right| = 4$$

(۲)-۹۵

$$x^2 - 2|x| = 0 \Rightarrow |x|(|x| - 2) = 0 \Rightarrow x = 0, x = \pm 2$$

به دلیل تقارن منحنی نسبت به محور عرض‌ها می‌توان نوشت:

$$S = \left| 2 \int_0^2 (x^2 - 2x) dx \right| = \left| 2 \left(\frac{x^3}{3} - x^2 \right) \Big|_0^2 \right| = \frac{8}{3}$$



(۱)-۹۶ با توجه به شکل رسم شده، خواهیم داشت:

$$S = \frac{\pi R^2}{4} = \frac{16\pi}{4} = 4\pi$$

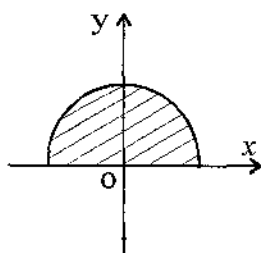
(۳)-۹۷

$$y = \sqrt{x}|x - 1| = \begin{cases} \sqrt{x}(1 - x) & 0 \leq x \leq 1 \\ \sqrt{x}(x - 1) & x > 1 \end{cases}, D_f = [0, +\infty)$$

$$S = \int_0^1 [\sqrt{x}(1 - x) - \sqrt{x}(x - 1)] dx = \int_0^1 2\sqrt{x}(1 - x) dx = 2 \int_0^1 (\sqrt{x} - x\sqrt{x}) dx$$

$$S = 2 \int_0^1 (x^{1/2} - x^{3/2}) dx = 2 \left(\frac{2}{3} x^{3/2} - \frac{2}{5} x^{5/2} \right) \Big|_0^1 = \frac{8}{15}$$

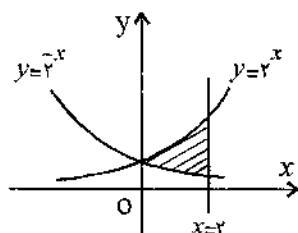
(۱)-۹۸



$$y = \sqrt{1-x^2} \Rightarrow y^2 = 1-x^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$$

$$S = \frac{\pi R^2}{2} = \frac{\pi(1)^2}{2} = \frac{\pi}{2}$$

(۱)-۹۹

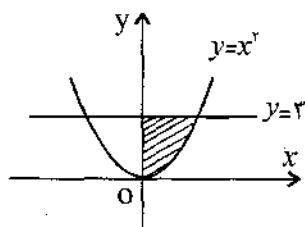


$$r^x = r^{-x} \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow (0, 1)$$

$$x = r \Rightarrow y = r^r = r, y = r^{-r} = \frac{1}{r}$$

$$S = \int_0^r (r^x - r^{-x}) dx = \left[\frac{r^x}{\ln r} + \frac{r^{-x}}{\ln r} \right]_0^r = \frac{r}{r \ln r} \approx 2.72$$

(۲)-۱۰۰



$$(y = x^r, y = r) \Rightarrow x^r = r \Rightarrow x = \sqrt[r]{r} \rightarrow (\sqrt[r]{r}, r)$$

$$S = \int_0^{\sqrt[r]{r}} (r - x^r) dx = \left(rx - \frac{1}{r+1} x^{r+1} \right) \Big|_0^{\sqrt[r]{r}} = r\sqrt[r]{r}$$

(۴)-۱۰۱

$$x - x^r = ax \Rightarrow x(1-x-a) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 1-a$$

$$S = \int_0^{1-a} (x - x^r - ax) dx = (1-a) \frac{x^r}{r} - \frac{x^r}{r} \Big|_0^{1-a} = \frac{(1-a)^r}{r} - \frac{(1-a)^r}{r} = \frac{(1-a)^r}{r}$$

$$\Rightarrow \frac{(1-a)^r}{r} = \frac{1}{r} \Rightarrow (1-a)^r = 1 \Rightarrow (1-a)^r = r^r \Rightarrow a = -2$$

(۲)-۱۰۲

$$y = (x-r)(x-r)(x+1) = 0 \Rightarrow x = r, x = r, x = -1$$

$$S = \int_{-1}^r (x^r - rx^r + x + r) dx - \int_r^r (x^r - rx^r + x + r) dx + \int_r^r (x^r - rx^r + x + r) dx$$

$$S = \left(\frac{1}{r+1} x^{r+1} - \frac{r}{r+1} x^{r+1} + \frac{1}{2} x^2 + rx \right) \Big|_{-1}^r - \left(\frac{1}{r+1} x^{r+1} - \frac{r}{r+1} x^{r+1} + \frac{1}{2} x^2 + rx \right) \Big|_r^r + \left(\frac{1}{r+1} x^{r+1} - \frac{r}{r+1} x^{r+1} + \frac{1}{2} x^2 + rx \right) \Big|_r^r = \frac{r}{r+1}$$

(۴)-۱۰۳

$$y = 1 + r \sin x \cos x = 1 + \sin 2x$$

$$S = \int_0^{\pi/r} (1 + \sin 2x) dx = \left(x - \frac{1}{2} \cos 2x \right) \Big|_0^{\pi/r} = \frac{\pi}{r} - \left(-\frac{1}{2} \right) = \frac{\pi}{r} + \frac{1}{2}$$

(۱)-۱۰۴

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1 \Rightarrow \sqrt{y} = 1 - \sqrt{x} \Rightarrow y = 1 - 2\sqrt{x} + x, x \geq 0$$

$$S = \int_0^1 (1 - 2\sqrt{x} + x) dx = \left(x - \frac{4}{3} x^{3/2} + \frac{1}{2} x^2 \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{6}$$

(۲)-۱۰۵

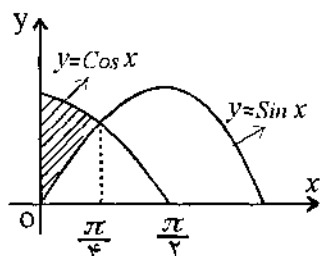
$$y = \sqrt{\frac{x}{3} - 1} \Rightarrow y^2 = \frac{x}{3} - 1 \Rightarrow x = 3y^2 + 3$$

$$S = \int_0^1 (3y^2 + 3) dy = (y^3 + 3y) \Big|_0^1 = 4$$

(۲)-۱۰۶ نقاط تقاطع دو منحنی را به دست می آوریم:

$$\sin x = \cos x \Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = 1 \Rightarrow \tan x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$$

$$S = \int_0^{\pi/4} (\cos x - \sin x) dx = (\sin x + \cos x) \Big|_0^{\pi/4} = \sqrt{2} - 1$$



(۲)-۱۰۷ نقاط تقاطع منحنی $y = \cos x + 1$ را به ترتیب با محور y ها، خط $3/2$ و محور x ها به دست می آوریم:

$$x = 0 \Rightarrow y = \cos(0) + 1 = 1 + 1 \Rightarrow (0, 2), \frac{3}{2} = \cos x + 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$$

$$y = 0 \Rightarrow 0 = \cos x + 1 \Rightarrow \cos x = -1 \Rightarrow x = \pi$$

$$S = \int_0^{\pi/2} \left(\cos x + 1 - \frac{3}{2} \right) dx + \int_{\pi/2}^{\pi} \left(\frac{3}{2} - \cos x - 1 \right) dx$$

$$= \left(\sin x - \frac{x}{2} \right) \Big|_0^{\pi/2} + \left(\frac{x}{2} - \sin x \right) \Big|_{\pi/2}^{\pi} = \sqrt{2} + \frac{\pi}{2}$$

(۴)-۱۰۸ $\ln x = \ln 2 \Rightarrow x = 2, \ln x = \ln 4 \Rightarrow x = 4$

برای ساده کردن مسئله می توان $S = \int_2^4 (\ln x - \ln 2) dx$ را تابعی از y به شمار آوریم. یعنی $y = \ln x \Rightarrow x = e^y$. اکنون فاصله $y = \ln 2$ تا $y = \ln 4$ را افزایش دهیم، زیرا نقطه تلاقی $(4, \ln 4)$ و $y = \ln x$ است. در نتیجه:

$$S = \int_{\ln 2}^{\ln 4} (e^y - e^y) dy = (e^y - e^y) \Big|_{\ln 2}^{\ln 4} = 4 \ln 2 - 2$$

(۱)-۱۰۹ خط $y = ax + b$ از نقاط $(-3, 0)$ و $(-1, 2)$ می گذرد، بنابراین $2 = 0/a + 3 = 2 - 0/a + 3$

نتیجه معادله خط $2y = 2x + 6$ یا $y = x + 3$

$$S = \int_{-3}^{-1} (x^2 + 3x^2 - x - 3) dx + \int_{-1}^1 (x + 3 - x^2 - 3x^2) dx$$

$$S = \left(\frac{x^3}{3} + x^2 - \frac{x}{2} - 3x \right) \Big|_{-3}^{-1} + \left(\frac{x^2}{2} + 3x - \frac{x^3}{3} - x^2 \right) \Big|_{-1}^1 = \frac{3}{2}$$

(۳)-۱۱۰

$$xy = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{x}, \int_{a-1}^{a+1} \frac{1}{x} dx = \ln x \Big|_{a-1}^{a+1} = \ln(a+1) - \ln(a-1) = \ln \frac{a+1}{a-1}$$

(۲)-۱۱۱

$$V = \int_{-\pi}^{\pi} \pi(f(x))^2 dx = \pi \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x dx = \pi \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{\pi}{2} \left(x - \frac{1}{2} \sin 2x \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{\pi^2}{2}$$

(۲)-۱۱۲

$$\sqrt{r} = \frac{1}{r} \sqrt{16 - x^2} \Rightarrow 12 = 16 - x^2 \Rightarrow x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$$

$$V = \int_{-2}^2 \pi y^2 dx = \pi \int_{-2}^2 \frac{1}{r} (16 - x^2) dx = \pi \left(16x - \frac{1}{12} x^3 \right) \Big|_{-2}^2 = \frac{224\pi}{3}$$

(۴)-۱۱۳

$$y = f(x) = \sqrt[3]{x^3} = 0 \Rightarrow x = 0, V = \int_0^1 \pi (\sqrt[3]{x^3})^2 dx = \pi \left(\frac{1}{\sqrt[3]{11}} x^{11/3} \right) \Big|_0^1 = \frac{3\pi}{11}$$

(۲)-۱۱۴

$$V = \int_1^2 \pi (2 - x^2) dx = \pi \left(2x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_1^2 = \frac{4}{3}\pi$$

(۲)-۱۱۵

$$9x^2 + 9y^2 = 36 \Rightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} = 1 \rightarrow a = 2, b^2 = 4$$

$$V = \frac{4}{3} \pi a b^2 = \frac{4}{3} \pi (2)(4) = \frac{64}{3} \pi$$

(۴)-۱۱۶

$$V = \int_{-\pi}^{\pi} \pi \left(\sin \frac{x}{2} \right)^2 dx = \pi \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1 - \cos x}{2} \right) dx = \frac{\pi}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos x) dx$$

$$V = \frac{\pi}{2} (x - \sin x) \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{\pi^2}{2}$$

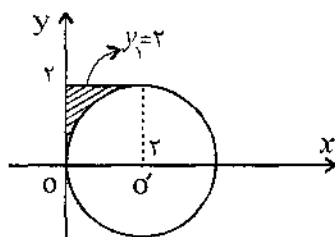
(۴)-۱۱۷

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} \pi (3/14)(4)^3 = 256\pi/7$$

(۳)-۱۱۸ معادله دایره رسم شده به صورت $(x-2)^2 + y^2 = 4$ و معادله خط $y=2$ است.

$$V = \pi \int_0^2 (y_1^2 - y^2) dx = \pi \int_0^2 [4 - (4 - (x-2)^2)] dx$$

$$V = \pi \int_0^2 (x-2)^2 dx = \pi \left[\frac{(x-2)^3}{3} \right]_0^2 = \frac{8\pi}{3}$$



(۳)-۱۱۹

$$V = \int_0^r r \pi x(x^r) dx = r \pi \int_0^r x^r dx = r \pi \left(\frac{x^{r+1}}{r+1} \right) \Big|_0^r = \frac{\pi}{r+1}$$

(۳)-۱۲۰

$$I = \int_0^{\ln 2} \int_{e^y}^2 dx dy = \int_0^{\ln 2} x \Big|_{e^y}^2 dy = \int_0^{\ln 2} (2 - e^y) dy = (2y - e^y) \Big|_0^{\ln 2}$$

$$I = 2 \ln 2 - e^{\ln 2} - (0 - e^0) = 2 \ln 2 - 2 + 1 = 2 \ln 2 - 1$$

(۱)-۱۲۱

$$I = \int_0^2 \int_0^{y^2} \sin \pi y^2 dx dy = \int_0^2 x \sin \pi y^2 \Big|_0^{y^2} dy = \int_0^2 y^2 \sin \pi y^2 dy$$

$$I = -\frac{1}{3\pi} \cos \pi y^3 \Big|_0^2 = -\frac{1}{3\pi} + \frac{1}{3\pi} = 0$$

(۳)-۱۲۲

$$\int_0^1 \int_0^z \int_0^{y+z} e^x e^y e^z dx dy dz = \int_0^1 \int_0^z e^x \Big|_0^{y+z} e^y e^z dy dz$$

$$= \int_0^1 \int_0^z (e^{y+z} - 1) e^y e^z dy dz = \int_0^1 \left(\frac{1}{y} e^{y+z} - e^y \right) \Big|_0^z e^z dz$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{y} e^{yz} - \frac{y}{y} e^z + 1 \right) e^z dz = \left(\frac{1}{y} e^{yz} - \frac{y}{y} e^z + e^z \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{y} e^y - \frac{y}{y} e^y + e - \frac{y}{y}$$

(۳)-۱۲۴

$$I = \int_0^2 \int_0^{\sqrt{x+1}} \sqrt{x+1} y^2 dy dx = \int_0^2 \left(\sqrt{x+1} \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^{\sqrt{x+1}} dx$$

$$= \int_0^2 \frac{(\sqrt{x+1})(\sqrt{x+1})^3}{3} dx = \int_0^2 \frac{(x+1)^2}{3} dx = \frac{(x+1)^3}{9} \Big|_0^2 = \frac{8}{9} = \frac{8}{9}$$

۱۲۵- (۱) مجانب مایل تابع به صورت $y = x$ است، بنابراین:

$$S = \int_1^2 \left(\frac{x^2+1}{x^2} - x \right) dx = \int_1^2 \frac{dx}{x^2} = \left(-\frac{1}{x} \right) \Big|_1^2 = \frac{1}{2}$$

(۳)-۱۲۶

$$dy = \frac{y^2 dx}{\sin^2 x} \Rightarrow -\frac{dy}{y^2} = -(\cot^2 x) dx \Rightarrow \frac{1}{y} = \cot x + c$$

$$\left(\frac{\pi}{2}, 1 \right) \Rightarrow 1 = 1 + c \Rightarrow c = 0, \frac{1}{y} = \cot x \Rightarrow y = \tan x$$

(۲)-۱۲۷

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(x^2) dx = 2 \int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$$

(۱)-۱۲۸

$$I = \int_1^2 \left| \left(\frac{1}{y^2} x^y + 2y^y x \right) \right|_{xy/y^2}^y dy = \int_1^2 \left(1 + 2y^y - \frac{1}{y^2} y^y - 2y^y \right) dy$$

$$I = 1y + 2y^y - \frac{22}{22} y^y \Big|_1^2 = \frac{25}{2}$$

(۲)-۱۲۹

$$\int_1^2 \int_1^{2x} xy dy dx = \int_1^2 \left. \frac{x}{2} y^2 \right|_1^{2x} dx = \int_1^2 2x^2 dx = \left. \frac{2}{3} x^3 \right|_1^2 = 8$$

(۳)-۱۳۰

$$I = \int_1^{\ln 2} \int_{e^y}^2 dx dy = \int_1^{\ln 2} x \Big|_{e^y}^2 dy = \int_1^{\ln 2} (2 - e^y) dy = 2y - e^y \Big|_1^{\ln 2} = 2 \ln 2 - 1$$

۱۳۱-(۲) ترتیب انتگرال‌گیری را عوض می‌کنیم زیرا $\int_x^\pi \sin y / x dy$ را نمی‌توان محاسبه کرد، ناحیه انتگرال‌گیری را به فرم زیر در نظر می‌گیریم. $0 \leq y \leq \pi$ و $0 \leq x \leq y$.

$$\int_0^\pi \int_0^y \frac{\sin y}{y} dx dy = \int_0^\pi \left. \frac{\sin y}{y} (x) \right|_0^y dy = \int_0^\pi \sin y dy = -\cos y \Big|_0^\pi = 2$$

۱۳۲-(۳) ترتیب انتگرال را عوض می‌کنیم، ناحیه انتگرال‌گیری را به فرم زیر در نظر می‌گیریم:

$$0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2x$$

$$I = \int_0^1 \int_0^{2x} ye^{x^y} dy dx = \int_0^1 e^{x^y} \left(\frac{1}{y} y^y \right) \Big|_0^{2x} dx = 2 \int_0^1 x^2 e^{x^2} dx = \left. \frac{2}{3} e^{x^2} \right|_0^1 = \frac{2}{3}(e - 1)$$

(۲)-۱۳۳

$$\int_{1/2}^1 \int_{1-x}^x \frac{1}{x+y} dy dx = \int_{1/2}^1 \ln(x+y) \Big|_{1-x}^x dx = \int_{1/2}^1 \ln 2x dx$$

$$2x = u \Rightarrow 2dx = du, x = \frac{1}{2} \Rightarrow u = 1, x = 1 \Rightarrow u = 2$$

$$\frac{1}{2} \int_1^2 \ln u du = \left. \frac{1}{2} (u \ln u - u) \right|_1^2 = \ln 2 - \frac{1}{2}$$

(۲)-۱۳۴

$$I = \int_0^{\pi/2} \int_0^z -\cos(x+y+z) \Big|_0^y dy dz = \int_0^{\pi/2} \int_0^z -\cos(y+z) dy dz$$

$$I = \int_0^{\pi/2} \left(-\frac{1}{2} \sin(2y+z) \right) \Big|_0^z dz = \int_0^{\pi/2} \left(-\frac{1}{2} \sin 2z + \frac{1}{2} \sin z \right) dz$$

$$I = \left. \left(-\frac{1}{4} \cos 2z + \frac{1}{2} \cos z \right) \right|_0^{\pi/2} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

(۳)-۱۳۵

$$x^{\frac{1}{2}}y + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow y = \frac{\frac{1}{2}}{x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}}, y > 0$$

$$S = \int_{-1}^1 \frac{\frac{1}{2}}{x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}} dx = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} \tan^{-1} \frac{x}{\frac{1}{2}} \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) = \frac{\pi}{4}$$

(۱)-۱۳۶

$$\frac{\frac{1}{x^2 + 4x + 6}}{x^2 + 4x + 6} = \frac{\frac{1}{(x+1)(x+6)}}{x^2 + 4x + 6} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+6} = \frac{(A+B)x + 7A+B}{(x+1)(x+6)}$$

$$A+B=0, 7A+B=1 \Rightarrow A=\frac{1}{5}, B=-\frac{1}{5}$$

$$I = \int \frac{\frac{1}{5}}{x+1} dx + \int \frac{-\frac{1}{5}}{x+6} dx = \frac{1}{5} \ln |x+1| - \frac{1}{5} \ln |x+6| + c = \frac{1}{5} \ln \left| \frac{x+1}{x+6} \right| + c$$

(۴)-۱۳۷

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 - (x^2 - 4x + 1)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{3x^2 - (x-2)^2}} = \text{Arc sin} \left(\frac{x-2}{2} \right) + c$$

(۱)-۱۳۸

$$I = \int (x+2) \sin(x^2 + 4x - 6) dx = \frac{1}{2} \int (2x+4) \sin(x^2 + 4x - 6) dx$$

$$I = -\frac{1}{2} \cos(x^2 + 4x - 6) + c$$

(۲)-۱۳۹

$$x = 2 \cos \theta \Rightarrow dx = -2 \sin \theta d\theta, y = 2 \sin \theta \Rightarrow dy = 2 \cos \theta d\theta$$

$$I = \int_{\pi/2}^0 (2 \cos \theta)(2 \sin \theta)(-2 \sin \theta) d\theta = 8 \int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta \cos \theta d\theta = \frac{8}{3} \sin^3 \theta \Big|_0^{\pi/2} = \frac{8}{3}$$

(۲)-۱۴۰

$$\int \frac{1}{1+x^2} \text{Arc tan } x dx = \frac{1}{2} (\text{Arc tan } x)^2 + c$$

(۱)-۱۴۱

$$I(x) = \int \frac{x-1+1}{(x-1)^{1/2}} dx = \int [(x-1)^{1/2} + (x-1)^{-1/2}] dx$$

$$I(x) = \frac{2}{3} (x-1)^{3/2} + \frac{2}{1/2} (x-1)^{1/2} + c$$

$$I(2) = \frac{2}{3} + \frac{2}{1/2} + c, I(0) = -\frac{2}{3} + \frac{2}{1/2} + c$$

$$I(2) - I(0) = \frac{2}{3} + \frac{2}{1/2} + c + \frac{2}{3} - \frac{2}{1/2} - c = \frac{4}{3}$$

(۴)-۱۴۲

$$\begin{aligned}
 I(x) &= \int \frac{x-2+3}{\sqrt{x-2}} dx = \int \frac{x-2}{(x-2)^{1/2}} dx + \int \frac{3}{(x-2)^{1/2}} dx \\
 I(x) &= \int (x-2)^{1/2} dx + \int 3(x-2)^{-1/2} dx = \frac{2}{3}(x-2)^{3/2} - 6(x-2)^{1/2} + c \\
 I(3) &= \frac{2}{3} - 6 + c, \quad I(1) = -\frac{2}{3} + 6 + c \\
 I(3) - I(1) &= \frac{2}{3} - 6 + c + \frac{2}{3} - 6 + c = \frac{4}{3}
 \end{aligned}$$

(۴)-۱۴۳

$$\begin{aligned}
 I &= \int_1^2 \frac{t^2 + 2t + 1 + 1}{t^2 + 2t + 1} dt = \int_1^2 dt + \int_1^2 \frac{1}{(t+1)^2} dt \\
 I &= t \Big|_1^2 - \frac{1}{t+1} \Big|_1^2 = 2 - \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}
 \end{aligned}$$

(۱)-۱۴۴

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^1 \frac{2x^2 + 2x + 1}{x^2 + 1} dx = \int_0^1 \left(2x + \frac{1}{x^2 + 1} \right) dx \\
 I &= x^2 + \text{Arctan } x \Big|_0^1 = 1 + \frac{\pi}{4}
 \end{aligned}$$

(۳)-۱۴۵

$$\begin{aligned}
 \sqrt{x+1} = t &\Rightarrow x = t^2 - 1 \Rightarrow dx = 2t dt, \quad x = 3 \Rightarrow t = 2, \quad x = 0 \Rightarrow t = 1 \\
 I(t) &= \int \frac{(t^2-1)^2}{t} \times 2t dt = 2 \int (t^2 - 2t^4 + 1) dt = 2 \left(\frac{t^3}{3} - \frac{2}{5} t^5 + t \right) \\
 I(2) - I(1) &= 2 \left(\frac{8}{3} - \frac{2}{5}(8) + 2 \right) - 2 \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{5} + 1 \right) = \frac{76}{15}
 \end{aligned}$$

باسخ تشریحی سوالات تستی فصل ۷

(۱)-۱

$$\begin{bmatrix} -2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = (-2 \times 5 + 3 \times 2 + 4 \times 3) = 8$$

۲- (۴) به نکات مهم (۷-۱۷) مراجعه کنید.

۳- (۴) از ضرب دو ماتریس اول و دوم خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} 2x + 4x - 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow 2x^2 + 4x + 4x - 8 - 4 = 0 \Rightarrow 2x^2 + 8x - 12 = 0$$

$$x' \cdot x'' = \frac{c}{a} = -\frac{12}{2} = -6$$

(۳)-۴

$$A_{r \times r} B_{m \times n} C_{p \times r} \Rightarrow B_{r \times p}$$

$\swarrow \quad \searrow$
 $m=r \quad n=r$

(۴)-۵

(۲)-۶ با توجه به نکات مهم (۲۱-۷) خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \times 2 & -1 \times 3 & 3 \times 4 \\ 1 \times 2 & 4 \times 3 & 1 \times 4 \\ 3 \times 2 & 2 \times 3 & 1 \times 4 \end{bmatrix}$$

(۲)-۷

ستون سوم $(B + C) \times$ سطر دوم $A =$ عنصر سطر دوم ستون سوم $A(B + C)$

$$= [a_{r1} \ a_{r2} \ \dots \ a_{rn}] \begin{bmatrix} b_{1r} + c_{1r} \\ b_{2r} + c_{2r} \\ \vdots \\ b_{nr} + c_{nr} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n a_{rk} (b_{kr} + c_{kr})$$

(۴)-۸

(۲)-۹

$$A^T = A^T \cdot A = A \cdot A = A$$

$$B^T = (2A - I)^T = 2A^T - 12A^T + 6A - I = 2A - 12A + 6A - I = 2A - I = B$$

$$A^T + B^T = A + B$$

۱۰-۱۱) برای این که ماتریسی قطری باشد، باید عناصر بالا و پایین قطر اصلی آن صفر باشند، پس:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow y + 2 = 0 \Rightarrow y = -2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow x + 4x = 0 \Rightarrow x = -1$$

(۲)-۱۱

$$A^T = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = 4I \rightarrow A^A = (A^T)^T = (4I)^T = 256I^T = 256I$$

(۳)-۱۲

$$A(-B) = -AB = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & -2 \\ -3 & -6 \end{bmatrix}$$

(۱)-۱۳

۱۴- (۳)

۱۵- (۴)

۱۶- (۳)

$$|A| = (6 + 0 + 0) - (10 + 0 + 0) = -4$$

$$A^{-1} \text{ عنصر سطر اول ستون سوم} = \frac{1}{|A|} (\text{adj } A)_{13} = -\frac{1}{4} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{4}(-2) = \frac{1}{2}$$

۱۷- (۲)

$$(BA) \text{ ستون دوم} = B \times (A \text{ ستون دوم}) = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix}$$

۱۸- (۲) زیرا:

$$(A - A')' = A' - (A')' = A' - A$$

$$(AB' + BA')' = (AB')' + (BA')' = BA' + AB'$$

$$(B'AB)' = B'A'(B')' = B'A'B$$

۱۹- (۲) زیرا هر دو ماتریس به صورت $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$ با هم جابه‌جا می‌شوند.

۲۰- (۳) ماتریس A از درجه ۳ است و با ضرب عدد ۳ در کلیه عناصر آن ۳ برابر می‌شود.

$$|3A| = 3^3 |A| = 27(3) = 81$$

۲۱- (۱) برای این که $A = B$ باشد، بایستی عناصر آن‌ها نظیر به نظیر برابر باشند، یعنی:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases} \Rightarrow x = 2, y = 1 \quad \begin{cases} -a + 1 = a \Rightarrow a = \frac{1}{2} \\ 2b = b \Rightarrow b = 0 \end{cases}$$

۲۲- (۲)

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases} \Rightarrow x = 2, y = 1 \Rightarrow x + y = 3$$

۲۳- (۳)

۲۴- (۲) چون هر عنصرش در m ضرب شده است و خود از درجه n است، پس دترمینان آن در m^n ضرب می‌شود.

۲۵- (۱)

$$f(A) = 3A^T - 4I_4 = 3 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}^T - 4 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 15 \\ 0 & 23 \end{bmatrix}$$

(۴)-۲۶

$$\cos \theta \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} + \sin \theta \begin{bmatrix} \sin \theta & -\cos \theta \\ \cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \cos \theta \sin \theta \\ -\sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sin^2 \theta & -\sin \theta \cos \theta \\ \sin \theta \cos \theta & \sin^2 \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

۲۷-(۱) زیرا با قرار دادن $x = 1$ ، ستون اول و سوم متناسب می‌شوند. بنابراین مقدار دترمینان صفر می‌شود.

(۲)-۲۸

$$AX = A' \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

با توجه به گزینه‌های داده شده، محاسبه a و c کافی است. یعنی:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a + 3c = 1 \\ 2a + 5c = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2a - 6c = -2 \\ 2a + 5c = 3 \end{cases} \Rightarrow c = -1, a = 4$$

(۱)-۲۹

$$|B| + |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 12 & 2 \\ 4 & 8 & 11 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 4 & 20 \\ 4 & 8 & 11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 5 & 4 \\ 4 & 8 & 11 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 8 & 16 & 22 \\ 4 & 8 & 11 \end{vmatrix} = 0$$

(۱) (۲)

(۱) چون سطرهاى اول و سوم یکسان می‌باشند، (۲) چون سطر دوم و سوم متناسب‌اند، دترمینان مساوی صفر است.

(۲)-۳۰

$$|A| = \begin{vmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha & \sin(\alpha + \beta) \\ \sin \gamma & \cos \gamma & \sin(\gamma + \beta) \\ \sin \varphi & \cos \varphi & \sin(\varphi + \beta) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha & \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha \\ \sin \gamma & \cos \gamma & \sin \gamma \cos \beta + \sin \beta \cos \gamma \\ \sin \varphi & \cos \varphi & \sin \varphi \cos \beta + \sin \beta \cos \varphi \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha & \sin \alpha \cos \beta \\ \sin \gamma & \cos \gamma & \sin \gamma \cos \beta \\ \sin \varphi & \cos \varphi & \sin \varphi \cos \beta \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha & \sin \beta \cos \alpha \\ \sin \gamma & \cos \gamma & \sin \beta \cos \gamma \\ \sin \varphi & \cos \varphi & \sin \beta \cos \varphi \end{vmatrix} = 0 + 0 = 0$$

زیرا در هر یک از دترمینان‌های فوق، دو ستون متناسب وجود دارد. بنابراین مقدار دترمینان هریک از آن‌ها صفر است.

(۲)-۳۱

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix} = A \Rightarrow A^T = A$$

$$A^T = A^T.A = A.A = A^T = A \Rightarrow \dots \Rightarrow A^n = A$$

تذکره: اگر A خود توان باشد، یعنی $A^T = A$ آن‌گاه $A^n = A$.

(۱)-۳۲

$$B' = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, (B')^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$AB' = 2B \Rightarrow AB'B'^{-1} = 2BB'^{-1} \Rightarrow AI = 2BB'^{-1} \Rightarrow A = 2 \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 6 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$$

(۲)-۳۳

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (0 + 0 + 2) - (0 + 1 + 12) = -11, |A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = -\frac{1}{11}$$

(۴)-۳۴

$$BB' = A^{-1}A'(A^{-1}A')' = A^{-1}A'A(A')^{-1} = A^{-1}A'A(A')^{-1} = II = I \Rightarrow (BB')^{-1} = I$$

(۴)-۳۵

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} |M_{ij}| \Rightarrow A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = -6$$

۳۶- (۳) ستون دوم و سوم و چهارم را به ستون اول اضافه می‌کنیم. یعنی:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

(۲)-۳۷

$$A^T = A^T.A = (3A)A = 3A^T = 3(3A) = 3^2A$$

$$A^T = A^T.A = (3^2A)A = 3^2A^T = 3^2(3A) = 3^3A$$

$\vdots$

$$A^{100} = 3^{99}A$$

(۱)-۳۸

$$(A^{-1})^{-1} = A \Rightarrow (A^{-1})^{-1} = \frac{1}{|A^{-1}|} \text{adj} A^{-1} = 1 \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(B^{-1})^{-1} = B \Rightarrow (B^{-1})^{-1} = \frac{1}{|B^{-1}|} \text{adj} B^{-1} = (-1) \times \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$-3AB = -3 \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = -3 \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -3 \\ -12 & 3 \end{bmatrix}$$

۳۹- (۴) اگر $(x, y) = (6, 8)$ را در درمیان جاگذاری نماییم، سطر اول مجموع سطرهای دوم و سوم است که مساوی صفر می‌شود.

۴۰- (۳)

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -3 & 7 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -26, A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -17, A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 15$$

۴۱- (۲) به‌طور کلی اگر A یک ماتریس بالامثلثی (پایین‌مثلثی) 3×3 باشد، آن‌گاه $A^T = \bar{O}$.

۴۲- (۴)

$$(XY)^{-1} = \frac{1}{4} Y^{-1} X^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

۴۳- (۱) درمیان 5×5 دارای 5^2 عنصر و $5!$ جمله است.

۴۴- (۲) اگر $x = 0$ باشد، درمیان به‌علت داشتن یک ستون صفر برابر صفر می‌شود. اگر $x = a$ باشد، درمیان دو ستون نظیر به نظیر یکسان دارد و معادل صفر می‌شود. و اگر $x = b$ باشد، درمیان دو ستون نظیر به نظیر یکسان دارد و معادل صفر می‌شود و با توجه به فرض که $a > b > 0$ نتیجه می‌شود که سه ریشه متمایز دارد.

۴۵- (۱)

$$A_{rr} = (-1)^{r+r} |M_{rr}| = - \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -(12 + 2) = -14$$

۴۶- (۲) داریم $|A|^T = |AA'| = |A||A'|$ پس $|A| = \sqrt{|AA'|}$ از طرفی

$$|AA'| = 4 \Rightarrow |A| = \sqrt{4} = \pm 2$$

۴۷- (۴) می‌دانیم ضرب دو ماتریس وقتی قابل‌تعریف است که تعداد ستون‌های ماتریس اول با تعداد سطرهای ماتریس دوم برابر باشد، بنابراین:

$$A.B = [a_{ij}]_{2 \times 2} [b_{ij}]_{2 \times 2} \rightarrow 3 \neq 4, A'.B = [a_{ji}]_{2 \times 2} [b_{ij}]_{2 \times 2} \rightarrow 2 \neq 4$$

$$B.A = [b_{ij}]_{2 \times 2} [a_{ij}]_{2 \times 2} \rightarrow 3 \neq 2, A.B' = [a_{ij}]_{2 \times 2} [b_{ji}]_{2 \times 2} \rightarrow 3 = 3$$

۴۸- (۴) نکته: اگر دو ماتریس با درجه‌های $m \times n$ و $n \times m$ در هم ضرب شوند و $m > n$ باشد، حاصل که یک ماتریس مربع است درمیانانش صفر است.

۴۹- (۳) ماتریس A معکوس‌پذیر است در نتیجه $|A| \neq 0$ پس:

$$|AA'| = |A||A'| = |A||A| = |A|^2 \neq 0$$

۵۰- (۳) درمیان داده شده (-1) برابر سطر اول را به سایر سطرها اضافه می‌کنیم، یعنی:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1-1 & 1+a-1 & 1-1 & 1-1 \\ 1-1 & 1-1 & 1+b-1 & 1-1 \\ 1-1 & 1-1 & 1-1 & 1+c-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c \end{vmatrix} = abc$$

۵۱- (۳) اگر دو سطر را در ۳ ضرب کنیم، دترمینان در $3 \times 3 = 9$ ضرب می‌شود و اگر سه ستون آن را در ۳- ضرب کنیم، دترمینان $-27 = (-3)(-3)(-3)$ ضرب می‌شود، پس در کل دترمینان در $9 \times (-27)$ ضرب شده است، یعنی -243 .

۵۲- (۱)

$$\begin{vmatrix} x & y & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (x + 0 - 2y) - (2 + 0 + 0) = x - 2y - 2 = 0 \Rightarrow m = -\frac{a}{b} = \frac{1}{2}$$

۵۳- (۲) نکته:

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \Rightarrow \text{adj } A = \begin{bmatrix} bc & 0 & 0 \\ 0 & ac & 0 \\ 0 & 0 & ab \end{bmatrix}$$

۵۴- (۲)

$$|A| = \begin{vmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{vmatrix} = -\cos^2 \theta - \sin^2 \theta = -(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = -1$$

۵۵- (۲) زیرا وارون هر ماتریس پایین مثلثی یک ماتریس پایین مثلثی است.

۵۶- (۱) دترمینان ماتریس باید مخالف صفر باشد.

$$\begin{vmatrix} a-1 & 1 \\ -2 & a \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow a^2 - a - 2 \neq 0 \rightarrow a \neq -1, a \neq 2$$

۵۷- (۴) می‌دانیم معکوس هر ماتریس قطری در صورت وجود یک ماتریس قطری است که عناصر واقع بر قطر آن معکوس واقع بر قطر ماتریس می‌باشند، بنابراین:

$$A^{-1}B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

۵۸- (۴) می‌دانیم $X^{-1}Y^{-1}Z^{-1} = (ZYX)^{-1}$ پس:

$$X^{-1}(X^{-1} + Y^{-1})^{-1}Y^{-1} = [Y(X^{-1} + Y^{-1})X]^{-1} = (YX^{-1}X + YY^{-1}X)^{-1} = (Y + X)^{-1}$$

۵۹- (۲)

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{-2-2} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} -\frac{2}{4} & \frac{2}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{vmatrix} = -\frac{2}{16} - \frac{2}{16} = -\frac{4}{16} = -\frac{1}{4}$$

یا می‌دانیم اگر ماتریس A معکوس‌پذیر باشد آن‌گاه $AA^{-1} = I$ بنابراین:

$$|AA^{-1}| = |I| = 1 \Rightarrow |A||A^{-1}| = 1 \Rightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = -\frac{1}{4}$$

(۳)-۶۰

$$|M_{21}| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 0 = 2$$

(۱)-۶۱

$$A' = \lambda A \Rightarrow (A')' = (\lambda A)' \Rightarrow A = \lambda A' \Rightarrow A = \lambda(\lambda A) \Rightarrow A = \lambda^2 A$$

$$\lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda = \pm 1$$

(۳)-۶۲ با توجه به اینکه $A^T = \bar{O}$ بنابراین:

$$(I - A)(I + A + A^T) = I^T - A^T = I^T - \bar{O} = I \Rightarrow (I - A) = \frac{I}{I + A + A^T}$$

$$(I - A)^{-1} = I + A + A^T$$

(۱)-۶۳

(۴)-۶۴

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -7 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow A - A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -7 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & m & 1 \\ 1 & 0 & m \\ m & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow m^2 + 1 = 0 \Rightarrow m = -1$$

(۴)-۶۵ زیرا به ازای $m = -1$ دترمینان این ماتریس برابر صفر است.

(۲)-۶۶

$$\begin{vmatrix} 1 & \log a & \log bc \\ 1 & \log b & \log ac \\ 1 & \log c & \log ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \log a & \log bc + \log a \\ 1 & \log b & \log ac + \log b \\ 1 & \log c & \log ab + \log c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \log a & \log abc \\ 1 & \log b & \log abc \\ 1 & \log c & \log abc \end{vmatrix} = 0$$

(۱)-۶۷ طبق فرمول $A_{ij} = (-1)^{i+j} |M_{ij}|$ خواهیم داشت:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} [1] = 1$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} [-2] = 2$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} [2] = -2$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} [-1] = -1$$

$$\text{cof. } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{adj } A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

(۳)-۶۸ به طور کلی هرگاه دو ماتریس $A_{m \times 2}$ و $B_{n \times 2}$ در هم ضرب شوند و $m > n$ باشد، ماتریس AB که از درجه $m \times m$ است، دترمینانش صفر است.

(۱)-۶۹

$$A = \left(\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \right)^{-1} \times \left(\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & \frac{1}{8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(۱)-۷۰

$$A^T - I_T = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 9 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 9 & -3 \end{bmatrix}$$

(۴)-۷۱ درمیان A برابر صفر است زیرا همه عناصر سطر سوم مساوی صفرند، بنابراین باید درمیان‌های درجه دو را در نظر بگیریم. اگر حداقل یکی از این درمیان‌ها مخالف صفر باشد، مرتبه ماتریس A دو می‌باشد، مثلاً:

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 9 - 6 = 3 \Rightarrow r(A) = 2$$

(۳)-۷۲ می‌دانیم اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & 0 \end{bmatrix}$ آن‌گاه $\text{adj } A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -ab \\ 0 & -ac & 0 \\ -bc & 0 & 0 \end{bmatrix}$ بنابراین $\text{adj } A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -12 \\ 0 & -8 & 0 \\ -6 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

در نتیجه مجموع عناصر قطری $\text{adj } A$ برابر -8 است.

(۱)-۷۳

$$A^{-1} = \frac{1}{3-2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow A^{-1} \text{ مجموع عناصر قطری} = 1 + 3 = 4$$

(۲)-۷۴

$$|A| = (12 + 12 + 18) - (12 + 18 + 12) = 0 \Rightarrow |A| = 0 \Rightarrow r(A) < n$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2 \Rightarrow r(A) = 2$$

(۱)-۷۵ داریم $|A| = 2$ ، اگر A'_{11} عنصر مربوط به سطر دوم و ستون اول ماتریس الحاقی ماتریس A باشد، آن‌گاه A'_{11} برابر است با A_{12} عنصر متناظر در ماتریس همساز که به صورت زیر می‌توان آن را به دست آورد:

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad A'^{-1}_{11} = \frac{A'_{11}}{|A|} = \frac{0}{2} = 0$$

توجه: با توجه به صورت مسأله نیازی به محاسبه سایر عناصر نمی‌باشد.

(۳)-۷۶ $|A| = (-1 + 2 + 0) - (0 + 4 + 1) = -4 \neq 0$ می‌دانیم اگر $|A| \neq 0$ باشد $r(A^{-1}.A) = n$

بنابراین $r(A^{-1}.A) = 3$

(۴)-۷۷ $|B| \neq 0$ و $|C| \neq 0$ با توجه به تذکر ۹ قسمت (۵۳-۷) داریم: $r(A.B.C) = r(A) = 3$ چون $|A| \neq 0$.

(۲)-۷۸

$$\begin{bmatrix} 4 & -5 & -7 \\ 3 & 2 & -6 \\ 1 & -7 & -1 \end{bmatrix} = (-8 + 147 + 30) - (-14 + 15 + 168) = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -7 \end{vmatrix} = -23 \neq 0$$

$$\begin{bmatrix} 4 & -5 & -7 & | & 6 \\ 3 & 2 & -6 & | & 10 \\ 1 & -7 & -1 & | & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 4 & -5 & 6 \\ 3 & 2 & 10 \\ 1 & -7 & 5 \end{bmatrix} = (40 - 50 - 126) - (12 - 75 - 280) = 207 \neq 0$$

بنابراین $r(A) = 2$ و $r(A|B) = 3$ در نتیجه $r(A) \neq r(A|B)$.
۷۹- (۲) در دستگاه معادلات همگن شرط جواب غیرصفر، صفر شدن دترمینان ضرایب است.

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 2 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow a^2 - 3a - 4 = 0 \Rightarrow (a-4)(a+1) = 0 \Rightarrow a' = 4, a'' = -1$$

۸۰- (۴) چون تعداد معادلات از تعداد مجهولات بیش‌تر است، پس دستگاه جواب ندارد.

۸۱- (۲) باید دترمینان ماتریس ضرایب صفر باشد.

$$\begin{vmatrix} 1 & m & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ m & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (0 + 2 + m^2) - (0 + 1 - 2m) \Rightarrow m^2 + 2m + 1 = 0 \Rightarrow m = -1$$

۸۲- (۳) باید دترمینان ماتریس ضرایب مخالف صفر باشد.

$$\begin{vmatrix} 2 & m \\ n & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow 2 - mn \neq 0 \Rightarrow mn \neq 2$$

۸۳- (۱)

$$\begin{aligned} [A|B] &= \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & m & 2 \\ 1 & m & 2 & 2 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & m+2 & 1 \\ 0 & m-1 & 3 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & m+2 & 1 \\ 0 & 0 & -(m+2)(m-1)+4 & 2-m \end{array} \right] \\ &\quad \begin{matrix} (-2R_1+R_2, -R_1+R_3) & & -(m-1)R_1+R_3 \end{matrix} \\ &= \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & m+2 & 1 \\ 0 & 0 & -(m+2)(m-1)+4 & 2-m \end{array} \right] \rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_2 + (m+2)x_3 = 1 \\ -(m+2)(m-1)x_3 = 2-m \end{cases} \end{aligned}$$

دستگاه جواب منحصر به فرد دارد هرگاه ضرایب x_3 در معادله سوم، مخالف صفر باشد، یعنی $m \neq 2$ و $m \neq -3$.

۸۴- (۴) چون تعداد مجهولات بیش‌تر از تعداد معادلات است، پس دستگاه معادلات خطی بی‌شمار جواب دارد.

۸۵- (۴)

$$A = \frac{1}{1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \Rightarrow r(A) = 2, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -5 \Rightarrow r(A|B) = 2 = r(A) = r(A|B) = 2 < 3$$

۸۶- (۳) دستگاه معادلات به دست آمده در تست ۸۳ را ملاحظه فرمایید. به ازای $m = 2$ معادله سوم به صورت $x_3 = 0$

درمی آید که در این حالت دستگاه به صورت

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_2 + 4x_3 = 1 \end{cases}$$

درمی آید که بی‌شمار جواب دارد.

(۱)-۸۷

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{cof. } A = \begin{bmatrix} -1 & -5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{adj } A = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$$

(۲)-۸۸ درمیان ضرایب ماتریس باید مساوی صفر باشد، یعنی:

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow (abc + abc + abc) - (c^3 + b^3 + a^3) = 0 \Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$$

(۴)-۸۹ از دستور کرامر استفاده می‌کنیم:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & -4 & -1 \end{vmatrix} = 9, \quad |A_1| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -2 & -4 & -1 \end{vmatrix} = -9$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -9, \quad |A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & -4 & -2 \end{vmatrix} = -9$$

$$\left(x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = 1, x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = 1, x_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = 1 \right) \Rightarrow 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 5$$

(۲)-۹۰ در دستگاه معادله همگن $\begin{cases} ax_1 + bx_2 = 0 \\ a'x_1 + b'x_2 = 0 \end{cases}$ اگر $a/a' = b/b'$ آنگاه دستگاه جواب غیرصفر حتماً دارد. یعنی:

$$\frac{a-1}{1} = \frac{4}{3} \Rightarrow 3a - 3 = 4 \Rightarrow a = \frac{7}{3}$$

یا درمیان ماتریس ضرایب باید مساوی صفر باشد، یعنی:

$$\begin{vmatrix} a-1 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3a - 3 - 4 = 0 \Rightarrow a = \frac{7}{3}$$

(۳)-۹۱

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{-2+4} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

(۲)-۹۲ چهار معادله دستگاه خطی را با هم جمع می‌کنیم:

$$2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

(۳)-۹۳ چون تعداد مجهولات از تعداد معادلات بیش‌تر است، بنابراین دستگاه بی‌شمار جواب دارد.

(۱)-۹۴

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -4 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = -16 \neq 0 \Rightarrow r(A) = 3$$

$$\Rightarrow r(A) = r(A|B) = n$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 10 \\ 2 & -4 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 10 \\ 2 & -4 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \end{bmatrix} = 17 \neq 0 \Rightarrow r(A|B) = 3$$

۹۵- (۲) عنصر واقع در سطر دوم ستون اول A^{-1} یعنی $A_{21}/|A|$

$$|A| = -2, A_{21} = (-1)^{2+1}(-4) = 4 \Rightarrow \frac{A_{21}}{|A|} = \frac{4}{-2} = -2$$

۹۶- (۱)

$$A^T = \begin{bmatrix} 0 & \sin \theta \\ \csc \theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \sin \theta \\ \csc \theta & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I \Rightarrow A^{2*} = (A^T)^{1*} = I^{1*} = I$$

۹۷- (۳) می‌دانیم $2 + 4(106) = 426$ بنابراین:

$$A^{426} = (A^T)^{106} \cdot A^T = I^{106} \cdot A^T = A^T$$

۹۸- (۱) باید مجموع $A_{12} + A_{22}$ را بیابیم:

$$A_{12} + A_{22} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & b \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} -2 & a \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = -1 + 10 = 9$$

۹۹- (۱) دترمینان هر ماتریس بادمقارن و از درجه فرد برابر صفر است.

۱۰۰- (۱) دترمینان را برحسب سطر اول بسط می‌دهیم:

$$1(-m-0) + m(-1-0) = 6 \Rightarrow m = -3$$

۱۰۱- (۳) می‌دانیم $AA^* = |A|I$ ، بنابراین $|A|I = 216$. در نتیجه $|A|^T = 6$ و $|A| = 6$.

۱۰۲- (۴) زیرا سطر اول و چهارم متناسبند، بنابراین دترمینان مزبور به ازای هر x صفر است.

۱۰۳- (۱) برای تعیین عضو a_{21} از ماتریس $A^T = A \cdot A$ باید سطر دوم ماتریس A را در ستون اول ماتریس A ضرب کنیم.

$$a_{21} = [m \ 1] \begin{bmatrix} 1 \\ m \end{bmatrix} = m \times 1 + 1 \times m = -6 \Rightarrow 2m = -6 \Rightarrow m = -3$$

۱۰۴- (۲)

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 2(-1) + (-1)3 + 3(2) + 0(1) = -2 - 3 + 6 + 0 = 1$$

۱۰۵- (۲)

۱۰۶- (۳)

$$k^T - (tr A)k + |A| = 0 \Rightarrow k^T - (-1-1)k + (1-4) = 0 \Rightarrow k^T + 2k - 3 = 0$$

۱۰۷- (۳) ماتریس A متقارن است و باید بردارهای ویژه آن متعامد باشند، یعنی زاویه 90° درجه با هم بسازند.

۱۰۸- (۱) تساوی داده شده نشان می‌دهد که یکی از مقادیر ویژه ماتریس A برابر -3 است و چون مجموع مقادیر ویژه

$tr A = 9 - 6 = 3$ است. پس مقدار ویژه دیگر A برابر 6 است.

۱۰۹- (۳)

$$A - kI = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-k & 1 \\ 1 & 4-k \end{bmatrix}$$

$$|A - kI| = \begin{vmatrix} 2-k & 1 \\ 1 & 4-k \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (2-k)(4-k) - 1 = 0 \Rightarrow k^2 - 6k + 8 - 1 = 0 \Rightarrow k^2 - 6k + 7 = 0$$

۱۱۰- (۳) چون مجموع مقادیر ویژه یک ماتریس برابر مجموع عناصر قطر اصلی است، پس $x + y = 8$. در نتیجه گزینه‌های ۱ و ۲ غلطاند. از طرفی دترمینان ماتریس مزبور برابر حاصل ضرب مقدارهای ویژه است. در نتیجه باید $xy + 3 = 15$ یا $xy = 12$ باشد، بنابراین گزینه ۳ درست است.

۱۱۱- (۴) هر مضربی از یک بردار ویژه همواره بردار ویژه همانی ماتریس خواهد بود.

۱۱۲- (۲) معادله مفسر ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ به صورت $|A| = (tr A)k - k^T$ است. اثر ماتریس های (tr) داده شده به ترتیب ۳- و ۵ و ۳ و ۵- است. که با توجه به $5k + 6 = k^T$ گزینه ۲ صحیح است.

۱۱۳- (۲) $k^2 - 3k - 4 = 0$ بنویسید $(k-4)(k+1) = 0$ در نتیجه $k = -1$ و $k = 4$ مقادیر ویژه هستند. معادله امتدادهای ویژه ماتریس زیر به صورت $(2-k)x_1 + 2x_2 = 0$.

$$k = \gamma \Rightarrow -\gamma x_1 + \gamma x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2, k = -1 \Rightarrow \gamma x_1 + \gamma x_2 = 0$$

(1)-114

$$k^r - (\delta - \tau + \gamma)k^y - \left(\begin{vmatrix} \delta & \gamma \\ -\gamma & -\tau \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -\tau & -\gamma \\ \gamma & \gamma \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \delta & \gamma \\ \gamma & \gamma \end{vmatrix} \right) k - |A| = 0 \Rightarrow k^r - \tau k^y - \gamma k + \lambda = 0.$$

مجموع ضرایب معادله فوق برابر صفر است. پس $k = 1$ یک ریشه معادله است و بنابراین بر $k - 1$ بخش پذیر است، در نتیجه داریم $0 = (k - 1)(k - 5)(k + 2)$ و خواهیم داشت $k = 1$ و $k = 5$ و $k = -2$ که همان مقادیر ویژه اند.

۱۱۵- (۱) معادله $k^2 - 2k - 10 = 0$ را با فرم کلی آن یعنی $k^2 - (tr A)k + |A| = 0$ مقایسه می‌کنیم. گزینه ۱ غلط است؛ زیرا $(tr A) = 2$.

۱۱۶- (۳) معادله مفسر ماتریس یعنی $0 = k^2 - 5k - 2$ دو جواب دارد. بردارهای ویژه دو راستا دارند و به‌ازای هر راستا دو بردار ویژه یکانی وجود دارد بنابراین برای ماتریس داده شده چهار بردار یکانی وجود دارد.

۱۱۷- (۳) می دانیم مجموع مقادیر ویژه برابر مجموع عناصر واقع بر قطر اصلی است. پس:

$$\log_r^a + \log_r^b = r \Rightarrow \log_r^{ab} = r \Rightarrow ab = r^r \Rightarrow ab = \lambda \Rightarrow ab + 1 = \lambda$$

۱۱۸- (۲) بنابر قضیه کیلی-هاسینیتون، هر ماتریس مربع در معادله مفسرش صدق می‌کند، $A^T - \delta A - I = 0$ بنابراین $A^{-1} = A - \delta I$ ، $A(A - \delta I) = I$.

۱۱۹- (۳) می دانیم مقدار ویژه یک ماتریس قطری، همان عناصر واقع بر قطر اصلی ماتریس است.

نتیجه $|A| = -1$ پس:

$$-(-25 - 14m) = -1 \Rightarrow m = -26$$

(3)-141

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 4 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

۱۲۲- (۲) می‌دانیم مقادیر ویژه (ریشه‌های معادله مفسر) یک ماتریس پایین مثلثی همان عناصر واقع بر قطر اصلی است یعنی ۱ و ۲ و ۳ که حاصل ضرب آن‌ها ۶ است.

۱۲۳- (۴) ماتریس A متعامد است، لذا $|A| = \pm 1$ و می‌دانیم حاصل ضرب مقادیر ویژه همان دترمینان A است.

۱۲۴- (۲) مقادیر ویژه $A + 3I$ عبارتند از $(3 + 3)$ و $(-4 + 3)$ یعنی ۶ و -۱ و همواره دترمینان هر ماتریس عبارت است از حاصلضرب مقادیر ویژه (در صورت وجود) آن، پس $6 \times (-1) = -6$ $|A + 3I|$.

(۲)-۱۲۵

$$k^2 - 3k + 2 - 3m = 0 \Rightarrow \Delta = 9 - 4(2 - 3m) < 0 \Rightarrow 1 + 12m < 0 \Rightarrow m < -\frac{1}{12}$$

(۳)-۱۲۶

(۲)-۱۲۷ چون مقدارهای ویژه A و A^{-1} عکس یکدیگرند، بنابراین ریشه‌های معادله مفسر A^{-1} عکس ریشه‌های معادله مفسر A است. پس باید معادله‌ای تشکیل دهیم که ریشه‌هایش عکس ریشه‌ای معادله $3k^2 - 5k + 2 = 0$ باشد. یعنی $2k^2 - 5k + 3 = 0$.

(۱)-۱۲۸

$$k^2 - 2ak + a^2 + b^2 \Rightarrow \Delta = 4a^2 - 4(a^2 + b^2) = -4b^2$$

بنابراین ماتریس مزبور فقط به‌ازای $b = 0$ ، مقدار ویژه دارد.

(۴)-۱۲۹ مقدار ویژه A^{-1} برابر $1/3$ است، پس مقدار ویژه A برابر ۳ است. در نتیجه مقدار ویژه A^5 برابر 3^5 یا ۲۴۳ است.

(۴)-۱۳۰ داریم $|A| = m^2 - 4$ از طرفی $k_1 = 1/k_2$ پس $k_1 k_2 = 1$ بنابراین $m^2 - 4 = \pm\sqrt{5}$ یا $m^2 - 4 = 1$

(۲)-۱۳۱ می‌دانیم مقادیر ویژه یک ماتریس بالامتلی همان عناصر واقع بر قطر اصلی است. یعنی $k_1 = 1$ و $k_2 = -2$ و $k_2 = 4$ و بنابراین:

$$3A \text{ مقادیر ویژه: } 3k_1, 3k_2, 3k_2 = 3, -6, 12$$

$$A^3 \text{ مقادیر ویژه: } k_1^3, k_2^3, k_2^3 = 1, -8, 64$$

$$A + 2I \text{ مقادیر ویژه: } k_1 + 2, k_2 + 2, k_2 + 2 = 3, 0, 6$$

$$A^{-1} \text{ مقادیر ویژه: } \frac{1}{k_1}, \frac{1}{k_2}, \frac{1}{k_2} = 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}$$

(۱)-۱۳۲ اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ، آنگاه $A^* = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ (ماتریس الحاقی A) در نتیجه $tr(A) = tr(A^*)$ و $|A| = |A^*|$ پس معادله مفسر A و A^* یکسان است و بنابراین مقادیر ویژه A و A^* یکسان است.

(۲)-۱۳۳ مقادیر ویژه A عبارتند از $k_1 = 1/2$ و $k_2 = 1$ پس مقادیر ویژه A^{-2} عبارتند از: $1/k_1^2$ و $1/k_2^2$ یعنی ۱ و ۴.

(۳)-۱۳۴

(۱)-۱۳۵ $k^2 - 4k + 3 = 0$ یا $k_1 = 1$ و $k_2 = 3$ مقادیر ویژه هستند. معادله امتدادهای ویژه ماتریس مزبور به‌صورت $(2 - k)x_1 + x_2 = 0$ در نتیجه:

$$k_1 = 1 \Rightarrow (2 - 1)x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = -x_1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

(۳)-۱۳۶

$$\alpha + \beta = حاصل ضرب مقادیر ویژه = 4 + 1 = 5, \alpha \cdot \beta = 4 - 2 = 2$$

$$(\alpha + \beta) - \alpha\beta = 5^2 - 2 = 23$$

(۴)-۱۳۷

$$k^2 - k^2 - 4k + 4 = 0 \Rightarrow (k - 1)(k - 2)(k + 2) = 0 \Rightarrow k_1 = 1, k_2 = 2, k_3 = 2$$

۱۳۸-۳) A وارون پذیر است. پس $|A| \neq 0$ از طرفی $|A| = k_1 \cdot k_2$ بنابراین:

$$k_1 \cdot k_2 \neq 0 \Rightarrow k_1 \neq 0, k_2 \neq 0$$

۱۳۹-۴) مقادیر ویژه ماتریس $2A - I$ عبارتند از 5 و $2(3) - 1 = 5$ و $2(-1) - 1 = -3$ بنابراین:

$$|2A - I| = (-3)(5) = -15$$
 حاصل ضرب مقدار ویژه ماتریس $(2A - I)$

۱۴۰-۱۱) چون ماتریس A متقارن است، پس دو امتداد ویژه آن بر هم عمودند. خط عمود بر $y + x = 0$ خط به معادله $y - x = 0$ است.

۱۴۱-۴)

$$k_1^T + k_2^T = (k_1 + k_2)^T - 3k_1 k_2 (k_1 + k_2) = (tr A)^T - 3|A|(tr A) \Rightarrow$$

$$k_1^T + k_2^T = (-1)^T - 3(-2 - 4)(-1) = -1 - 18 = -19$$

۱۴۲-۴)

$$\det(A - kI) = \begin{vmatrix} a-k & 0 & 1 \\ 0 & 2-k & 0 \\ 1 & 0 & 3-k \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (a-k) \begin{vmatrix} 2-k & 0 \\ 0 & 3-k \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 2-k \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$(a-k)(2-k)(3-k) - 2 + k = 0 \Rightarrow (2-k)[(a-k)(3-k) - 1] = 0$$

چون $k = 2$ دو بار ریشه معادله فوق است، لذا باید در معادله صدق کند.

$$(a-2)(3-2) - 1 = 0 \Rightarrow a = 3$$

۱۴۳-۴)

$$|A| = 15 + 8 = 23 \neq 0, \quad |B| = 2 - 3 = -1 \neq 0$$

$$|C| = 3 - 14 = -11 \neq 0, \quad |D| = -10 + 10 = 0$$

۱۴۴-۱۱)

۱۴۵-۱۱) اگر k یک مقدار ویژه و X بردار ویژه نظیر به k باشد، داریم $AX = Xk$

$$\begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k \\ 0 \\ -k \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a - 1 = k \Rightarrow a = k + 1 \\ 2 - 2 = 0 \\ 3 - 4 = -k \Rightarrow k = 1 \end{cases} \Rightarrow a = 2$$

۱۴۶-۱۱) می‌دانیم رتبه یک ماتریس برابر است با $\min$ تعداد سطرها یا ستون‌های مستقل خطی، سطر چهارم برابر است با مجموع سطرها اول و سوم:

$$(0, 1, -3, -1) + (1, 0, 1, 1) = (1, 1, -2, 0)$$

و سطر سوم برابر است با مجموع سطر چهارم با دو برابر سطر دوم:

$$(1, 1, -2, 0) + 2(1, 0, 1, 1) = (3, 1, 0, 2)$$

بنابراین تعداد سطرهاى مستقل برابر ۲ است. از طرف دیگر ستون چهارم برابر است با تفاضل ستون اول و دوم:

$$(0, 1, 3, 1) - (1, 0, 1, 1) = (-1, 1, 2, 0)$$

و ستون سوم برابر است با تفاضل ستون چهارم با دو برابر ستون دوم:

$$(-1, 1, 2, 0) - 2(1, 0, 1, 1) = (-3, 1, 0, -2)$$

و تعداد ستون‌های مستقل برابر ۲ است. در نتیجه رتبه ماتریس برابر ۲ است.

۱۴۷- (۱) ستون سوم، ۳ برابر ستون دوم است:

$$(3, 6, 9, 12) = 3(1, 2, 3, 4)$$

لذا تعداد ستون‌های مستقل خطی برابر ۳ می‌باشد. سطر چهارم برابر است با مجموع سطرهاى اول و سوم:

$$(6, 1, 3, 8) + (10, 3, 9, 7) = (16, 4, 12, 15)$$

و سطر سوم برابر است با مجموع سطرهاى اول و دوم:

$$(6, 1, 3, 8) + (4, 2, 6, -1) = (10, 3, 9, 7)$$

لذا تعداد سطرهاى مستقل برابر ۲ است. بنابراین رتبه ماتریس برابر ۲ می‌باشد.

۱۴۸- (۱)

$$AX' = (2, -3, -1) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \frac{\partial}{\partial x}(AX') = (2, -3, -1) = A$$

۱۴۹- (۲)

$$c'y = (3c - 1, c^2 - c, 3c, 1 - c) \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y}(c'y) = c'$$

۱۵۰- (۱)

۱۵۱- (۲)

۱۵۲- (۱)

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \begin{bmatrix} 2 & x_2 x_3 \\ -x_3 & x_1 x_2 + 3x_2 x_3 \\ -x_2 & x_1 x_3 + 3x_1^2 \end{bmatrix} \xrightarrow{x_1=x_2=x_3=1} \frac{\partial y}{\partial x} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

۱۵۳- (۳)

$$\frac{\partial}{\partial x}(X'AX) = 2AX = 2 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 + x_3 \\ 2x_1 + 4x_3 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \end{bmatrix} \xrightarrow{x_1=x_2=x_3=1} 2 \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 12 \\ 10 \end{bmatrix}$$

(۲)-۱۵۴

$$Z'X = \begin{bmatrix} 2 & -x & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = [2x - xy + 3z] \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial z'x}{\partial x} = 2 - y \\ \frac{\partial(z'x)}{\partial y} = -x \\ \frac{\partial(z'x)}{\partial z} = 3 \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial(z'x)}{\partial x} = \begin{bmatrix} 2-y \\ -x \\ 3 \end{bmatrix}$$

(۲)-۱۵۵

پاسخ تشریحی سؤالات تستی فصل ۸

(۳)-۱

$$\vec{MN} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k} \Rightarrow \vec{MN} = (2, -1, 3)$$

$$(2, -1, 3) = (x_N - 0, y_N - 1, z_N + 1) \Rightarrow N(2, 0, 2)$$

(۱)-۲ با توجه به قسمت (۸-۱۲) خواهیم داشت:

$$\frac{m}{2m-1} = \frac{1}{m+2} = \frac{n+1}{m} \Rightarrow m = -1, n = -\frac{4}{3}$$

(۳)-۳

$$\alpha(1, 2) - 2\beta(-2, 1) = (-3, 4) \Rightarrow (\alpha + 4\beta, 2\alpha - 2\beta) = (-3, 4)$$

$$\begin{cases} \alpha + 4\beta = -3 \\ 2\alpha - 2\beta = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + 4\beta = -3 \\ 2\alpha - 4\beta = 8 \end{cases} \Rightarrow \alpha = 1, \beta = -1$$

(۲)-۴

$$\vec{PA} = (1 - a_1, 1 - a_2, 1 - a_3), \vec{PB} = (-1 - a_1, -1 - a_2, -1 - a_3)$$

$$\vec{PA} \cdot \vec{PB} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - 3 = 13 \Rightarrow a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 16$$

$$|\vec{OP}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \sqrt{16} = 4$$

(۱)-۵ می‌دانیم فاصله نقطه $A(x, y, z)$ از محور y ‌ها برابر $\sqrt{x^2 + z^2}$ است یعنی $\sqrt{1+9} = \sqrt{10}$

(۱)-۶

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = |v_1||v_2| \cos \theta \Rightarrow 4 = 2 \times 3 \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = \frac{2}{3}, \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \Rightarrow$$

$$\sin^2 \theta + \frac{4}{9} = 1 \Rightarrow |\sin \theta| = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$|2\vec{v}_1 \times 3\vec{v}_2| = 6|\vec{v}_1||\vec{v}_2| |\sin \theta| = 6 \times 2 \times 3 \times \frac{\sqrt{5}}{3} = 12\sqrt{5}$$

(۲)-۷

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{a} + (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{b}$$

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

(۱)-۸

$$\vec{a} = (2, 0, 2x), \vec{b} = (x, -2, 2), \vec{a} \cdot \vec{b} = 2x + 0 + 2x = 6 \Rightarrow x = 1$$

$$\vec{a} = (2, 0, 2), \vec{b} = (1, -2, 2) \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \sqrt{4} = 2\sqrt{2}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2} = \sqrt{4} = 2, \cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{6}{2\sqrt{2} \times 2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = 45^\circ$$

(۴)-۹

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow 6 + 2 + 2m = 0 \Rightarrow m = -2$$

(۲)-۱۰

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \alpha = 6 \times 5 \times \sin 30^\circ = 30 \times \frac{1}{2} = 15$$

(۴)-۱۱

$$A = 2\vec{a}^T - 6\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{a} - 3\vec{b}^T = 2|\vec{a}|^2 - 6\vec{a} \cdot \vec{b} - 3|\vec{b}|^2$$

$$A = 2 \times 16 - 6 \times 2 \times 3 \cos \frac{\pi}{4} - 3 \times 9 = 32 - 30 - 27 = -25$$

(۴)-۱۲

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = (-x, -x, 1), |\vec{v}_1 \times \vec{v}_2| = \sqrt{1 + 2x^2} = \sqrt{2} \Rightarrow 1 + 2x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm 1$$

(۲)-۱۳

$$\vec{i} \cdot (\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}) = \vec{i} \cdot \vec{i} + \vec{i} \cdot \vec{j} - \vec{i} \cdot \vec{k} = 1 + 0 - 0 = 1$$

(۲)-۱۴

$$\vec{a} = (2x, 2x, -x), |\vec{a}| = \sqrt{4x^2 + 4x^2 + x^2} = 3|x| = 3x, (x > 0)$$

$$2x = 6 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow \vec{a} = (4, 4, -2) \Rightarrow 3\vec{a} = (12, 12, -6)$$

(۳)-۱۵

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{12}{10 \times 2} = \frac{3}{5}, \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \frac{9}{25} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{4}{5}$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \alpha = 10 \times 2 \times \frac{4}{5} = 16$$

(۳)-۱۶

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \alpha \Rightarrow 9 = 12 \sin \alpha \Rightarrow \sin \alpha = \frac{3}{4}$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \frac{9}{16} + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \alpha = 12 \times \frac{\sqrt{7}}{4} = 3\sqrt{7}$$

(۱)-۱۷

$$\cos \alpha = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}} = \frac{6 + 6 - 12}{\sqrt{22} \cdot \sqrt{24}} = 0 \Rightarrow \alpha = 90^\circ$$

۱۸- (۲) چون دو بردار بر هم عمودند $\sin \alpha = 1$.

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \alpha = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|, |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| = 3|\vec{a}| \Rightarrow |\vec{b}| = 3$$

۱۹- (۴)

$$\vec{v} = \vec{a} \times \vec{b}, |\vec{v}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \alpha = 6 \times 3 \times \sin 60^\circ = 9\sqrt{3}$$

$$\vec{v} \parallel \vec{c}: \vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{v} \cdot \vec{c} = |\vec{v}| \cdot |\vec{c}| \cos 0^\circ = 27\sqrt{3}$$

۲۰- (۴)

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0 \Rightarrow 6 + 2m + 26 = 0 \Rightarrow 2m = -42 \Rightarrow m = -21$$

۲۱- (۲)

$$|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \alpha = |\vec{a} \times \vec{b}|, |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha = \vec{a} \cdot \vec{b}$$

$$|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \alpha = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha \Rightarrow \sin \alpha = \cos \alpha \Rightarrow \alpha = 45^\circ$$

۲۲- (۳) داریم $x = 1$ و $y = -1$ و $z = 2$ و نیز $a = -1$ و $b = 1$ و $c = 2$ بنابراین:

$$x = 1 - t, y = -1 + t, z = 2 + 2t$$

۲۳- (۴)

$$\vec{v} = \vec{OB} - \vec{OA} = (0 - 2, -1 - 2, 1 - 2) = (-2, -3, -1) = -2\vec{i} - 3\vec{j} - \vec{k}$$

اگر نقطه $A(2, 2, 2)$ را به عنوان نقطه (x_0, y_0, z_0) بگیریم، معادله خط به دست می‌آید.

$$x = 2 - 2t, y = 2 - 3t, z = 2 - t \quad \text{یا} \quad \frac{x-2}{-2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-2}{-1}$$

۲۴- (۳) از شرط موازی بودن خط و صفحه خواهیم داشت: $a = 2/3$ یا $6a - 2 - 3a = 0$.

۲۵- (۳) $\vec{v} = (3, 2, -2)$ بردار هادی خط و $P = (0, 0, 6)$ نقطه‌ای واقع بر خط می‌باشد پس $\vec{PA} = (1, -1, -8)$

در نتیجه:

$$|\vec{PA} \times \vec{v}| = \left| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & -8 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix} \right| = 18\vec{i} - 22\vec{j} + 5\vec{k}, d = \frac{|18\vec{i} - 22\vec{j} + 5\vec{k}|}{|\vec{v}|} = \frac{\sqrt{133}}{\sqrt{17}} = \gamma$$

۲۶- (۳) این خط بر صفحه xoy عمود یا با محور ox موازی است. پس بردار هادی آن $(1, 0, 0)$ است که فقط در گزینه

(۳) چنین است.

۲۷- (۴) برای هر نقطه بر محور oz داریم $x = 0$ و $y = 0$ در نتیجه:

$$\frac{0-4}{4} = 0-2 = 2z+2 \Rightarrow z = -2 \Rightarrow (0, 0, -2)$$

۲۸- (۲) بردار نرمال صفحه می‌باشد $\vec{N} = (2, -1, 3)$ است. پس:

$$2(x-1) - (y-1) + 3(z-0) = 0 \Rightarrow 2x - 2 - y + 1 + 3z = 0 \Rightarrow 2x - y + 3z = 1$$

(۴)-۲۹

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-1 & z+1 \\ 2-0 & 1-1 & 3+1 \\ -2-0 & 1-1 & 0+1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -1 \cdot 0 \cdot y + 1 \cdot 0 = 0 \Rightarrow y-1=0$$

۳۰- (۳) نرمال دو صفحه مزبور عبارتند از $n(1, 1, 2)$ و $n'(2, -1, 1)$ پس:

$$\cos \alpha = \frac{n \cdot n'}{|n| \cdot |n'|} = \frac{2}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = \frac{1}{3} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}$$

۳۱- (۲) چون دو صفحه داده شده با یکدیگر موازیند، بنابراین:

$$H = \frac{|d-d'|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{|1+1|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

(۲)-۳۲

$$1(x-1) - 1(y+1) - 1(z-0) = 0 \Rightarrow x-1-y-1-z=0 \Rightarrow x-y-z-2=0$$

۳۳- (۳) چون با محور z موازی است پس بردار نرمال صفحه مزبور بر محور y عمود است پس معادله صفحه نباید y داشته باشد.

۳۴- (۱) بردارهای عمود بر دو صفحه عمود بر هم، برهم عمودند، پس:

$$(m+2)(m-2) + (2-m)(1+m) + (1-2m)(2-m) = 0$$

$$m^2 - 4 + 2 + 2m - m - m^2 + 2 - m - 4m + 2m^2 = 0 \Rightarrow 2m^2 - 4m = 0 \Rightarrow m = 0 \text{ یا } 2$$

(۴)-۳۵

$$\begin{vmatrix} x & y \\ y & x \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x^2 - y^2 = 0 \Rightarrow x = \pm y$$

(۲)-۳۶

$$\begin{vmatrix} a & 2 & 15 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (4a - 15 + 27) - (9 \cdot 0 + 6 - 3a) = 0 \Rightarrow a = 12$$

۳۷- (۱) اگر در یک مجموعه بردار صفر وجود داشته باشد، آن مجموعه وابسته خطی است.

۳۸- (۱) اگر $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ آن گاه:

$$\lambda_1(1, a, 1) + \lambda_2(a, 2, a) = (0, 0, 0) \Rightarrow (\lambda_1 + a\lambda_2, a\lambda_1 + 2\lambda_2, \lambda_1 + a\lambda_2) = (0, 0, 0)$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + a\lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -a\lambda_2 \\ a\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \Rightarrow a(-a\lambda_2) + 2\lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_2(2 - a^2) = 0 \end{cases}$$

برای اینکه $\lambda_2 = 0$ باشد، آن گاه باید $2 - a^2 \neq 0$ یا $a^2 \neq 2$.

(۳)-۳۹

$$(-1, 0) = x(1, 5) + y(-1, 2) \Rightarrow (-1, 0) = (x-y, 5x+2y)$$

$$\begin{cases} x-y=-1 \\ 5x+2y=0 \end{cases} \Rightarrow x = -\frac{2}{5}, y = \frac{5}{5} \Rightarrow x+y = -\frac{2}{5} + \frac{5}{5} = \frac{3}{5}$$

- ۴۰- (۲) زیرا $2/3 = 6/9 = 4/6 = 2/3$ پس $(-2/3, 6, -3) = (-2, 6, 2)$.
 ۴۱- (۳) باید داشته باشیم $1/a = 1/a$ پس $a^2 = 1$ یا $a = \pm 1$. به ازای $a = 1$ دو برداریکی هستند.
 ۴۲- (۲) بردارها باید مستقل خطی باشند و این شرط فقط در گزینه ۲ صادق است.
 ۴۳- (۲)

$$\begin{vmatrix} 2 & m-1 \\ m+1 & 4 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow 8 - (m-1)(m+1) \neq 0 \Rightarrow m^2 - 1 \neq 8 \Rightarrow m \neq \pm 3$$

۴۴- (۱)

۴۵- (۱)

۴۶- (۴)

$$\begin{cases} ax + a'y = 0 \\ bx + b'y = 0 \\ cx + c'y = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{لااقل باید ضرایب دو معادله متناسب نباشند، پس گزینه ۴ نادرست است.}$$

۴۷- (۱)

$$x(1, -1, 2) + y(-1, 0, 2) + z(0, 0, 1) = (-1, 0, 1)$$

$$(x - y, -x, 2x + 2y + z) = (-1, 0, 1)$$

$$\begin{cases} x - y = -1 \\ -x = 0 \\ 2x + 2y + z = 1 \end{cases} \Rightarrow x = 0, y = 1, z = -1 \Rightarrow x + y + z = 0$$

$$۴۸- (۳) زیرا $2/6 = 3/9 = 1/3$ پس $(2, 3) = 1/3(6, 9)$.$$

۴۹- (۱)

۵۰- (۱)

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ -a & b & c \\ a & -b & c \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (abc + abc + abc) - (abc - abc - abc) = 0 \Rightarrow abc = 0$$

۵۱- (۲)

$$\vec{v} = 3\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{j} = 3\vec{i} + 7\vec{j} = (3, 7)$$

۵۲- (۱)

۵۳- (۳) اگر $x, y, z \in \mathbb{R}$ آن‌گاه

$$x(0, 1, 0) + y(0, 1, -1) + z(2, 1, 0) = (0, 0, 0)$$

$$(2z, x + y + z, -y) = (0, 0, 0) \Rightarrow x = y = z = 0$$

۵۴-(۳)

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 2 & a & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow (0 - a + 4) - (0 + 3 - 2a) \neq 0 \Rightarrow a \neq -1$$

۵۵-(۳) اگر $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ ، آنگاه:

$$\lambda_1(\sin x \cos x) + \lambda_2(2 \sin 2x) = 0 \Rightarrow \lambda_1 \neq 0 \text{ یا } \lambda_2 \neq 0$$

$$\lambda_1(\sin x \cos x) + 2\lambda_2(\sin 2x) = 0 \Rightarrow \lambda_1 \sin x \cos x + 2\lambda_2 2 \sin x \cos x = 0$$

$$\sin x \cos x (\lambda + 4\lambda_2) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -4, \lambda_2 = 2$$

۵۶-(۱) معادله پارامتر خط مزبور عبارت است از:

$$x = t, y = -t, z = 2t - 1$$

باید t را طوری تعیین کنیم که نقطه $(t, -t, 2t - 1)$ در معادله $x + 4y + 3z = 0$ صدق کند. یعنی:

$$t - 4t + 6t - 3 = 0 \Rightarrow t = 1$$

پس نقطه مطلوب عبارت است از $(1, -1, 1)$.

۵۷-(۳) بردار نرمال صفحه موردنظر موازی بردار هادی خط داده شده است. پس $(1, 1/2, 1)$ یا برای سهولت $n = (2, 1, 2)$ نرمال صفحه مطلوب است. در نتیجه:

$$2(x - 1) + (y - 1) + 2(z - 1) = 0 \Rightarrow 2x + y + 2z = 5$$

۵۸-(۳)

$$d = \frac{|2 - 1 + 0|}{\sqrt{1 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

۵۹-(۲) بردار نرمال صفحه مطلوب $\vec{AB}$ است.

$$N = \vec{AB} = (1, 1, 1)$$

پس معادله صفحه مطلوب عبارت است از:

$$(x - 2) + (y - 4) + (z - 6) = 0 \Rightarrow x + y + z = 12$$

۶۰-(۴)

$$(x - 2) + 4(y - 0) + 2(z - 1) = 0 \Rightarrow x + 4y + 2z = 4$$

پاسخ تشریحی سؤالات تستی فصل ۹

۱-(۲)

$$f(-1, -2) = \frac{e^{-1}}{e^{-2}}(1 + 4) = e^{-1+2}(1 + 4) = 5e$$

۲-(۱)

$$f\left(0, \frac{\pi}{\pi}\right) = \sin\left(\frac{1}{0 + \frac{\pi}{\pi}}\right) e^{0 + \frac{\pi}{\pi}} = \sin\left(\frac{\pi}{\pi}\right) e^{\pi/\pi} = e^{\pi/\pi}$$

(۳)-۳

$$f\left(0, \frac{1}{5}\right) \Rightarrow 0 + \frac{1}{25} = \frac{1}{25} < 1, f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) \Rightarrow \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{5}{16} < 1$$

$$f\left(\frac{3}{2}, 0\right) \Rightarrow \frac{9}{4} + 0 = \frac{9}{4} > 1, f\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) \Rightarrow \frac{4}{9} + \frac{1}{9} = \frac{5}{9} < 1$$

(۱)-۴

$$(f \circ g)(0, 0, 1) = f(g(0, 0, 1)), g(0, 0, 1) = \frac{0 \times 0}{1} = 0 \Rightarrow$$

$$f(0) = \frac{e^0 + e^0}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

(۳)-۵

$$\sin(xy) \neq 0 \Rightarrow xy \neq n\pi, n \in \mathbb{Z}$$

(۴)-۶

$$x + y \geq 0 \Rightarrow D_x = \{(x, y) | x + y \geq 0\}$$

$R_x = \{z | z \geq 0\} = \{0\} \cup R^+$ حداقل مقدار زیر رادیکال صفر است، یعنی داریم:

(۱)-۷

$$4x^2 + 25y^2 \geq 0 \Rightarrow -4x^2 - 25y^2 \leq 0 \Rightarrow 100 - 4x^2 - 25y^2 \leq 100$$

$$\sqrt{100 - 4x^2 - 25y^2} \leq 10 \Rightarrow 0 \leq z \leq 10$$

$$x \neq -y \text{ یا } x + y \neq 0 \quad (۳)-۸$$

(۱)-۹

$$D_u = \{(x, y, z) | z \geq 2, x, y \in \mathbb{R}\} \Rightarrow R_u = \mathbb{R}$$

۱۰- (۲) گزینه ۳، برد تابع f است.

(۱)-۱۱

$$x + y \neq 0 \Rightarrow x \neq -y \Rightarrow D_x = \{(x, y) | x \neq -y\}$$

برد این تابع برابر است با برد تابع سینوس یعنی: $R_x = \{z | -1 \leq z \leq 1\}$

۱۲- (۲) در گزینه ۱ باید $xy > 0$ بنابراین $D_f = \{(x, y) | xy > 0\}$ در گزینه ۳ داریم:

$$0 \leq x^2 + y^2 < +\infty \Rightarrow -\infty < -x^2 - y^2 \leq 0 \Rightarrow -\infty + 25 < 25 - x^2 - y^2 \leq 0 + 25 \Rightarrow -\infty < z \leq 25$$

بنابراین $R_x = \{z | z \leq 25\}$ در گزینه ۲ با توجه به اینکه فرجه رادیکال فرد است، زیرا رادیکال می‌تواند مثبت یا منفی باشد.

(۳)-۱۳

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 64 \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 \geq 64 \Rightarrow \\ x^2 + y^2 = 64 \text{ دایره و محیط دایره} \\ y \neq 0 \Rightarrow \text{به جز نقاط واقع بر محور } x \text{ ها} \end{cases}$$

۱۴-۱۱) زیرا:

$$1 - x^r - y^r \geq 0 \Rightarrow x^r + y^r \leq 1$$

۱۵-۲)

$$9 - x^r \geq 0 \Rightarrow 9 \geq x^r \Rightarrow -3 \leq x \leq 3, y + 3 \neq 0 \Rightarrow y \neq -3$$

۱۶-۴)

$$16 - x^r - 4y^r \geq 0 \Rightarrow x^r + 4y^r \leq 16 \Rightarrow x^r + 4y^r = 16 \text{ نقاط داخل و محیط بیضی}$$

۱۷-۱۱) در صورتی عبارت زیر رادیکال مثبت است که یا صورت و مخرج مثبت باشند و یا صورت و مخرج هر دو منفی باشند.

$$\begin{cases} x - y \geq 0 \\ x + y > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq y \\ x > -y \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} x - y \leq 0 \\ x - y < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq y \\ x < y \end{cases}$$

$$D_f = \{(x, y) | x \geq y, x > -y\} \cup \{(x, y) | x \leq y, x < y\}$$

۱۸-۱)

$$0 \leq x^r + y^r < +\infty \Rightarrow -\infty < -x^r - y^r \leq 0 \Rightarrow -\infty + 16 < 16 - x^r - y^r \leq 16 \Rightarrow -\infty < z \leq 16$$

۱۹-۲) با توجه به خطی بودن تابع z و اینکه به ازای همه مقادیر $x \in \mathbb{R}$ و $y \in \mathbb{R}$ تابع z تعریف شده است. لذا برد آن $\mathbb{R}$ است.

۲۰-۳)

۲۱-۱)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (-1,-1)} e^{x^r+y^r} = e^{1+1} = e^2$$

۲۲-۲)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (-1,2)} \left(\frac{|x-3|}{|y+2|} \right)^r = \left(\frac{|-1-3|}{|2+2|} \right)^r = \left(\frac{4}{4} \right)^r = \frac{4}{4}$$

۲۳-۳)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (e,e)} \frac{\ln x}{\ln y + 1} (x^r + y^r) = \frac{\ln e}{\ln e + 1} (e^r + e^r) = \frac{2e^r}{2} = e^r$$

۲۴-۳)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow \left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}, \frac{\pi}{\sqrt{2}}\right)} \frac{\sin x \cdot \sin y}{\sqrt{2}} = \frac{\sin \frac{\pi}{\sqrt{2}} \cdot \sin \frac{\pi}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} = \frac{1 \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

۲۵-۴)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{x^r(x^r+1)}{y^r} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^r(x^r+1)}{\left(\sin \frac{\pi x}{\sqrt{2}}\right)} = \frac{2}{1} = 2$$

۲۶-۲)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{y^r(x^r+1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(-x)^r(x^r+1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 1} x(x^r+1) = 2$$

۲۷-۱)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (r,r)} \frac{x^r - r}{r^r y - r^r} = \lim_{x \rightarrow r} \frac{x^r - r}{r^r \left(\frac{x^r}{r} \right) - r^r} = \lim_{x \rightarrow r} \frac{x^r - r}{x^r - r} = 1$$

(۴)-۲۸

۲۹-(۴) معادله خطی که از نقطه $(0, 0)$ می‌گذرد به صورت $y = mx$ است.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y(x^r + 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx(x^r + 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} m(x^r + 1) = m$$

بنابراین مقدار حد بستگی به مقدار m دارد. لذا تابع در نقطه $(0, 0)$ حد ندارد.

(۱)-۳۰

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^r y}{x^r + y^r} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx^r}{x^r + m^r x^r} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx^r}{x^r(1 + m^r)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx}{1 + m} = 0$$

۳۱-(۱) تابع در $(0, 0)$ تعریف شده است (شرط اول)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{r mx^r}{x^r + m^r x^r} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{r mx^r}{x^r(1 + m^r)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{r mx}{1 + m} = 0 \Rightarrow \text{تابع در } (0, 0) \text{ حد دارد (شرط دوم)}$$

$$f(0, 0) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0 \Rightarrow \text{پیوسته است}$$

۳۲-(۱) تابع در $(0, 0)$ تعریف شده است (شرط اول). با توجه به تست شماره ۳۰ تابع در $(0, 0)$ حد دارد و حد آن

صفر است در نتیجه تابع در $(0, 0)$ پیوسته است.

۳۳-(۳) تابع در $(0, 0)$ تعریف شده است (شرط اول)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx^r}{x^r + m^r x^r} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx^r}{x^r(1 + m^r)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{m}{1 + m^r} = \frac{m}{1 + m^r}$$

مقدار حد بستگی به مقدار m دارد لذا تابع در $(0, 0)$ حد ندارد در نتیجه تابع ناپیوسته است.

۳۴-(۲) تابع در $(0, 0)$ تعریف شده است و برابر ۱ است. (شرط اول)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x+y)}{x+y} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x+mx)}{x+mx} = 1 \Rightarrow f(0, 0) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 1$$

(۲)-۳۵

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^r(x+y)}{x^r + y^r} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^r(x+mx)}{x^r + m^r x^r} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^r(1+m)}{x^r(1+m^r)} = \lim_{x \rightarrow 0} x \frac{1+m}{1+m^r} = 0$$

$$f(0, 0) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$$

(۲)-۳۶

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^r + y^r - x^r}{x^r + y^r} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^r + m^r x^r - x^r}{x^r + m^r x^r} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^r(1 + m^r - 1)}{x^r(1 + m^r)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + m^r - 1}{1 + m^r} = 1, \quad f(0, 0) \neq \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) \end{aligned}$$

(۳)-۳۷

نقاط ناپیوستگی سهمی است $x^r - y = 0 \Rightarrow y = x^r$

۳۸-(۱) زیرا می‌دانیم هر تابع چندجمله‌ای n متغیره در R^n پیوسته است.

(۱)-۳۹

$$f(x, y) = e^{-(x^r + y^r)} = \frac{1}{e^{x^r + y^r}}, e^{x^r + y^r} \neq 0$$

(۲)-۴۰

$$x^r + y^r - r = 0 \Rightarrow x^r + y^r = r \Rightarrow ۲ \text{ شعاع } (0, 0) \text{ و مرکز}$$

(۲)-۴۱

$$f(\ln r, \lambda, r) = e^{\ln r} \ln \lambda + r = r \times 0 + r = r$$

(۱۱)-۴۲

$$f_y(x, y) = r x^0 y^0 \Rightarrow f_{yy}(x, y) = r^0 x^0 y^1 \Rightarrow f_{yyx}(x, y) = 1 \cdot 0^0 x^1 y^1$$

(۳)-۴۳

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= e^x \cdot \sin y + \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{\partial^r z}{\partial x^r} = e^x \sin y - \frac{1}{x^r} \Rightarrow \frac{\partial^r z}{\partial^r x \partial y} = e^x \cos y \Rightarrow \\ \frac{\partial^r z}{\partial x^r \partial y^r} &= -e^x \sin y \xrightarrow{(\cdot, r\pi/r)} \frac{\partial^r z}{\partial x^r \partial y^r} = -e^x \sin\left(\frac{r\pi}{r}\right) = (-1)(-1) = 1 \end{aligned}$$

(۴)-۴۴

$$\frac{\partial}{\partial x} \{x^r y^r - \sin \sqrt{y - \ln y}\} = r x^{r-1} y^r \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x^r} \{r x^{r-1} y^r\} = r x y^r \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x^r \partial y} \{r x y^r\} = 1 r x y$$

(۳)-۴۵

$$w_x + w_y + w_z = (rxy + z^r) + (x^r + ryz) + (y^r + rzx) = (x + y + z)^r$$

(۱۱)-۴۶

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= y + \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{\partial^r z}{\partial x^r} = -\frac{y}{x^r}, \frac{\partial^r z}{\partial x \partial y} = 1 + \frac{1}{x} \\ x \cdot \frac{\partial^r z}{\partial x^r} + y \cdot \frac{\partial^r z}{\partial x \partial y} &= x \left(-\frac{y}{x^r}\right) + y \left(1 + \frac{1}{x}\right) = -\frac{y}{x} + y + \frac{y}{x} = y \end{aligned}$$

(۲)-۴۷

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin[(x + \Delta x) + y] - \sin(x + y)}{\Delta x} = \frac{\partial}{\partial x} (\sin(x + y)) = \cos(x + y)$$

(۱۱)-۴۸

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{rx}{x^r + y^r} \Rightarrow \frac{\partial^r z}{\partial x^r} = \frac{r(x^r + y^r) - rx^r}{(x^r + y^r)^r} = \frac{ry^r - rx^r}{(x^r + y^r)^r} \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{ry}{x^r + y^r} \Rightarrow \frac{\partial^r z}{\partial y^r} = \frac{r(x^r + y^r) - ry^r}{(x^r + y^r)^r} = \frac{rx^r - ry^r}{(x^r + y^r)^r} \\ \frac{\partial^r z}{\partial x^r} + \frac{\partial^r z}{\partial y^r} &= \frac{ry^r - rx^r}{(x^r + y^r)^r} + \frac{rx^r - ry^r}{(x^r + y^r)^r} = 0 \end{aligned}$$

(۳)-۴۹

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial x} = -\sin(x + y) + \cos(x - y) \\ \frac{\partial w}{\partial y} = -\sin(x + y) - \cos(x - y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial^r w}{\partial x^r} = -\cos(x + y) - \sin(x - y) \\ \frac{\partial^r w}{\partial y^r} = -\cos(x + y) - \sin(x - y) \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial^r w}{\partial x^r} = \frac{\partial^r w}{\partial y^r}$$

۵۰-۳) با فرض $u = y - z$ و $v = z - x$ و $t = x - y$ داریم $w = f(u, v, t)$

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{\partial w}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial x} = 0 - \frac{\partial w}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial t} \\ \frac{\partial w}{\partial y} &= \frac{\partial w}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial u} + 0 - \frac{\partial w}{\partial t} \\ \frac{\partial w}{\partial z} &= \frac{\partial w}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial z} = -\frac{\partial w}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial v} + 0 \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0\end{aligned}$$

(۳)-۵۱

$$f_x(x, y) = -e^{-x} \cdot \sin(x + \frac{1}{2}y) + e^{-x} \cos(x + \frac{1}{2}y) \Rightarrow f_x\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = -1 + 0 = -1$$

(۲)-۵۲

$$\begin{aligned}f'_x(x, y) &= \frac{y(x-y) - yx}{(x-y)^2} = \frac{-y^2}{(x-y)^2} \\ f''_{xy}(x, y) &= \frac{-2(x-y)^{-3} + y(x-y)(-2y)}{(x-y)^4} \\ f''_{xy}(x, y) &= \frac{-2x^3 + 2y^3}{(x-y)^3} \Rightarrow f''_{xy}(1, 0) = \frac{-2}{1} = -2\end{aligned}$$

(۴)-۵۳

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y^x \cdot \ln y \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = xy^{x-1} \cdot \ln y + \frac{1}{y} \cdot y^x \xrightarrow{x=y=1} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0 + 1 = 1$$

(۲)-۵۴

$$\begin{aligned}\left\{ \begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{1}{x+y} + \tan^{-1}(y-x-y) \\ \frac{\partial w}{\partial y} &= \frac{1}{x+y} - \tan^{-1}(y-x-y)\end{aligned} \right\} \Rightarrow \\ \left\{ \begin{aligned}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= \frac{-1}{(x+y)^2} + \tan^{-1}(y-x-y)[1 + \tan^2(y-x-y)] \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= \frac{-1}{(x+y)^2} + \tan^{-1}(y-x-y)[1 + \tan^2(y-x-y)]\end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\end{aligned}$$

(۱)-۵۵

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{1}{v} \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2 - y^2 + yz}} - \frac{u}{v^2} xy \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{y}{xyz \sqrt{x^2 - y^2 + yz}} - \frac{\sqrt{x^2 - y^2 + yz}}{xyz^2} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial z}(1, 1, 2) = \frac{\sqrt{6}}{6} - \frac{\sqrt{6}}{4} = -\frac{\sqrt{6}}{12}\end{aligned}$$

(۱)-۵۶

$$z'_y = \cos y \cdot x^{\sin y} \cdot \ln x \Rightarrow z''_{yt} = -\sin y \cdot x^{\sin y} \cdot \ln x + \cos y \cdot y \cdot x^{\sin y} \cdot (\ln x)^2$$

$$\left(x = e, y = \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow z''_{yt} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot e^{\sqrt{2}/2} \cdot 1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \cdot e^{\sqrt{2}/2} \cdot 1 = \left(\frac{1 - \sqrt{2}}{2}\right) e^{\sqrt{2}/2}$$

(۱)-۵۷

$$\ln U_x + \ln U_y + \ln U_z = \ln \frac{1}{x+y+z} + \ln \frac{1}{x+y+z} + \ln \frac{1}{x+y+z}$$

$$= \ln \left(\frac{1}{x+y+z} \right)^3 = \ln(x+y+z)^{-3} = -3 \ln(x+y+z) = -3U$$

(۳)-۵۸

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial f / \partial y}{\partial f / \partial z} = -\frac{x^r e^{y+z}}{x^r e^{y+z}} = -1$$

(۳)-۵۹ داریم $z = 1/2 \ln(x^2 + y^2)$ یا $z = \ln(\sqrt{x^2 + y^2})$ بنابراین:

$$\left. \begin{aligned} z_x &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} \Rightarrow z_{xx} = \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \\ z_y &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2y}{x^2 + y^2} = \frac{y}{x^2 + y^2} \Rightarrow z_{yy} = \frac{x^2 + y^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = -\frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow z_{xx} = -z_{yy}$$

(۲)-۶۰

$$w = f\left(\frac{xy}{x^2 + y^2}\right), u = \frac{xy}{x^2 + y^2} \Rightarrow w = f(u)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{dw}{du} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{dw}{du} \cdot \frac{y(x^2 + y^2) - 2x^2 y}{(x^2 + y^2)^2} = u' \cdot \frac{y^2 - x^2 y}{(x^2 + y^2)^2}$$

(۳)-۶۱ می‌دانیم $y = u^v \Rightarrow y' = u^v (v' \ln u + v \cdot u'/u)$ بنابراین:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (x + 2y)^{xy} \left[y \ln(x + 2y) + xy \cdot \frac{1}{x + 2y} \right] \Rightarrow \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_{x=1} = 2 \ln 3 + 1$$

(۱)-۶۲

$$z = f\left(\frac{y}{x}\right), u = \frac{y}{x} \Rightarrow z = f(u)$$

$$z'_x = f' u \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) \Rightarrow z''_{xx} = f'' u^2 \cdot \left(\frac{-y}{x^2}\right)^2 + f' u \cdot \frac{2y}{x^3}, z''_{xy} = z''_{yx} = f'' u^2 \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{-y}{x^2} + f' u \cdot \frac{-1}{x^2}$$

$$z'_y = f' u \cdot \frac{1}{x} \Rightarrow z''_{yy} = f'' u^2 \cdot \frac{1}{x^2}$$

$$x^2 \cdot z''_{xx} + 2xy \cdot z''_{xy} + y^2 \cdot z''_{yy} = f'' u^2 \cdot \frac{y^2}{x^2} + f' u \cdot \frac{2y}{x} - f'' u^2 \cdot \frac{2y}{x^2} - f' u \cdot \frac{2y}{x} + f'' u^2 \cdot \frac{y^2}{x^2} = 0$$

(۴)-۶۳

(۱)-۶۴

$$w'_x = -\frac{y}{x^2} \cdot \frac{1}{1 + y^2/x^2} + \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 + x^2/z^2} = \frac{-y}{x^2 + y^2} + \frac{z}{z^2 + x^2} \Rightarrow w''_{xx} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{2xz}{(x^2 + z^2)^2}$$

و به طور مشابه خواهیم داشت:

$$w''_{yy} = \frac{2yz}{(y^2 + z^2)^2} - \frac{2yx}{(x^2 + y^2)^2}, w''_{zz} = \frac{2zx}{(z^2 + x^2)^2} - \frac{2zy}{(z^2 + y^2)^2}$$

$$w''_{xx} + w''_{yy} + w''_{zz} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{2xz}{(x^2 + z^2)^2} + \frac{2yz}{(y^2 + z^2)^2} - \frac{2yx}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{2zx}{(z^2 + x^2)^2} - \frac{2zy}{(z^2 + y^2)^2} = 0$$

۶۵- (۴) چون $f(x, y)$ همگن از درجه صفر می‌باشد، داریم:

$$x \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad (\text{قضیه اولر}) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} / \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{y}{x}$$

(۳)-۶۶

$$\begin{aligned} dz &= \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \\ dz &= \frac{(x-y-x-y)/(x-y)^2}{(x+y)/(x-y)} dx + \frac{(x-y+x+y)/(x-y)^2}{(x+y)/(x-y)} dy \\ dz &= \frac{(x-y)(-2y)}{(x+y)(x-y)^2} dx + \frac{(x-y)(2x)}{(x+y)(x-y)^2} dy = \frac{-2y}{x^2-y^2} dx + \frac{2x}{x^2-y^2} dy = \frac{2(xdy-ydx)}{x^2-y^2} \end{aligned}$$

(۱)-۶۷

$$\begin{aligned} dz &= \frac{\frac{1}{y} \cos \frac{x}{y}}{\sin \frac{x}{y}} dx + \frac{-\frac{x}{y^2} \cos \frac{x}{y}}{\sin \frac{x}{y}} dy = \frac{1}{y} \cot \frac{x}{y} dx - \frac{x}{y^2} \cot \frac{x}{y} dy \\ dz &= \cot \frac{x}{y} \left(\frac{dx}{y} - \frac{xdy}{y^2} \right) = \cot \frac{x}{y} \left(\frac{ydx - xdy}{y^2} \right) \end{aligned}$$

(۱)-۶۸

$$z = F(x^2 - y^2), u = x^2 - y^2 \Rightarrow z = F(u)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 2x \frac{\partial F}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = -2y \frac{\partial F}{\partial u} \end{cases} \Rightarrow y \frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

(۲)-۶۹

$$dz = \frac{1/y}{\sqrt{1-x^2/y^2}} dx - \frac{x/y^2}{\sqrt{1-x^2/y^2}} dy = \frac{dx}{\sqrt{y^2-x^2}} - \frac{xdy}{y\sqrt{y^2-x^2}} = \frac{ydx-xdy}{y\sqrt{y^2-x^2}}$$

(۳)-۷۰

$$\begin{aligned} yze^{xyz} dx + xze^{xyz} dy + xye^{xyz} dz &= e^x dx + e^y dy + e^z dz \\ (x=y=z=0) &\Rightarrow 0+0+0 = dx+dy+dz \Rightarrow dz = -(dx+dy) \end{aligned}$$

(۱)-۷۱

$$\begin{aligned} dz &= (\sin y - y^2 \sin xy) dx + (x \cos y + 2y \cos xy - xy^2 \sin xy) dy \\ (2, 0) &\Rightarrow dz = 2 dy \end{aligned}$$

۷۲- (۳) فرض می‌کنیم $z = z(x, y)$ و $u = x/z$ و $v = y/z$ بنابراین $F(u, v) = 0$ از یک‌بار نسبت به x و یک‌بار نسبت به y مشتق می‌گیریم:

$$\begin{cases} F_u u_x + F_v v_x = 0 \\ F_u u_y + F_v v_y = 0 \end{cases}$$

چون F تابعی از u و v است، دستگاه فوق دارای جواب بدیهی $F_u = F_v = 0$ نیست و داریم:

$$\begin{vmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow u_x v_y = v_x u_y \quad (۱)$$

از طرف دیگر:

$$u_x = \frac{z - xz_x}{z^2}, v_x = \frac{-yz_x}{z^2}, u_y = \frac{-xz_y}{z^2}, v_y = \frac{z - yz_y}{z^2}$$

با جای‌گذاری در تساوی (۱) خواهیم داشت:

$$\frac{z - xz_x}{z^2} \times \frac{z - yz_y}{z^2} = \frac{-yz_x}{z^2} \times \frac{-xz_y}{z^2} \Rightarrow xz_x + yz_y = z$$

۷۳- (۴)

$$x^2 y^2 . dx + x^2 y^2 . dy + x^2 z^2 . dz = -\sin z . dz$$

$$(x^2 y^2 + \sin z) dz = -(x^2 y^2 . dx + x^2 y^2 . dy) \Rightarrow dz = -\frac{x^2 y^2 . dx + x^2 y^2 . dy}{x^2 y^2 + \sin z}$$

۷۴- (۱)

$$x = y = 2 \Rightarrow z = \frac{1}{2} \sqrt{2^2 - 1 - 1} = \sqrt{2} \Rightarrow \text{نقطه تماس در } (2, 2, \sqrt{2})$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2} \times \frac{-2x}{2\sqrt{2^2 - 2x^2 - 2y^2}} = \frac{-x}{\sqrt{2^2 - 2x^2 - 2y^2}} \Rightarrow \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_{\substack{x=2 \\ y=2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

۷۵- (۲)

$$dz = (2x + 2y)dx + (2x - 2y)dy = (2 + 1)(0, 0, 2) + (2 - 1)(-0, 0, 2) = 0, 0, 4$$

۷۶- (۴)

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) = 2(x + \Delta x)^2 + 2(x + \Delta x)(y + \Delta y) - (y + \Delta y)^2 - x^2 - 2xy + y^2$$

$$\Delta z = 2(1 + 0, 0, 2)^2 + 2(1 + 0, 0, 2)(2 - 0, 0, 1) - (2 - 0, 0, 1)^2 - 1 - 2 + 4 = 1, 18, 2$$

۷۷- (۱)

$$f'_x(x, y) = \frac{[y(x^2 - y^2) + 2x^2 y](x^2 + y^2) - 2x^2 y(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \Rightarrow f'_x(0, y) = -y$$

۷۸- (۳)

$$d^2 z = z_{xx} dx^2 + 2z_{xy} dx dy + z_{yy} dy^2 = [dx \ dy] \begin{bmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ z_{yx} & z_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix}$$

$$z_x = -\frac{y}{x^2} - \frac{1}{y} \Rightarrow z_{xx} = \frac{2xy}{x^3} = \frac{2y}{x^2}, z_{xy} = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}$$

$$z_y = \frac{1}{x} + \frac{x}{y^2} \Rightarrow z_{y1} = -\frac{2xy}{y^3} = -\frac{2x}{y^2}, z_{yx} = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}$$

$$(1, 1) \Rightarrow z_{xx} = 2, z_{xy} = z_{yx} = 0, z_{yy} = -2$$

$$[dx \ dy] \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} = 2[dx^2 - dy^2]$$

(۲)-۷۹

$$\begin{aligned} z'_x &= 3x^2 + y \Rightarrow z''_{xx} = 6x, z''_{xy} = 1 \\ z'_y &= 3y^2 + x \Rightarrow z''_{yy} = 6y, z''_{yx} = 1 \end{aligned} \Rightarrow [d^2z] = [dx \ dy] \begin{bmatrix} 6x & 1 \\ 1 & 6y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix}$$

(۱)-۸۰

$$z'_x = yte^{xyt} \Rightarrow z''_{xt} = y^2 t^2 e^{xyt}, z''_{xy} = te^{xyt} + xyt^2 e^{xyt}$$

$$z'_y = xte^{xyt} \Rightarrow z''_{yt} = x^2 t^2 e^{xyt}, z''_{yx} = te^{xyt} + xyt^2 e^{xyt}$$

$$z'_t = xye^{xyt} \Rightarrow z''_{tt} = x^2 y^2 e^{xyt}, z''_{tx} = ye^{xyt} + xyt^2 e^{xyt} = z''_{xt}$$

$$z''_{ty} = xe^{xyt} + x^2 yte^{xyt} = z''_{yt}$$

$$(y = x = t = 1) \Rightarrow z''_{xx} = z''_{yy} = z''_{tt} = e, z''_{xy} = z''_{yx} = z''_{xt} = z''_{tx} = z''_{yt} = z''_{ty} = 2e$$

(۳)-۸۱

$$d^2z = z_{xx}.dx^2 + 2z_{xy}.dxdy + z_{yy}.dy^2$$

$$z_x = \ln \frac{y}{x} + x, \frac{-y/x^2}{y/x} = \ln \frac{y}{x} - 1 \Rightarrow z_{xx} = \frac{-y/x^2}{y/x} = -\frac{1}{x}$$

$$z_y = x, \frac{1/x}{y/x} = \frac{x}{y} \Rightarrow z_{yx} = -\frac{x}{y^2}, z_{yx} = z_{xy} = \frac{1/x}{y/x} = \frac{1}{y}$$

$$d^2z = -\frac{1}{x}.dx^2 + \frac{2}{y}.dxdy - \frac{x}{y^2}.dy^2 \xrightarrow{(1,1)} d^2z = -dx^2 + 2dxdy - dy^2$$

(۳)-۸۲

$$z_x = f'\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{1}{y}F'\left(\frac{x}{y}\right), z_{xx} = \frac{1}{y}f''\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{1}{y^2}F''\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$z_{xy} = -\frac{x}{y^2}f''\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{1}{y^2}F'\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{x}{y^2}F''\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$z_y = f\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{x}{y}f'\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{x}{y^2}F'\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$z_{yy} = -\frac{x}{y^2}f'\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{x}{y^2}f''\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{x^2}{y^3}f''\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{1}{y^2}F'\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{x}{y^2}F''\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$x^2 z_{xx} + 2xy z_{xy} + y^2 z_{yy} = 0$$

(۱)-۸۳

$$dz = e^{x+2y}.dx + 2e^{x+2y}.dy \Rightarrow d^2z = e^{x+2y}.dx^2 + 4e^{x+2y}.dxdy + 4e^{x+2y}.dy^2$$

$$\Rightarrow \dots \Rightarrow d^n z = e^{x+2y}(dx + 2dy)^n \Rightarrow d^{10}z = e^{x+2y}(dx + 2dy)^{10}$$

(۳)-۸۴

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{y}e^{x/y} \cdot \ln \frac{x}{y} + \frac{yx/y}{x^2/y}e^{x/y} = \frac{1}{y}e^{x/y} \cdot \ln \frac{x}{y} + \frac{1}{x}e^{x/y}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial x} = \frac{1}{y^2}e^{x/y} \cdot \ln \frac{x}{y} + \frac{yx/y}{x^2/y} \cdot \frac{1}{y}e^{x/y} - \frac{1}{x^2}e^{x/y} + \frac{1}{y}e^{x/y} \cdot \frac{1}{x}$$

$$(1, 1): \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial x} = 0 + 2e - 2e + 2e = 2e$$

(۳)-۸۵

$$U = x^t + y^t + z^t = (e^t \cos t)^t + (e^t \sin t)^t + (e^t)^t = e^{tt} \cos^t t + e^{tt} \sin^t t + e^{tt}$$

$$U = e^{tt} (\sin^t t + \cos^t t + 1) = e^{tt} (1 + 1) \Rightarrow U = 2e^{tt}, \quad \frac{dU}{dt} = 2e^{tt}$$

(۳)-۸۶

$$w = xy + yz = \left(\frac{e^t}{t}\right) \left(\frac{e^{-t}}{t}\right) + \left(\frac{e^{-t}}{t}\right) (t^t) = \frac{1}{t^t} + te^{-t}$$

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{t}{t^t} + e^{-t} - te^{-t} = -\frac{t}{t^t} + e^{-t}(1-t) \Rightarrow \left(\frac{dw}{dt}\right)_{t=1} = -2$$

(۳)-۸۷

$$F(x, y, z) = x + y + z - e^{-(x+y+z)} = 0$$

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1 + e^{-(x+y+z)}}{1 + e^{-(x+y+z)}} = -1 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1 + e^{-(x+y+z)}}{1 + e^{-(x+y+z)}} = -1 \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

(۱)-۸۸

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial F / \partial x}{\partial F / \partial z} = -\frac{z \cos x + \sin y + yz}{\sin x + 2z + xy} \xrightarrow{(\cdot, \cdot, 1)} \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{2}$$

(۳)-۸۹

$$\frac{\partial U}{\partial S} = \frac{\partial U}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial U}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial s}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial S} &= \left(\frac{2x}{x^t + y^t + 2t}\right)(1) + \left(\frac{2y}{x^t + y^t + 2t}\right)(-1) + \left(\frac{2}{x^t + y^t + 2t}\right)(2r) \\ &= \frac{2(x - y + 2r)}{x^t + y^t + 2t} = \frac{2(r + s - r + 2r)}{(r + s)^t + (r - s)^t + 2rs} = \frac{2(r + s)}{2(r + s)^t} = \frac{1}{r + s} \end{aligned}$$

(۲)-۹۰

$$z_x = \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial F / \partial x}{\partial F / \partial z} = -\frac{\ln yz - y \cdot \frac{z}{xz}}{x \cdot \frac{y}{yz} - y \cdot \frac{x}{xz}} = -\frac{\ln yz - \frac{y}{x}}{\frac{x}{z} - \frac{y}{z}} = -\frac{\frac{x \ln yz - y}{x}}{\frac{x - y}{z}} = -\frac{z(x \ln yz - y)}{x(x - y)}$$

(۳)-۹۱

$$F(x, y, z) = z^t - 2xz + y^t - 2 = 0$$

$$z_y = -\frac{\partial F / \partial y}{\partial F / \partial z} = -\frac{2y}{2z^t - 2x} \xrightarrow{(1, -2, 2)} z_y = -\frac{-2}{2z^t - 2} = \frac{1}{z}$$

(۱)-۹۲

$$w_x + w_y + w_z = (y - z)(z - x) - (x - y)(y - z) - (y - z)(z - x) + (x - y)(z - x) - (x - y)(z - x) + (x - y)(y - z) = 0$$

(۲)-۹۳

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^1 x^r \sin \frac{\lambda x}{\lambda y} + \lambda^r y^r \cos \frac{\lambda x}{\lambda y} = \lambda^r \left(x^r \sin \frac{x}{y} + y^r \cos \frac{x}{y} \right) = \lambda^r z \Rightarrow n = r$$

$$\text{قضیه اولی: } x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = n z = r z$$

(۳)-۹۴

$$f(\lambda x, \lambda y, \lambda t) = \lambda^r x^r e^{\lambda y / \lambda t} + \lambda^r y^r e^{\lambda x / \lambda t} + \lambda^r t^r e^{\lambda x / \lambda y} = \lambda^r z \Rightarrow n = r$$

$$x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} + t \cdot \frac{\partial z}{\partial t} = n z = r z$$

(۱)-۹۵

$$f(\lambda x, \lambda y) = \ln \frac{\lambda^r x^r + \lambda^r y^r}{\lambda x \lambda y} = \lambda^r \ln \frac{x^r + y^r}{x y} \Rightarrow n = 0$$

$$x \cdot z_x = -y \cdot z_y \Rightarrow x \cdot z_x + y \cdot z_y = n z = 0$$

(۲)-۹۶

$$f(\lambda x, \lambda y, \lambda t) = \sqrt{\lambda^r x y + \lambda^r x t + \lambda^r y t} = \lambda \sqrt{x y + x t + y t} \Rightarrow n = 1$$

$$x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} + t \cdot \frac{\partial z}{\partial t} = n z = z$$

(۴)-۹۷

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y x + y}{x^r + x y + y^r}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y y + x}{x^r + x y + y^r}$$

$$x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y x^r + x y}{x^r + x y + y^r} + \frac{y y^r + x y}{x^r + x y + y^r} = \frac{y x^r + y x y + y y^r}{x^r + x y + y^r} = r$$

(۱)-۹۸

$$z_x = f + x \cdot \frac{-y}{x^r} f' - y x, \quad z_y = x \cdot \frac{1}{x} f' - y y$$

$$x \cdot z_x + y \cdot z_y = x \left(f - \frac{y}{x} f' - y x \right) + y (f' - y y) = x f - y f' - y x^r + y f' - y y^r$$

$$= x f - y^r - x^r - x^r - y^r = z - x^r - y^r$$

(۲)-۹۹

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda^r x^r + \lambda^r y^r}{\lambda^r x^r - \lambda^r y^r} = \frac{\lambda^r (x^r + y^r)}{\lambda^r (x^r - y^r)} = \lambda^r z \Rightarrow n = 0$$

(۴)-۱۰۰

$$F(\lambda x, \lambda y) = \lambda x \lambda y - \ln(\lambda x \lambda y) = \lambda^2 x y - \ln \lambda^2 x y$$

(۲)-۱۰۱

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^{-r} x^{-r} \cdot \lambda y \ln \frac{\lambda y}{\lambda x} = \lambda^{-1} x^{-r} y \ln \frac{y}{x} \Rightarrow n = -1$$

(۲)-۱۰۲

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \Rightarrow r + r x = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{r} \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \Rightarrow r + r y = 0 \Rightarrow y = -1 \end{cases}$$

(۱)-۱۰۳

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} = (x \cos y) \left(\frac{v}{x} \right) + (-x^y \sin y) \left(-\frac{u}{x^y} \right)$$

زیرا داریم:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= x \cos y, \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{v}{\sqrt{u^y + v^y}} = \frac{v}{x}, \frac{\partial z}{\partial y} = -x^y \sin y \\ \frac{\partial y}{\partial v} &= \frac{1}{1 + \left(\frac{u}{v}\right)^y} \left(\frac{-u}{v^y} \right) = \frac{-u}{u^y + v^y} = \frac{-u}{x^y} \end{aligned}$$

(۴)-۱۰۴

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= x \cos(x^y + y \cos y) \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = x(+y \sin y)(\sin(x^y + y \cos y)) \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= x \sin y(\sin(x^y + y \cos y)) \end{aligned}$$

(۱)-۱۰۵ راه حل اول:

$$z = e^{\ln x} e^{\ln y} = e^{\ln x + \ln y} = e^{\ln xy}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{x} e^{\ln xy} \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{1}{x^2} e^{\ln xy} + \frac{1}{x^2} e^{\ln xy} = 0$$

راه حل دوم:

$$z = e^{\ln xy} = xy \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = y \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$$

(۴)-۱۰۶

$$\begin{aligned} d^2 z &= z_{xx} dx^2 + z_{xy} dy^2 + z_{xt} dt^2 + 2z_{xy} dx dy + 2z_{xt} dx dt + 2z_{yt} dy dt \\ d^2 z &= 2y^2 t^2 dx^2 + 2x^2 t^2 dy^2 + 2x^y y^t dt^2 + 4xyt^2 dx dy + 4xyt^2 dx dt + 4x^y y^t dy dt \\ d^2 z &= 2(\circ_f \circ_f^2) + 4(\circ_f \circ_f^2) = \circ_f \circ_f^2 + \circ_f 2f^2 = \circ_f 2^{\circ} \end{aligned}$$

(۴)-۱۰۷

(۱)-۱۰۸ اگر $\alpha = xy$ باشد، می‌دانیم $\sin^y \alpha + \cos^y \alpha = 1$ بنا براین:

$$z = \sin^y(xy) + \cos^y(xy) = 1 \Rightarrow dz = 0 \times dx + 0 \times dy = 0$$

(۱)-۱۰۹

$$\begin{aligned} dz &= \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = \cos x \cdot dx + \sin y \cdot dy \\ \left(\frac{\pi}{y}, \frac{\pi}{x} \right) : dz &= \cos \left(\frac{\pi}{y} \right) \cdot \frac{1}{y} + \sin \left(\frac{\pi}{x} \right) \cdot \frac{-1}{x} = 0 + \frac{\sqrt{2}}{y} \times \frac{-1}{x} = -\frac{\sqrt{2}}{x} \end{aligned}$$

(۳)-۱۱۰

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= e^x \cos y \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = e^x \cos y, \frac{\partial z}{\partial y} = -e^x \sin y \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -e^x \cos y \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= e^x \cos y - e^x \cos y = 0 \end{aligned}$$

(۳)-۱۱۱

$$\begin{cases} z_x = 6x + 2y + 2 = 0 \\ z_y = 2x + 2y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x + 2y = -2 \\ -2x - 2y = 1 \end{cases} \Rightarrow x = -\frac{1}{4}, y = -\frac{1}{4}$$

$$z_{xx} = 6, z_{xy} = z_{yx} = 2, z_{yy} = 2$$

$$|H_1| = 6 > 0, |H_1| = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 12 - 4 = 8 > 0 \Rightarrow (-1/4, -1/4) \text{ می‌نیم است.}$$

(۳)-۱۱۲

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 6xy$$

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 2x - 6y = 0 \\ f_y(x, y) = 2y - 6x = 0 \end{cases} \Rightarrow M_1(0, 0), M_2(2, 2)$$

$$f_{xx}(x, y) = 2, f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = -6, f_{yy}(x, y) = 2$$

$$M_1(0, 0) : |H_1| = 2x = 0, |H_1| = \begin{vmatrix} 2 & -6 \\ -6 & 2 \end{vmatrix} = 0 - 36 < 0 \Rightarrow \text{نقطه زینی است}$$

$$M_2(2, 2) : |H_1| = 12 > 0, |H_1| = \begin{vmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 12 \end{vmatrix} = 144 - 36 > 0 \Rightarrow \text{نقطه می‌نیم است}$$

$$f(2, 2) = 8 + 8 - 24 = -8$$

(۳)-۱۱۳

$$z_{xx} = 6x, z_{xy} = z_{yx} = -2, z_{yy} = 6y$$

$$(0, 0) : |H_1| = 0, |H_1| = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -4 < 0 \Rightarrow \text{نقطه زینی است}$$

$$(1, 1) : |H_1| = 6 > 0, |H_1| = \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = 40 > 0 \Rightarrow \text{نقطه می‌نیم است}$$

(۱)-۱۱۴

$$\begin{cases} z_x = 2y - 4x + 4 = 0 \\ z_y = 2x - 10y + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y - 4x = -4 \\ 2x - 10y = -4 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{4}{3}, y = \frac{2}{3}$$

$$z_{xx} = -4, z_{yy} = -10, z_{xy} = z_{yx} = 2$$

$$|H_1| = -4 < 0, |H_1| = \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -10 \end{vmatrix} = 40 - 4 = 36 > 0 \Rightarrow \text{نقطه ماکزیمم است}$$

(۱)-۱۱۵

$$\begin{cases} z_x = 8x^2 - 2x = 0 \Rightarrow 2x(4x - 1) = 0 \Rightarrow x = 0, x = \frac{1}{4}, x = -\frac{1}{4} \\ z_y = 6y = 0 \Rightarrow y = 0 \end{cases}$$

نقاط بحرانی عبارتند از $M_1(0, 0)$ و $M_2(1/2, 0)$ و $M_3(-1/2, 0)$.

$$z_{xx} = 24x^2 - 2, z_{yy} = 6, z_{xy} = z_{yx} = 0$$

$$M_1: |H_1| = -2 < 0, |H_2| = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = -12 < 0 \Rightarrow M_1 \text{ نقطه زینی است}$$

$$M_2: |H_1| = 4 > 0, |H_2| = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = 36 > 0 \Rightarrow M_2 \text{ نقطه می نیم است}$$

$$M_3: |H_1| = 4 > 0, |H_2| = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = 36 > 0 \Rightarrow M_3 \text{ نقطه می نیم است}$$

(۱)-۱۱۶

$$\begin{cases} z_x = 2x + y - 3 = 0 \\ z_y = x + 2y - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4x - 2y = -6 \\ x + 2y = 6 \end{cases} \Rightarrow x = 0, y = 3 \Rightarrow z = -9$$

$$z_{xx} = 2, z_{yy} = 2, z_{xy} = z_{yx} = 1$$

$$|H_1| = 2 > 0, |H_2| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 > 0 \Rightarrow (0, 3, -9) \text{ نقطه می نیم است}$$

(۱)-۱۱۷

$$\begin{cases} z_x = 26x - 26 = 0 \Rightarrow x = 1 \\ z_y = -64y - 128 = 0 \Rightarrow y = -2 \end{cases}$$

$$z_{xx} = 26, z_{yy} = -64, z_{xy} = z_{yx} = 0$$

$$|H_1| = 26 > 0, |H_2| = \begin{vmatrix} 26 & 0 \\ 0 & -64 \end{vmatrix} = -2304 < 0 \Rightarrow (1, -2) \text{ نقطه زینی است}$$

(۱)-۱۱۸

$$\begin{cases} z_{x_1} = 2x_1 - 3x_2 = 0 \\ z_{x_2} = -3x_1 + 6x_2 + 4x_3 = 0 \\ z_{x_3} = 4x_2 + 12x_3 = 0 \end{cases}$$

چون دستگاه فوق همگن خطی است، می توان درمیان ضرایب مجهولات را تشکیل داد. جواب های دستگاه همگن

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -3 & 6 & 4 \\ 0 & 4 & 12 \end{vmatrix} = 220 \neq 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = 0 \text{ یعنی برابر صفرند، اکنون نوع نقطه بحرانی}$$

$M(0, 0, 0)$ را تعیین می کنیم.

$$z_{x_1x_1} = 2, z_{x_1x_2} = 6, z_{x_2x_2} = 12, z_{x_1x_3} = -3, z_{x_2x_3} = -3, z_{x_3x_3} = 4$$

$$|H_1| = 2 > 0, |H_2| = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 3 > 0, |H_3| = 220 > 0 \Rightarrow M \text{ نقطه می نیم است}$$

(۲)-۱۱۹

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 - 3by = 0 \Rightarrow y = \frac{x^2}{b} \\ z_y = -3bx + 3y^2 = 0 \Rightarrow -3bx + \frac{3x^2}{b^2} = 0 \Rightarrow \frac{-3b^2x + 3x^2}{b^2} = 0 \Rightarrow x = 0, x = b \end{cases}$$

نقاط بحرانی عبارتند از $M_1(0, 0)$ و $M_2(b, b)$:

$$z_{xx} = 6x, z_{yy} = 6y, z_{xy} = z_{yx} = -3b$$

$$M_1: |H_1| = 0, |H_2| = \begin{vmatrix} 0 & -3b \\ -3b & 0 \end{vmatrix} = -9b^2 < 0 \Rightarrow M_1 \text{ نقطه زینی است}$$

$$M_2: |H_1| = 6b > 0, |H_2| = \begin{vmatrix} 6b & -3b \\ -3b & 6b \end{vmatrix} = 27b^2 > 0 \Rightarrow M_2 \text{ نقطه می‌نیم است}$$

$$M_2(b, b) \Rightarrow z = b^3 - 3b^3 + b^3 = -b^3$$

(۲)-۱۲۰

$$\begin{cases} z_x = \frac{\partial f}{\partial x} = 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \\ z_y = \frac{\partial f}{\partial y} = -2y = 0 \Rightarrow y = 0 \end{cases} \Rightarrow M(0, 0)$$

$$z_{xx} = 2, z_{yy} = -2, z_{xy} = z_{yx} = 0$$

$$|H_1| = 2 > 0, |H_2| = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4 < 0 \Rightarrow M \text{ نقطه زینی است}$$

(۳)-۱۲۱

$$\begin{cases} z_x = 4x = 0 \Rightarrow z_{xx} = 4, z_{xy} = 0 \\ z_y = -4ay = 0 \Rightarrow z_{yy} = -4a, z_{yx} = 0 \end{cases}$$

$$|H_1| = 4 > 0, |H_2| = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -4a \end{vmatrix} = -4a < 0 \Rightarrow a > 0$$

(۴)-۱۲۲

$$\begin{cases} z_x = y - \frac{2}{x^2 + y^2} = 0 \Rightarrow x^2 y + y^3 - 2x = 0 \\ z_y = x - \frac{2y}{x^2 + y^2} = 0 \Rightarrow x^3 + xy^2 - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow -2x^2 + 2y^2 = 0 \Rightarrow x = y$$

$$\begin{aligned} x^2 &= y^2 \Rightarrow \begin{cases} y^2 + y^2 - 2x = 0 \\ x^2 + x^2 - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 = x \\ x^2 = y \end{cases} \Rightarrow M_1(1, 1), M_2(-1, -1) \\ x^2 &= y^2 \Rightarrow \begin{cases} y^2 + y^2 - 2x = 0 \\ x^2 + x^2 - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 = x \\ x^2 = y \end{cases} \end{aligned}$$

$$z_{xx} = -\frac{2(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2}, z_{yy} = -\frac{2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}, z_{xy} = z_{yx} = 1 + \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$M_1: |H_1| = 0, |H_2| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0 \Rightarrow M_1 \text{ نقطه زینی است}$$

$$M_2: |H_1| = 0, |H_2| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0 \Rightarrow M_2 \text{ نقطه زینی است}$$

(۱)-۱۲۳

$$\begin{cases} z_x = 2x - 2y + 5 = 0 \\ z_y = -2x + 2y - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 2y = -5 \\ -2x + 2y = 3 \end{cases} \Rightarrow x = -1, y = \frac{1}{2}$$

(۱۱)-۱۲۴

$$\begin{cases} z_x = 2x + m = 0 \Rightarrow x = -\frac{m}{2} \xrightarrow{x=1} m = -2 \\ z_y = 2y - 2 = 0 \Rightarrow y = 1 \end{cases}$$

(۳)-۱۲۵

$$\begin{cases} z_x = 2x - 2x^2 = 0 \Rightarrow 2x(1-x) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 1 \\ z_y = 2y + 2 = 0 \Rightarrow y = -1 \end{cases}$$

نقاط بحرانی عبارتند از: $M_1(0, -1/2)$ و $M_2(1, -1/2)$

$$z_{xx} = 2 - 4x, z_{yy} = 2, z_{xy} = z_{yx} = 0$$

$$M_1: |H_1| = 2 > 0, |H_2| = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0 \Rightarrow \text{نقطه می‌نیم است}$$

$$M_2: |H_1| = -2 < 0, |H_2| = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4 < 0 \Rightarrow \text{نقطه زینی است}$$

(۴)-۱۲۶

$$\begin{cases} z_x = \cos x + \cos(x+y) = 0 \\ z_y = \cos y + \cos(x+y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \cos x = \cos y \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}, y = \frac{\pi}{2}$$

$$z_{xx} = -\sin x - \sin(x+y), z_{yy} = -\sin y - \sin(x+y), z_{xy} = z_{yx} = -\sin(x+y)$$

$$\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right): z_{xx} = -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -\sqrt{2}, z_{yy} = -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -\sqrt{2}, z_{xy} = z_{yx} = -\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$|H_1| = -\sqrt{2} < 0, |H_2| = \begin{vmatrix} -\sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\sqrt{2} \end{vmatrix} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} > 0 \Rightarrow \text{نوع نقطه ماکزیم است}$$

(۴)-۱۲۷

$$\begin{cases} z_x = 2ax + y - 2 = 0 \Rightarrow z_{xx} = 2a, z_{xy} = 1 \\ z_y = x + 2by + 2 = 0 \Rightarrow z_{yy} = 2b, z_{yx} = 1 \end{cases}$$

$$|H_1| = 2a > 0, |H_2| = \begin{vmatrix} 2a & 1 \\ 1 & 2b \end{vmatrix} = 2ab - 1 > 0 \Rightarrow ab > \frac{1}{2}$$

(۳)-۱۲۸

$$\begin{cases} z_x = \frac{f}{x} - 1 = 0 \Rightarrow x = f \\ z_y = e^y - 1 = 0 \Rightarrow y = 0 \end{cases} \Rightarrow z = f \ln f + 1 - f - 0 = f \ln f - f$$

$$z_{xx} = -\frac{f}{x^2}, z_{yy} = e^y, z_{xy} = z_{yx} = 0$$

$$(f, 0) : |H_1| = -\frac{f}{1f} = -\frac{1}{f} < 0, |H_2| = \begin{vmatrix} -\frac{1}{f} & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{f} < 0 \Rightarrow \text{نوع نقطه زینی است}$$

(۴)-۱۲۹

$$\begin{cases} z_x = 2x - \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow 2x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \\ z_y = 2y - \frac{1}{y} = 0 \Rightarrow 2y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \xrightarrow{(x>0, y>0)} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 + \ln 2 \right)$$

$$z_{xx} = 2 + \frac{1}{x^3}, z_{yy} = 2 + \frac{1}{y^3}, z_{xy} = z_{yx} = 0$$

$$|H_1| = 2 > 0, |H_2| = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0 \Rightarrow \text{نقطه می‌نیم است} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 + \ln 2 \right)$$

یادآوری:

$$z = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 - \ln \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{2}{4} + \frac{2}{4} - \ln \frac{1}{2} = 1 - \ln 2^{-1} = 1 + \ln 2$$

(۳)-۱۳۰

$$\begin{cases} z_x = 2(x-1) = 0 \Rightarrow x = 1 \\ z_y = -2(y-1) = 0 \Rightarrow y = 2 \end{cases} \Rightarrow \text{نقطه بحرانی } (1, 2)$$

$$z_{xx} = 2, z_{yy} = -2, z_{xy} = z_{yx} = 0$$

$$|H_1| = 2 > 0, |H_2| = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4 < 0 \Rightarrow \text{نقطه زینی است} (1, 2)$$

(۱)-۱۳۱

$$\begin{cases} z_x = \frac{y}{x} - 1 = 0 \Rightarrow y - 1 = 0 \Rightarrow y = 1 \\ z_y = \ln x = 0 \Rightarrow x = e \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$

$$z_{xx} = -\frac{y}{x^2}, z_{yy} = 0, z_{xy} = z_{yx} = \frac{1}{x}$$

$$|H_1| = -1 < 0, |H_2| = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0 \Rightarrow \text{نقطه زینی است} (1, 1)$$

(۱)-۱۳۲

$$\begin{cases} z_x = 2x - 4 = 0 \Rightarrow z_{xx} = 2, z_{xy} = 0 \\ z_y = 4ay = 0 \Rightarrow z_{yy} = 4a, z_{yx} = 0 \end{cases}$$

$$|H_1| = 2 > 0, \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4a \end{vmatrix} = 8a > 0 \Rightarrow a > 0$$

(۱)-۱۳۳

$$\begin{cases} z_x = -2x - 2 = 0 \Rightarrow z_{xx} = -2, z_{xy} = 0 \\ z_y = 2ay = 0 \Rightarrow z_{yy} = 2a, z_{yx} = 0 \end{cases}$$

$$|H_1| = -2 < 0, |H_2| = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2a \end{vmatrix} = -2a > 0 \Rightarrow a < 0$$

(۲)-۱۳۴

x	$-\infty$	2	$+\infty$
z_x		$+$	$-$

max

$$x + y = 6 \Rightarrow y = 6 - x \Rightarrow z = x(6 - x) \Rightarrow z_x = 6 - 2x = 0$$

$$\Rightarrow x = 3 \Rightarrow y = 6 - 3 \Rightarrow y = 3, z = 3 \times 3 = 9 \Rightarrow (3, 3, 9)$$

(۲)-۱۳۵

y	$-\infty$	1	$+\infty$
z_y		$-$	$+$

min

$$x + 2y = 4 \Rightarrow x = 4 - 2y \Rightarrow z = 4 - 2y + y^2 \Rightarrow z_y = -2 + 2y = 0$$

$$\Rightarrow y = 1 \Rightarrow x = 4 - 2 \Rightarrow x = 2, z = 2 + 1 = 3 \Rightarrow (2, 1, 3)$$

(۱)-۱۳۶

$$2x + y = 21 \Rightarrow y = 21 - 2x \Rightarrow z = 3x^2 + 4(21 - 2x)^2 - x(21 - 2x)$$

$$z = 8x^2 + 4(21 - 2x)^2 - 21x \Rightarrow z_x = 16x - 16(21 - 2x) - 21 = 0 \Rightarrow$$

$$42x = 357 \Rightarrow x = \frac{17}{4}, y = 21 - 2\left(\frac{17}{4}\right) \Rightarrow y = \frac{7}{2} \Rightarrow z = 264.75$$

(۴)-۱۳۷

$$L = 2x + y + \lambda(1 - x^2 - y^2)$$

$$L_x = 2 - 2x\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{2y} \Rightarrow x = 2y \Rightarrow y = \frac{x}{2}$$

$$L_y = 1 - 2y\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2y} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{2y} \Rightarrow x = 2y \Rightarrow y = \frac{x}{2}$$

$$L_\lambda = 1 - x^2 - y^2 = 0 \Rightarrow 1 - x^2 - \frac{x^2}{4} = 0 \Rightarrow \frac{5x^2}{4} = 1 \Rightarrow x = \pm \frac{2}{\sqrt{5}}$$

(۲)-۱۳۸

x	$-\infty$	1	$+\infty$
z_x		$+$	$-$

max

$$2x + y = 4 \Rightarrow y = 4 - 2x \Rightarrow z = x(4 - 2x) \Rightarrow z = 4x - 2x^2$$

$$z_x = 4 - 4x = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow z = 2$$

(۱)-۱۳۹

$$L = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \lambda(2 - x - y)$$

$$L_x = -1/x^2 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -1/x^2 \Rightarrow x^2 = y^2 \Rightarrow x = \pm y$$

$$L_y = -1/y^2 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -1/y^2 \Rightarrow x^2 = y^2 \Rightarrow x = \pm y$$

$$L_\lambda = 2 - x - y = 0 \Rightarrow 2 - x - x = 0 \Rightarrow x = 1, y = 1 \Rightarrow z = 1 + 1 = 2$$

$$|H_1| < 0, |H_2| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1/x^3 & 0 \\ 1 & 0 & -1/y^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -2 < 0 \Rightarrow \min(1, 1, 2)$$

(۲)-۱۴۰

$$2x + 3y = 5 \Rightarrow y = \frac{5}{3} - \frac{2}{3}x \Rightarrow z = x^2 - x \left(\frac{5}{3} - \frac{2}{3}x \right) \Rightarrow$$

$$z = \frac{5}{3}x^2 - \frac{5}{3}x \Rightarrow z_x = \frac{10}{3}x - \frac{5}{3} = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{7}{6}$$

$$\begin{array}{c|ccc} x & -\infty & \frac{1}{2} & +\infty \\ \hline z_x & - & 0 & + \end{array} \Rightarrow z = \left(\frac{1}{2} \right)^2 - \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{7}{6} \right) = \frac{1}{4} - \frac{7}{12} = -\frac{5}{12}$$

min

(۳)-۱۴۱

$$\begin{array}{c|ccc} y & -\infty & 1 & +\infty \\ \hline z_y & + & 0 & - \end{array} \quad \begin{aligned} x + 2y = 12 \Rightarrow x = 12 - 2y \Rightarrow z &= (12 - 2y)(y + 2) \\ z &= (10 - 2y)(y + 2) \Rightarrow z_x = -2(y + 2) + (10 - 2y) = -4y + 2 = 0 \\ \Rightarrow y &= 1 \Rightarrow x = 12 - 2 \Rightarrow x = 10 \end{aligned}$$

max

(۲)-۱۴۲

$$L = y^2 - x^2 + \lambda(8 - x - 2y)$$

$$L_x = -2x - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -2x \Rightarrow y = -2x$$

$$L_y = 2y - 2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = y$$

$$L_\lambda = 8 - x - 2y = 0 \Rightarrow 8 - x - 2(-2x) = 0 \Rightarrow x = -2, y = 4 \Rightarrow z = 12$$

(۴)-۱۴۳

$$L = ax + by + cz + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$$

$$\left. \begin{aligned} L_x &= a + 2\lambda x = 0 \Rightarrow \lambda = -a/2x \\ L_y &= b + 2\lambda y = 0 \Rightarrow \lambda = -b/2y \\ L_z &= c + 2\lambda z = 0 \Rightarrow \lambda = -c/2z \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$$

$$L_\lambda = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \Rightarrow \frac{(ay)^2}{b^2} + \frac{(bx)^2}{b^2} + \frac{(cx)^2}{b^2} - 1 = 0 \Rightarrow \frac{a^2 y^2 + b^2 y^2 + c^2 y^2 - b^2}{b^2} = 0$$

$$\Rightarrow y^2(a^2 + b^2 + c^2) = b^2 \Rightarrow y = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \Rightarrow x = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, z = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

تابع به ازای مقادیر بالا ماکزیمم می شود، بنابراین:

$$f = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} + \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} + \frac{c^2}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \quad (۱)-۱۴۴$$

$$F_x = 2x^2 + yz \Rightarrow F_x(1, 1, a) = 2 + a$$

$$F_y = 2y^2 + xz \Rightarrow F_y(1, 1, a) = 2 + a$$

$$F_z = 2z^2 + xy \Rightarrow F_z(1, 1, a) = 2a^2 + 1$$

در نتیجه:

$$2 + a + 2 + a + 2a^2 + 1 = 12 \Rightarrow 2a^2 + 2a - 5 = 0 \Rightarrow a = 1, a = -\frac{5}{2} \quad (۲)-۱۴۵$$

===== پاسخ تشریحی سؤالات تستی فصل ۱۰ =====
(۲)-۱

$$f(1) = 1, f(2) = \frac{2}{2+2} = \frac{1}{2}, f(3) = 1, f(4) = \frac{2}{4+2} = \frac{1}{3} \Rightarrow 1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{3}, \dots \quad (۱)-۲$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2}{2n^2 + 1} \approx \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2}{2n^2} = 1 \Rightarrow \text{هم‌گراست و به ۱ می‌گراید}$$

۳-۳) راه اول: بنا به قضیه ۱ قسمت ۱۰-۴، چون دنباله یکنوا (زیرا نزولی است) و کران دار است، بنابراین هم‌گراست.

$$u_n = \frac{2}{1}, \frac{2}{2}, \frac{2}{3}, \dots, \frac{n+1}{2n-1}, \dots, \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{2n-1} = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{هم‌گراست} \quad (۱)-۴$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (2^{n+1} - 2) = +\infty \Rightarrow \text{دنباله واگراست}$$

$$u_n = 1/2, 4/4, 9/8, 16/16, 25/32, \dots \quad (۳)-۵$$

(۳)-۶

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n^2 + 1} - n) = 0 \Rightarrow \text{هم‌گراست}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n} = e^{1 \times 2} = e^2 \Rightarrow \text{هم‌گراست}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n + (-1)^n}{\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\sqrt{n}} = +\infty \Rightarrow \text{واگراست}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{e^{-n}} = \frac{1}{e} = \frac{1}{2.718} < 1 \Rightarrow \text{هم‌گراست}$$

(۳)-۷

نه صعودی و نه نزولی $\Rightarrow u_n = (-1)^n = -1, 1, -1, 1, \dots$

$$u_n = \frac{2}{n^2 + 2} \Rightarrow u'_n = \frac{-2n(2)}{(n^2 + 2)^2} = -\frac{4n}{(n^2 + 2)^2} < 0 \Rightarrow \text{نزولی است}$$

$$u_n = \frac{n-4}{2n+1} \Rightarrow u'_n = \frac{(2n+1) - 2(n-4)}{(2n+1)^2} = \frac{9}{(2n+1)^2} > 0 \Rightarrow \text{صعودی است}$$

$$u_n = \frac{1}{n} \Rightarrow u'_n = -\frac{1}{n^2} < 0 \Rightarrow \text{نزولی است}$$

(۲)-۸

$$u_1 = 2 \times 1 = 2, u_9 = 2u_8 = 2(2 \times 5) = 2^0 \Rightarrow u_1 + 3u_9 = 2 + (3 \times 2^0) = 62$$

(۱)-۹

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left\{ \frac{1 + 2(1^n)}{5 + 2(1^n)} \right\} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1^n(1^0 + 1)}{1^0 n[5(1^0 - n) + 2]} = \frac{2}{5} \Rightarrow \text{هم‌گراست}$$

(۴)-۱۰

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{n} = \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{\text{هریبل}} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{n}}{1} = 0 \Rightarrow \text{هم‌گراست}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n^2}{e^{7n}} = \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{\text{هریبل}} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{6n}{7e^{7n}} = \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{\text{هریبل}} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{6}{7e^{7n}} = 0 \Rightarrow \text{هم‌گراست}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^{1/n} = \infty \Rightarrow \exp \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{n} = \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{\text{هریبل}} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{n}}{1} = 0 \Rightarrow \text{هم‌گراست}$$

(۳)-۱۱

$$u_1 = 3, u_2 = u_1 + 2 = 5, u_3 = u_2 + 2 = 7, u_4 = u_3 + 2 = 9$$

(۱)-۱۲

$$u_1 = 1, u_2 = u_1(3) = 3, u_3 = u_2(3) = (3)^2, u_4 = u_3(3) = (3)^3 \Rightarrow \dots \Rightarrow u_n = (3)^{n-1}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (3)^{n-1} = \infty \Rightarrow \text{واگراست}$$

(۴)-۱۳

$$S_1 = u_1 = \frac{1}{1 \times 2} = \frac{1}{2}, S_2 = S_1 + u_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \times 2} = \frac{3}{4},$$

$$S_3 = S_2 + u_3 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4 \times 2} = \frac{7}{8}$$

(۱)-۱۴

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{r^{n-1}} = 1 + \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \dots + \frac{1}{r^{n-1}} + \dots \Rightarrow a = 1, r = \frac{1}{r} < 1 \Rightarrow \text{سری هم‌گرا}$$

$$S_n = \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{1}{r}} = \frac{r}{r-1}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 1/n \text{ سری همساز است که } \sum_{n=1}^{+\infty} 1/4^n = 1/4 + 1/16 + 1/64 + \dots + 1/4^n + \dots \quad (۲)-۱۵$$

واگراست، پس بنا به قضیه ۲ قسمت ۱۰-۷ سری $\sum_{n=1}^{+\infty} 1/4^n$ واگراست. از طرفی $\sum_{n=1}^{+\infty} 1/4^n$ یک سری هندسی با $|r| = 1/4 < 1$ است، لذا هم‌گراست. در نتیجه بنا به قضیه ۵ قسمت ۱۰-۷ سری مفروض واگراست.

(۲)-۱۶

$$u_n = \frac{2^n - 1}{2^n}, \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n - 1}{2^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2^n}{2^n} - \frac{1}{2^n} \right) = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{واگراست}$$

۱۷- (۳) عبارت داده شده حد مجموع جملات یک تصاعد هندسی با $a = 2$ و $r = 1/3$ است، بنابراین:

$$S = \frac{a}{1-r} = \frac{2}{1-\frac{1}{3}} = 3$$

۱۸- (۴) به ترتیب برای گزینه‌های ۱ و ۲ و ۳ داریم: $|r| = |1/3| < 1$, $a = 2$ و $|r| = |1/2| < 1$, $a = 1$ و $|r| = |-1/2| < 1$, $a = 1$ و $|r| = |1/3| < 1$, $a = 1/9$ است. در نتیجه همگی هم‌گرا هستند.

۱۹- (۴) این سری یک سری هندسی نزولی نامتناهی با $a = 6$ و $r = 2/3$ است بنابراین $S = a/(1-r) = \frac{6}{1-2/3} = 18$.

۲۰- (۴) برای گزینه‌های ۲ و ۳ به کار نمی‌آید زیرا جملات سری مثبت هستند. برای گزینه ۱ نیز به کار نمی‌آید زیرا تابع $f(x) = 2 + \sin x/x^2$ بر $(1, +\infty)$ نزولی نیست. برای گزینه ۴ به کار می‌آید زیرا $f(x) = 1/x \ln x$ برای $x \geq 2$ پیوسته و نزولی است.

۲۱- (۱) چون شرط لازم هم‌گرایی را ندارد، یعنی $\lim_{n \rightarrow +\infty} (9/4)^{n-1} = +\infty$

۲۲- (۲)

$$S_1 = \frac{1}{1 \times 2} = \frac{1}{2}, S_2 = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} = \frac{2}{3}, S_3 = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} = \frac{3}{4} \\ \Rightarrow S_n = \frac{n}{n+1} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

۲۳- (۲)

$$\sum_{n=1}^5 2 \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} = 2 + 2 \left(\frac{1}{2} \right) + 2 \left(\frac{1}{2} \right)^2 + 2 \left(\frac{1}{2} \right)^3 + 2 \left(\frac{1}{2} \right)^4 = 2 \left(\frac{121}{81} \right)$$

۲۴- (۲) آزمون کوشی:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\left(1 + \frac{2}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n = e^{2 \times 1} = e^2$$

چون $e^2 > 1$ است، پس u_n واگراست.

۲۵- (۱) آزمون دالامبر:

$$u_n = \frac{2^n}{n!}, u_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}, \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{2}{n+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n+1} = 0 < 1 \Rightarrow \text{سری واگراست}$$

۲۶- (۲) قاعده: اگر $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^p u_n = L$ از نگاه در $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$

الف) اگر $p > 1$ و L موجود باشد، سری همگراست.

ب) اگر $p \leq 0$ و $L \neq 0$ (یا L ممکن است ∞ باشد)، سری واگراست.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{1/2} \cdot \frac{\ln n}{\sqrt{n+1}} = +\infty \Rightarrow \text{سری واگراست}$$

(۱)-۲۷

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = (\sqrt{2} - \sqrt{1}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \dots + (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \sqrt{n+1} - \sqrt{1}$$

S_n صعودی است و کران دار نیست. بنابراین سری واگراست.

(۲)-۲۸ (۴) آزمون دالامبر:

$$u_n = \frac{1}{n(n-1)(n-2)\dots(3)(2)(1)}, u_{n+1} = \frac{1}{(n+1)(n)(n-1)\dots(3)(2)(1)}$$

$$\Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{n+1}, \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1 \Rightarrow \text{هم‌گراست}$$

(۲)-۲۹

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)!/(n+1)^{n+1}}{n!/n^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \left(\frac{n}{n+1} \right)^n \right|$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \left(1 - \frac{1}{n+1} \right)^n \right| = e^{-1} \Rightarrow \frac{1}{R} = e^{-1} \Rightarrow R = e$$

(۱)-۳۰

$$u_n = S_n - S_{n-1}, S_n = \ln \left(\frac{1}{1+n} \right), S_{n-1} = \ln \left(\frac{1}{n-1+1} \right) = \ln \left(\frac{1}{n} \right)$$

$$u_n = \ln \left(\frac{1}{1+n} \right) - \ln \left(\frac{1}{n} \right) = \ln \frac{\frac{1}{1+n}}{\frac{1}{n}} = \ln \frac{n}{n+1} \xrightarrow{\text{سری ناشماره}} \sum_{n=1}^{+\infty} \ln \frac{n}{n+1}$$

(۱)-۳۱ سری داده شده از نوع هندسی است با $u = 1/5 < 1$ و در نتیجه هم‌گراست به $a/1 - r =$

$$\frac{1/5}{1 - 1/5} = 1/4$$

(۲)-۳۲

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n(2n-1)(1-x)}{2^{n+1}(2n+2)} = |x+1| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n-1)}{2(2n+2)} = \frac{1}{2}|x-1|$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{2} \Rightarrow R = 2 \quad \text{شعاع هم‌گرایی}$$

$$1-2 < x < 1+2 \Rightarrow -1 < x < 3 \quad \text{فاصله هم‌گرایی}$$

(۳)-۳۳ آزمون کوشی:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+2} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{2n+2} \right) = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \text{سری هم‌گراست}$$

(۲)-۳۴ آزمون نسبت:

$$u_{n+1} = \frac{(n+1)^{n+1}}{a^{n+1}(n+1)!}, u_n = \frac{n^n}{a^n n!} \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{a^{n+1}(n+1)!}}{\frac{n^n}{a^n n!}} = \frac{(n+1)^{n+1}}{a(n+1)n^n}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{(n+1)^{n+1}}{a(n+1)n^n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{1}{a} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right| = \left| \frac{e}{a} \right|$$

در نتیجه هرگاه $a > e$ سری هم‌گراست و هرگاه $a < e$ سری واگراست.
 ۳۵- (۳) اگر $x \neq 0$ داریم:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{(n+1)! x^{n+1}}{n! x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} |(n+1)x| = |x| \lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1) = +\infty \quad (۲)-۳۶$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{(n+1)^{n+1} x^{n+1}}{n^n x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1) \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n |x| \\ &= e \lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1)|x| = +\infty > 1, (x \neq 0 \text{ برای } \Rightarrow \text{فاصله هم‌گرایی} = \{0\}) \end{aligned}$$

(۴)-۳۷

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{2^{n+1} x^{n+1} / (n+1)!}{2^n x^n / n!} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2|x|}{n+1} = 0 < 1$$

در نتیجه سری برای هر $x \in R$ هم‌گراست و $(-\infty, +\infty)$ فاصله هم‌گرایی.
 ۳۸- (۴) جمله عمومی سری توانی داده شده به صورت $u_n = nx^{n-1}$ است.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{(n+1)x^n}{nx^{n-1}} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n} |x| = |x|$$

بازای $|x| < 1$ این سری هم‌گرا می‌باشد، پس $-1 < x < 1$. اگر $x = 1$ باشد سری به صورت $u_n = n$ بنا بر این سری در این حالت واگراست. اگر $x = -1$ باشد سری به صورت $u_n = (-1)^{n-1}n$ است و $u_n = 1 - 2 + 3 - 4 + \dots$ در این حالت نیز سری واگراست.

(۳)-۳۹

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{n!x}{(n+1)n!} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} |x| = 0 \times |x| = 0 \Rightarrow \frac{1}{R} = 0 \Rightarrow R = \infty \end{aligned}$$

(۱)-۴۰

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{x^{n+1} / (n+1)!}{x^n / n!} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{n! + 2n + 1} |x| = |x|$$

بازای $|x| < 1$ این سری هم‌گرا می‌باشد، پس $-1 < x < 1$. در $x = 1$ و $x = -1$ باید هم‌گرایی این سری را بررسی نمود.

$$x = 1 \Rightarrow u_n = \frac{1}{n!}, \text{ آزمون } p, p = 2 > 1 \Rightarrow \text{سری هم‌گراست}$$

$$x = -1 \Rightarrow u_n = \frac{(-1)^n}{n!}, \text{ آزمون سری های متناوب, } \begin{cases} \text{اولاً: } |u_{n+1}| < |u_n| \\ \text{ثانیاً: } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{سری هم‌گراست}$$

پس این سری در $x = 1$ و $x = -1$ نیز هم‌گراست. پس $-1 \leq x \leq 1$ فاصله هم‌گرایی است.

۴۱- (۴)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1} / (2n-1)2^n}{(-1)^{n+1} x^{n+1} / (2n-3)2^{n-1}} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{2n-3}{2n-1} \right) |x| = -\frac{1}{2} |x|$$

به‌ازای $|x| < 1/2$ این سری هم‌گرا می‌باشد، پس $-2 < x < 2$. در $x = 2$ و $x = -2$ باید هم‌گرایی این سری را بررسی نمود.

$$x = 2 \Rightarrow u_n = (-1)^n \frac{1}{2n-1}, \text{ آزمون سری‌های متناوب, } \begin{cases} \text{اولاً: } |u_{n+1}| < |u_n| \\ \text{ثانیاً: } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{سری هم‌گراست}$$

$$x = -2 \Rightarrow u_n = \frac{1}{2n-1} \Rightarrow \frac{1}{2n-1} > \frac{1}{2n} \text{ سری واگراست} \Rightarrow \text{آزمون مقایسه}$$

پس سری اصلی برای مقادیر $-2 < x \leq 2$ هم‌گراست.

۴۲- (۱) جملات u_n به‌صورت $2/3 - 3/5 + 4/7 - 5/9 + \dots$ است. بنابراین سری داده شده یک سری متناوب است. آزمون سری‌های متناوب:

$$\text{سری واگراست} \Rightarrow \frac{1}{2} \neq 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{2} \neq 0 \text{ ثانیاً: } |u_{n+1}| < |u_n| \text{ اولاً:}$$

۴۳- (۲) آزمون کوشی:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{(\ln n / 100)^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{100} = +\infty > 1 \Rightarrow u_n \text{ واگراست}$$

۴۴- (۳) آزمون نسبت:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{3^{n+1} / (n+1)^2}{3^n / n^2} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n^2}{(n+1)^2} = 3 > 1 \Rightarrow \text{سری واگراست}$$

۴۵- (۲) به‌ازای $n = 2$ گزینه‌های داده شده را امتحان می‌کنیم:

$$۱) \frac{2^2}{3 \times 2 - 1} x^2 = \frac{2^2}{5} x^2 \quad ۲) (-1)^{2+1} \frac{2^2}{3 \times 2 - 1} x^2 = -\frac{2^2}{5} x^2$$

$$۳) \frac{(-1)^{2+1}}{3 \times 2 - 1} x^2 = -\frac{1}{3} x^2 \quad ۴) (-1)^{2+1} \frac{2^2}{3 \times 2 - 1} x^2 = -\frac{2^2}{3} x^2$$

۴۶- (۳) داریم $f(x) = 1/2 \sin 2x$ از بسط $\sin t$ استفاده کرده و به‌جای t مقدار $2x$ قرار می‌دهیم:

$$\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \dots \Rightarrow \frac{1}{2} \sin 2x = \frac{1}{2} (2x) - \frac{1}{2} \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{1}{2} \frac{(2x)^5}{5!} - \dots$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \sin 2x = x - \frac{2}{3} x^3 + \dots$$

۴۷- (۳) سری مک‌لورن:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

$$f(x) = \sin x \Rightarrow f'(x) = \cos x \Rightarrow f''(x) = -\sin x \Rightarrow f'''(x) = -\cos x \Rightarrow \dots$$

$$f(0) = 0, f'(0) = 1, f''(0) = 0, f'''(0) = -1, \dots$$

$$f(x) = 0 + x + \frac{0}{2!}x^2 + \frac{-1}{3!}x^3 + \dots = x - \frac{x^3}{3!} + \dots$$

۴۸- (۱) سری مکالورن

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

برای محاسبه $f'(0)$ ، از تعریف مشتق استفاده می‌کنیم:

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-1/x^2} - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{e^{1/x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{+\infty} \xrightarrow{\text{مربع}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{x^2}}{e^{1/x^2} \left(-\frac{2}{x^3}\right)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2e^{1/x^2}} = 0$$

با استفاده از تعریف مشتق و قاعده هوییتال، برای همه مشتق‌ها مقدار ۰ به دست می‌آید لذا به ازای هر n ، $f^{(n)}(0) = 0$ پس سری مکالورن تابع مفروض به صورت $0 + 0 + \dots + 0$ است.

۴۹- (۱) سری مکالورن

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

$$f(x) = \ln(1-x) \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{1-x} \Rightarrow f''(x) = -\frac{1}{(1-x)^2} \Rightarrow f'''(x) = -\frac{2}{(1-x)^3} \Rightarrow \dots$$

$$f(0) = 0, f'(0) = -1, f''(0) = -2, f'''(0) = -6$$

$$f(x) = 0 + (-1)x + \frac{(-2)}{2!}x^2 + \frac{(-6)}{3!}x^3 + \dots = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots$$

۵۰- (۲)

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \dots$$

$$f(x) = (1+x)^{-2} \Rightarrow f'(x) = -2(1+x)^{-3} \Rightarrow f''(x) = 2 \times 3(1+x)^{-4} \Rightarrow f'''(x) = -2 \times 3 \times 4(1+x)^{-5}$$

$$f(2) = 3^{-2} = \frac{1}{9}, f'(2) = -2(3)^{-3} = -\frac{2}{27}, f''(2) = 6(3)^{-4} = \frac{6}{81}, f'''(2) = -24(3)^{-5} = -\frac{24}{243}$$

$$f(x) = \frac{1}{9} - \frac{2}{27}(x-2) + \frac{6}{81}(x-2)^2 - \frac{24}{243}(x-2)^3 + \dots$$

۵۱- (۲) بسط مکالورن تابع $1/(1+x)$ را می‌نویسیم:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots, |x| < 1$$

با انتگرال‌گیری جمله به جمله داریم:

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots, |x| < 1$$

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}x^3 + \dots$$

۵۲- (۱)

$$f(x) = f(a) + f'(a)x + \frac{f''(a)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}x^n + \dots$$

$$f(x) = (1+x)^\lambda \Rightarrow f'(x) = \lambda(1+x)^{\lambda-1} \Rightarrow f''(x) = \lambda(\lambda-1)(1+x)^{\lambda-2} \Rightarrow$$

$$f'''(x) = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(1+x)^{\lambda-3} \Rightarrow \dots$$

$$f(0) = 1, f'(0) = \lambda, f''(0) = \lambda(\lambda-1), f'''(0) = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2), \dots$$

$$f(x) = 1 + \lambda x + \frac{\lambda(\lambda-1)}{2!}x^2 + \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)}{3!}x^3 + \dots$$

۵۳- (۳) درست (۴۷) مشاهده کردیم سری مک‌لورن تابع $f(x) = \sin x$ به صورت زیر است:

$$f(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \dots$$

به ازای $n = 0$ داریم:

$$۱) u(0) = (-1)^0 \frac{x}{1!} = -x \quad ۲) u(0) = (-1)^0 \frac{x^{-1}}{(-1)!} \text{ نامعین} \quad ۳) u(0)(-1)^0 = \frac{x}{1!} = x$$

۵۴- (۳) سری تیلور:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots$$

$$f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f''(x) = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow f'''(x) = \frac{2}{x^3} \Rightarrow \dots$$

$$f(1) = 0, f'(1) = 1, f''(1) = -1, f'''(1) = 2, \dots$$

$$f(x) = 0 + 1(x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{6}(x-1)^3 - \dots = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \dots$$

۵۵- (۴) سری مک‌لورن:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

$$f(x) = a^x \Rightarrow f'(x) = a^x \ln a \Rightarrow f''(x) = a^x \ln^2 a \Rightarrow f'''(x) = a^x \ln^3 a \Rightarrow \dots$$

$$f(0) = a^0 = 1, f'(0) = a^0 \ln a = \ln a, f''(0) = a^0 \ln^2 a = \ln^2 a, f'''(0) = a^0 \ln^3 a = \ln^3 a, \dots$$

$$f(x) = 1 + x \ln a + \frac{x^2}{2!} \ln^2 a + \dots$$

۵۶- (۱) سری مک‌لورن:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

$$f(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = -\sin x \Rightarrow f''(x) = -\cos x \Rightarrow f'''(x) = \sin x \Rightarrow f^{(4)}(x) = \cos x \Rightarrow \dots$$

$$f(0) = 1, f'(0) = 0, f''(0) = -1, f'''(0) = 0, f^{(4)}(0) = 1, \dots$$

$$f(x) = 1 + (0)x + \frac{(-1)}{2!}x^2 + \frac{(0)}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

۵۷- (۱) سری مک‌لورن

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

$$f(x) = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \Rightarrow f'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \Rightarrow f''(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \Rightarrow f'''(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \Rightarrow$$

$$f(0) = 1, f'(0) = 0, f''(0) = 1, f'''(0) = 0, \dots$$

$$f(x) = 1 + (0)x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{(0)}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

۵۸- (۴) بسط تابع $f(z) = e^z$ را به سری مک‌لورن می‌نویسیم:

$$f(z) = e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$$

در رابطه بالا z را به $x + y$ بدل می‌کنیم:

$$e^{x+y} = 1 + \frac{(x+y)}{1!} + \frac{(x+y)^2}{2!} + \frac{(x+y)^3}{3!} + \dots$$

(۱)-۵۹

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \dots$$

$$f'(a) = 3x^2 - 4x + 5 \Rightarrow f''(x) = 6x - 4 \Rightarrow f'''(x) = 6 \Rightarrow \dots$$

$$f(1) = -3, f'(1) = 4, f''(1) = 2, f'''(1) = 6$$

$$f(x) = -3 + 4(x-1) + (x-1)^2 + (x-1)^3$$

(۲)-۶۰

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \dots$$

$$f'(x) = 1 + \tan^2 x \Rightarrow f''(x) = 2 \tan x (1 + \tan^2 x) \Rightarrow$$

$$f'''(x) = 2(1 + \tan^2 x) + 2 \tan^2 x (1 + \tan^2 x)$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1, f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2, f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4, f'''\left(\frac{\pi}{4}\right) = 16$$

$$f(x) = 1 + 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{4}{2!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{16}{3!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 + \dots$$

پاسخ تشریحی سؤالات تستی فصل ۱۱

(۱)-۱

(۳)-۲ زیرا درجه این معادله دیفرانسیل یک می‌باشد.

(۳)-۳ گزینه ۱، مرتبه دوم و درجه سوم است. گزینه ۲، مرتبه سوم و درجه اول است. گزینه ۴، مرتبه سوم و درجه اول است.

(۲)-۴

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}cx^2 \\ y' = cx \end{cases} \Rightarrow \frac{y}{y'} = \frac{\frac{1}{2}cx^2}{cx} = \frac{x}{2} \Rightarrow y'x = 2y \Rightarrow y'x - 2y = 0$$

(۱)-۵ زیرا، اگر معادله دیفرانسیل از مرتبه دو باشد، جواب عمومی آن مشتمل بر دو پارامتر دلخواه است.

(۴)-۶

$$y' = e^x + x - 1 \Rightarrow dy = (e^x + x - 1)dx \Rightarrow y = e^x + \frac{1}{2}x^2 - x + c$$

$$(0, 1) \Rightarrow 1 = e^0 + 0 - 0 + c \Rightarrow c = 0 \Rightarrow y = e^x + \frac{1}{2}x^2 - x$$

(۲)-۷

$$\frac{dy}{dx} = \sin x - x \Rightarrow y = -\cos x - \frac{1}{2}x^2 + c$$

(۱)-۸

$$dx = (1 - \cos^2 y)dy \Rightarrow dx - (1 - \cos^2 y)dy = 0 \Rightarrow \int dx - \int (1 - \cos^2 y)dy = 0 \Rightarrow$$

$$x - \left(y - \frac{1}{3}(\sin^3 y)\right) = c \Rightarrow x - y + \frac{1}{3}\sin^3 y = c \Rightarrow y - x - \frac{1}{3}\sin^3 y = c$$

(۳)-۹

$$dy = (\cos x + x)dx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \cos x + x \Rightarrow y = \sin x + x^2 + c$$

$$c = 0 \Rightarrow y = \sin x + x^2$$

(۴)-۱۰

$$\frac{d^2y}{dx^2} = x^2 - x^{-2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = x^3 + \frac{1}{x} + c_1 \Rightarrow y = \frac{1}{4}x^4 + \ln x + c_1x + c_2$$

$$c_1 = c_2 = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{4}x^4 + \ln x$$

(۱)-۱۱ $(x+y)dx = xdy$ معادله دیفرانسیل همگن و درجه همگنی آن یک است.

$$(x+tx)dx = x(tdx+tdt) \Rightarrow xdx + txdx - txdx - x^2dt = 0$$

$$xdx - x^2dt = 0 \Rightarrow \frac{x}{x^2}dx - dt = 0 \Rightarrow \frac{1}{x}dx - dt = 0 \Rightarrow \int \frac{1}{x}dx - \int dt = 0 \Rightarrow$$

$$\ln x - t = c \Rightarrow t = \frac{y}{x} \Rightarrow \ln x - \frac{y}{x} = c \Rightarrow \ln x = \frac{y}{x} + c \Rightarrow$$

$$x = e^{y/x+c} \Rightarrow x = e^{y/x} \cdot e^c \xrightarrow{e^c=c} x = ce^{y/x}$$

(۲)-۱۲ می‌دانیم جواب هر معادله باید در خود آن معادله صدق کند، با جای‌گذاری جواب‌ها خواهیم داشت:

$$y = \frac{x^2}{3} + \frac{c}{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2x}{3} - \frac{c}{x^2} \xrightarrow{\text{جای‌گذاری}} x \left(\frac{2x}{3} - \frac{c}{x^2} \right) + \frac{x^2}{3} + \frac{c}{x} = x^2 \Rightarrow x \frac{dy}{dx} + y = x^2$$

(۱)-۱۳

$$\cot y dx + \cot x dy = 0 \Rightarrow \tan x dx + \tan y dy = 0 \Rightarrow \int \tan x dx + \int \tan y dy = 0 \Rightarrow$$

$$-\ln \cos x - \ln \cos y = c \xrightarrow{x=y=0} -\ln 1 - \ln 1 = c \Rightarrow c = 0$$

$$\ln(\cos x \cdot \cos y) = 0 \Rightarrow \cos x \cdot \cos y = e^c \Rightarrow \cos y = \frac{1}{\cos x} \Rightarrow \cos y = \sec x$$

(۱)-۱۴ $y^x dx - x^y dy = 0$ معادله دیفرانسیل جداسافت. بنابراین:

$$y^x dx = x^y dy \Rightarrow \frac{dx}{x^y} = \frac{dy}{y^x} \Rightarrow \frac{dx}{x^y} - \frac{dy}{y^x} = 0 \Rightarrow \int \frac{dx}{x^y} - \int \frac{dy}{y^x} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{x^{-y}}{-y} - \frac{y^{-x}}{-x} = c \Rightarrow -\frac{1}{yx^y} + \frac{1}{xy^x} = c \Rightarrow \frac{-y^x + x^y}{yx^yy^x} = c \Rightarrow \frac{x^y - y^x}{yx^yy^x} = c \Rightarrow x^y - y^x = cx^y y^x$$

(۱)-۱۵ $(xe^{y/x} + y)dx = xdy$ معادله دیفرانسیل همگن و درجه همگنی آن یک است. بنابراین:

$$(xe^t + tx)dx = x(tdx+tdt) \Rightarrow xe^t dx + txdx - txdx - x^2dt = 0$$

$$xe^t dx - x^2dt = 0 \Rightarrow e^t dx - xdt = 0 \Rightarrow \frac{1}{x}dx - \frac{1}{e^t}dt = 0 \Rightarrow$$

$$\ln x + e^{-t} = c \Rightarrow \ln x + e^{-y/x} = c$$

(۳)-۱۶

$$(x+1)\frac{dy}{dx} + y^2 = 0 \Rightarrow (x+1)dy + y^2 dx = 0 \Rightarrow \frac{dy}{y^2} + \frac{dx}{x+1} = 0 \Rightarrow \int \frac{dy}{y^2} + \int \frac{dx}{x+1} = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{y} + \ln(x+1) + c = 0 \Rightarrow \frac{1}{y} = \ln(x+1) + \ln c \Rightarrow \frac{1}{y} = \ln c(x+1) \Rightarrow y = \frac{1}{\ln c(x+1)}$$

۱۷- (۲) ضریب dx و dy توابعی همگن از درجه دو هستند، بنابراین:

$$(x^2 + t^2 x^2)dx + (2x^2 t)(tdx + xdt) = 0 \Rightarrow x^2 dx + t^2 x^2 dx + 2t^2 x^2 dx + 2x^2 t dt = 0$$

$$\Rightarrow x^2(1 + 2t^2)dx + 2x^2 t dt = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{x^2} dx + \frac{2t}{1 + 2t^2} dt = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x} dx + \frac{2t}{1 + 2t^2} dt = 0 \Rightarrow \int \frac{1}{x} dx + \int \frac{2t}{1 + 2t^2} dt = c \Rightarrow \ln x + \frac{1}{2} \ln(1 + 2t^2) = c$$

$$\Rightarrow x(1 + 2t^2)^{1/2} = e^c \xrightarrow{e^c=c} x \left(1 + \frac{2y^2}{x^2}\right)^{1/2} = c \Rightarrow x \sqrt{\frac{x^2 + 2y^2}{x^2}} = c \Rightarrow x^2 + 2xy^2 = c$$

۱۸- (۳) ضریب dx و dy توابعی همگن از درجه دو هستند. بنابراین:

$$(x^2 + t^2 x^2)dx - 2x^2 t(tdx + xdt) = 0 \Rightarrow x^2 dx + t^2 x^2 dx - 2t^2 x^2 dx - 2x^2 t dt = 0$$

$$\Rightarrow x^2(1 - t^2)dx - 2x^2 t dt = 0 \Rightarrow \frac{1}{x} dx - \frac{2t}{1 - t^2} dt = 0 \Rightarrow \int \frac{1}{x} dx - \int \frac{2t}{1 - t^2} dt = c$$

$$\Rightarrow \ln x - \ln(1 - t^2) = c \Rightarrow \frac{c}{1 - y^2/x^2} = e^c \xrightarrow{e^c=c} \frac{x^2}{x^2 - y^2} = c \xrightarrow{(1,0)} c = 1 \Rightarrow x^2 = x^2 - y^2$$

(۳)-۱۹

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x^{-1}}{y^{-1}} \Rightarrow \frac{1}{x} dx = \frac{1}{y} dy \Rightarrow \frac{dx}{x} - \frac{dy}{y} = 0 \Rightarrow \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dy}{y} = c$$

$$\Rightarrow \ln x - \ln y = c \Rightarrow \frac{x}{y} = c \xrightarrow{(1,1)} c = 1 \Rightarrow y = 2x \Rightarrow (۳) \text{ نمودار}$$

۲۰- (۱) ضریب dx و dy توابعی همگن از درجه صفرند بنابراین:

$$(x - tx \cdot \tan t)dx + x \tan t(tdx + xdt) = 0 \Rightarrow (1 - t \cdot \tan t)dx + \tan t(tdx + xdt) = 0$$

$$\Rightarrow dx + x \tan t dt = 0 \Rightarrow \int \frac{1}{x} dx + \int \tan t dt = c \Rightarrow \ln x - \ln |\cos t| = c \Rightarrow \ln \frac{x}{\cos t} = c \Rightarrow$$

$$\frac{x}{\cos t} = e^c \xrightarrow{e^c=c} x \cdot \sec t = c \Rightarrow x \cdot \sec \frac{y}{x} = c \xrightarrow{(1,0)} 1 \times \sec 0 = c \Rightarrow c = 1 \Rightarrow x \cdot \sec \frac{y}{x} = 1$$

جواب خصوصی

۲۱- (۲) چون $\partial M / \partial y = \partial N / \partial x = 1$ پس معادله فوق یک معادله دیفرانسیل کامل است. بنابراین:

$$۱) (x+y)dx = \frac{1}{y}x^2 + xy + \varphi(y) \quad , \quad ۲) x + \frac{\partial}{\partial y}\varphi(y) = x - 2y \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y}\varphi(y) = -2y$$

$$۳) \int -2y dy = -y^2 = \varphi(y) \quad , \quad ۴) \frac{1}{y}x^2 + xy - y^2 = c \Rightarrow x^2 + 2xy - 2y^2 = c$$

۲۲- (۴) چون $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = -\sin y$ پس معادله فوق یک معادله دیفرانسیل کامل است. بنابراین:

$$۱) \int \cos y dx = x \cos y + \varphi(y)$$

$$۲) -x \sin y + \frac{\partial}{\partial y} \varphi(y) = -x \sin y + y' \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y} \varphi(y) = y'$$

$$۳) \int y' dy = \frac{1}{2} y'^2 = \varphi(y)$$

$$۴) x \cos y + \frac{1}{2} y'^2 = c \Rightarrow 3x \cos y + y'^2 = c \xrightarrow{(2,0)} 6 \cos(0) + 0 = c \Rightarrow c = 6 \Rightarrow 3x \cos y + y'^2 = 6$$

۲۳- (۱) $3x^2 + 1 + e^y \cdot dy/dx = 0$ یا $(3x^2 + 1)dx + e^y \cdot dy = 0$ پس معادله فوق یک معادله دیفرانسیل جداست. بنابراین:

$$\int (3x^2 + 1)dx + \int e^y dy = c \Rightarrow x^3 + x + e^y = c \xrightarrow{(1,0)} 1 + 1 + e^0 = c \Rightarrow c = 3 \Rightarrow x^3 + x + e^y - 3 = 0$$

۲۴- (۳) این معادله یک معادله دیفرانسیل جداست، زیرا:

$$y'x - 2y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx}x - 2y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{y} - \frac{2dx}{x} = 0 \Rightarrow \int \frac{dy}{y} - \int \frac{2dx}{x} = c \Rightarrow$$

$$\ln |y| - 2 \ln |x| = c \Rightarrow \ln \frac{y}{x^2} = c \Rightarrow \frac{y}{x^2} = e^c \xrightarrow{e^c=c} \frac{y}{x^2} = c \Rightarrow y = cx^2$$

که متحنی نمودار تابع $y = cx^2$ بستگی به مقدار c دارد. اگر $c > 0$ نمودار به صورت $\cup$ و اگر $c < 0$ نمودار به صورت $\cap$ است. ۲۵- (۴) چون $\partial M/\partial y = \partial N/\partial x = 1/y + 1/3y^2 + xye^{xy}$ پس معادله فوق یک معادله دیفرانسیل کامل است.

بنابراین:

$$۱) \int (\ln y + y' + ye^{xy})dx = x \ln y + xy' + e^{xy} + \varphi(y)$$

$$۲) \frac{x}{y} + 3xy' + xe^{xy} + \frac{\partial}{\partial y} \varphi(y) = \frac{x}{y} + 3xy' + xe^{xy} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y} \varphi(y) = 0$$

$$۳)$$

$$۴) x \ln y + xy' + e^{xy} = c$$

۲۶- (۱)

$$(x \sin y - y)y' = \cos y \Rightarrow (x - \sin y) \frac{dy}{dx} = \cos y \Rightarrow \cos y dx - (x \sin y - y)dy = 0$$

چون $\partial M/\partial y = \partial N/\partial x = -\sin y$ پس معادله فوق یک معادله دیفرانسیل کامل است. بنابراین:

$$۱) \int \cos y dx = x \cos y + \varphi(y)$$

$$۲) -x \sin y + \frac{\partial}{\partial y} \varphi(y) = -x \sin y + y \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y} \varphi(y) = y$$

$$۳) \int y dy = \frac{1}{2} y^2 = \varphi(y)$$

$$۴) x \cos y + \frac{1}{2} y^2 = c \Rightarrow 2x \cos y + y^2 = c$$

(۱)-۲۷

$$ye^x - x + (e^x + 1)y' = 0 \Rightarrow ye^x - x + (e^x + 1)\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow (ye^x - x)dx + (e^x + 1)dy = 0$$

چون $\partial M / \partial y = \partial N / \partial x = e^x$ پس معادله فوق یک معادله دیفرانسیل کامل است. بنابراین:

$$۱) \int (ye^x - x)dx = ye^x - \frac{1}{2}x^2 + \varphi(y)$$

$$۲) e^x + \frac{\partial}{\partial y}\varphi(y) = e^x + 1 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y}\varphi(y) = 1$$

$$۳) \int dy = y = \varphi(y)$$

$$۴) ye^x - \frac{1}{2}x^2 + y = c \Rightarrow 2ye^x - x^2 + 2y = c \Rightarrow 2y(e^x + 1) - x^2 = c$$

(۲)-۲۸ چون $\partial M / \partial y = \partial N / \partial x = 2x^2 + 2yx$ پس معادله فوق یک معادله دیفرانسیل کامل است. بنابراین:

$$۱) \int (2x^2y + xy^2 + e^x)dx = x^2y + \frac{1}{3}x^3y^2 + e^x + \varphi(y)$$

$$۲) \int x^2 + x^2y + \frac{\partial}{\partial y}\varphi(y) = x^2 + x^2y + \sin y \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y}\varphi(y) = \sin y$$

$$۳) \int \sin y dy = -\cos y = \varphi(y)$$

$$۴) x^2y + \frac{1}{3}x^3y^2 + e^x - \cos y = c \Rightarrow 2x^2y + x^3y^2 + 2e^x - 2\cos y = c$$

(۱)-۲۹ معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول به صورت $y' + f(x).y = g(x)$ بنویسید:

$$۱) A = e^{\int 2x dx} = e^{x^2}, \quad ۲) y = \frac{c}{e^{x^2}} + \frac{1}{e^{x^2}} \int 2xe^{x^2} dx$$

برای $\int 2xe^{x^2} dx$ داریم:

$$u = 2x \Rightarrow du = 2dx, \quad dv = e^{x^2} dx \Rightarrow v = \frac{1}{2}e^{x^2}$$

$$\int 2xe^{x^2} dx = 2xe^{x^2} - \int \frac{2}{2}e^{x^2} dx = 2xe^{x^2} - e^{x^2} = e^{x^2}(2x - 1)$$

در نتیجه:

$$y = ce^{-x^2} + e^{-x^2}[e^{x^2}(2x - 1)] = ce^{-x^2} + e^{-x^2}(2x - 1) = ce^{-x^2} + 2x - 1$$

(۳)-۳۰ معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول به صورت $y' + f(x).y = g(x)$ بنویسید:

$$۱) A = e^{\int 2x dx} = e^{x^2}, \quad ۲) y = \frac{c}{e^{x^2}} + \frac{1}{e^{x^2}} \int xc^{x^2}e^{-x^2} dx = ce^{-x^2} + e^{-x^2} \int x dx \Rightarrow$$

$$y = ce^{-x^2} + \frac{1}{2}x^2e^{-x^2} \xrightarrow{(\cdot, 2)} 2 = c \Rightarrow y = 2e^{-x^2} + \frac{1}{2}x^2e^{-x^2} = e^{-x^2} \left(2 + \frac{1}{2}x^2 \right)$$

۳۱- (۲) معادله دیفرانسیل مرتبه اول به صورت $y' + f(x).y = g(x)$ است. زیرا

$$x^2 dy + (y - 2xy - 2x^2) dx = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} + \left(\frac{1-2x}{x^2} \right) y = 2$$

$$۱) A = e^{\int \frac{1-2x}{x^2} dx} = e^{-1/x - \ln x} = \frac{e^{-1/x}}{x}$$

$$۲) y = \frac{cx^2}{e^{-1/x}} + \frac{x^2}{e^{-1/x}} \int \frac{2e^{-1/x}}{x^2} dx \Rightarrow y = cx^2 e^{1/x} + 2x^2 e^{1/x} \int x^{-2} e^{-1/x} dx \Rightarrow$$

$$y = cx^2 e^{1/x} + 2x^2 \Rightarrow y = x^2 (ce^{1/x} + 2)$$

۳۲- (۱) معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول به صورت $x' + f(y).x = g(y)$ است.

$$۱) A = e^{\int dy} = e^y$$

$$۲) x = \frac{c}{e^y} + \frac{1}{e^y} \int e^y \cdot e^{-y} dy = ce^{-y} + e^{-y} \int dy \Rightarrow x = ce^{-y} + ye^{-y} \xrightarrow{c=0} x = ye^{-y}$$

۳۳- (۱) معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول به صورت $y' + f(x).y = g(x)$ است:

$$۱) A = e^{\int a dx} = e^{ax}$$

$$۲) y = \frac{c}{e^{ax}} + \frac{1}{e^{ax}} \int e^{ax} \cdot c^m dx = ce^{-ax} + e^{-ax} \int e^{(a+m)x} dx = ce^{-ax} + e^{-ax} \left(\frac{1}{a+m} e^{(a+m)x} \right)$$

$$= ce^{-ax} + \frac{e^{-ax} + ax + mx}{a+m} \Rightarrow y = ce^{-ax} + \frac{e^{mx}}{a+m}$$

۳۴- (۴) معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول به صورت $x'.f(y).x = g(y)$ است. زیرا

$$2y dx = (y^2 + x) dx \Rightarrow \frac{dx}{dy} - \left(\frac{1}{2y} \right) x = \frac{1}{2} y^2$$

$$۱) A = e^{\int -\frac{1}{2y} dy} = e^{-\left(\frac{1}{2} \right) \ln y} = y^{-1/2}$$

$$۲) x = \frac{c}{y^{-1/2}} + \frac{1}{y^{-1/2}} \int y^{-1/2} \left(\frac{1}{2} y^2 \right) dy = cy^{1/2} + \frac{1}{2} y^{1/2} \int y^{3/2} dy$$

$$\Rightarrow x = cy^{1/2} + \frac{1}{2} y^{1/2} \left(\frac{2}{5} y^{5/2} \right) \Rightarrow x = cy^{1/2} + \frac{1}{5} y^3$$

۳۵- (۱) بین تابع و مشتق آن پارامتر c را حذف می‌کنیم:

$$\begin{cases} y = \frac{c}{x} \\ y' = -\frac{c}{x^2} \end{cases} \Rightarrow \frac{y}{y'} = \frac{c/x}{-c/x^2} \Rightarrow \frac{y}{y'} = -\frac{x}{1} \Rightarrow y'x + y = 0$$

۳۶- (۳) معادله دیفرانسیل به صورت کلی $Ay'' + By' + Cy = D$ است.

$$k^2 - 6k + 5 = 0 \Rightarrow \Delta = 36 - 20 = 16 > 0, (k-5)(k-1) = 0 \Rightarrow k_1 = 5, k_2 = 1$$

$$y = c_1 e^{5x} + c_2 e^x + \frac{1}{\Delta} \xrightarrow{c_1=c_2=0} y = \frac{1}{\Delta} \Rightarrow 5y = 1$$

۳۷- (۴) معادله دیفرانسیل به صورت کلی $Ay'' + By' + Cy = D$ است.

$$k^2 - 10k + 25 = 0 \Rightarrow \Delta = 100 - 100 = 0, (k - 5)^2 = 0 \Rightarrow k_1 = k_2 = 5$$

$$y = c_1 e^x + c_2 x e^x + \frac{5}{25} \xrightarrow{c_1=c_2=1} y = e^x + x e^x + \frac{1}{5} \Rightarrow y = e^x(1+x) + \frac{1}{5}$$

۳۸- (۱) معادله دیفرانسیل به صورت کلی $Ay'' + By' + Cy = D$ است.

$$k^2 + 2k + 2 = 0 \Rightarrow \Delta' = 1 - 2 = -1 < 0 \Rightarrow k = \frac{-2 \pm \sqrt{-1}}{1} \Rightarrow k = -2 \pm i \Rightarrow a = -2, b = 1$$

$$\Rightarrow y = e^{ax}(c_1 \cos bx + c_2 \sin bx) + \frac{D}{C} \Rightarrow y = e^{-2x}(\cos x + \sin x) + 1$$

۳۹- (۳) معادله دیفرانسیل به صورت کلی $Ay'' + By' + Cy = G(x)$ است.

$$k^2 + 4 = 0 \Rightarrow k^2 = -4 \Rightarrow k = \pm \sqrt{-4} \Rightarrow k = \pm 2\sqrt{-1} \Rightarrow k = \pm 2i \Rightarrow a = 0, b = 2$$

$$y = e^{ax}(c_1 \cos bx + c_2 \sin bx) + G(x) \Rightarrow y = e^x(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x) + G(x) \xrightarrow{c_1=c_2=1/5}$$

$$y = \frac{1}{5} \cos 2x + \frac{1}{5} \sin 2x + G(x) \Rightarrow G(x) = ae^x \Rightarrow G'(x) = ae^x \Rightarrow G''(x) = ae^x$$

$$y'' + 4y = 2e^x \Rightarrow G''(x) + 4G(x) = 2e^x \Rightarrow ae^x + 4ae^x = 2e^x \Rightarrow 5ae^x = 2e^x \Rightarrow a = \frac{2}{5}$$

$$\Rightarrow G(x) = \frac{2}{5}e^x \Rightarrow y = \frac{1}{5} \cos 2x + \frac{1}{5} \sin 2x + \frac{2}{5}e^x \Rightarrow y = \frac{1}{5}(\cos 2x + \sin 2x + e^x)$$

۴۰- (۱) معادله دیفرانسیل به صورت کلی $Ay'' + By' + Cy = G(x)$ است.

$$k^2 + k + 2 = 0 \Rightarrow \Delta = 1 - 8 = -7 < 0 \Rightarrow y = e^{ax}(c_1 \cos bx + c_2 \sin bx) + G(x), c_1 = c_2 = 0 \Rightarrow$$

$$y = e^{ax}(0 + 0) + G(x) \Rightarrow y = G(x)G(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow G'(x) = 2ax + b \Rightarrow G''(x) = 2a$$

$$y'' + y' + 2y = 2x^2 \Rightarrow 2a + 2ax + b + 2ax^2 + 2bx + 2c = 2x^2$$

$$\Rightarrow 2ax^2 + (2a + 2b)x + (2a + b + 2c) = 2x^2 \Rightarrow \begin{cases} 2a = 2 \Rightarrow a = 1 \\ 2a + 2b = 0 \Rightarrow b = -1 \\ 2a + b + 2c = 0 \Rightarrow c = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow G(x) = x^2 - x - \frac{1}{2} \Rightarrow y = x^2 - x - \frac{1}{2}$$

۴۱- (۲) معادله کمکی به صورت زیر است:

$$k^2 - k^2 - 9k^2 - 11k - 4 = 0 \Rightarrow (k+1)^2(k-4) = 0 \Rightarrow k_1 = 4, \quad k_2 = -1$$

ریشه کلی مرتبه سوم

ضریب مربوط به ریشه ۱- باید یک کثیرالجمله درجه دوم باشد، یعنی:

$$y = c_1 e^{4x} + (c_2 x^2 + c_3 x + c_4) e^{-x} \xrightarrow{c_1=c_2=c_3=c_4=1} y = e^{4x} + (x^2 + x + 1)e^{-x}$$

۴۲- (۱) معادله دیفرانسیل به صورت کلی $Ay'' + By' + Cy = 0$ است:

$$k^2 - 4k + 8 = 0, \Delta = 16 - 32 = -16 < 0 \Rightarrow k = \frac{4 \pm \sqrt{-16}}{1} \Rightarrow k = 2 \pm 2i \Rightarrow a = b = 2$$

$$y = e^{ax}(c_1 \cos bx + c_2 \sin bx) \Rightarrow y = e^{2x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x) \xrightarrow{c_1=c_2=1} y = e^{2x}(\cos 2x + \sin 2x)$$

۴۳- (۲) معادله دیفرانسیل به صورت $Ay'' + By' + Cy = G(x)$ است.

$$k^2 - 1 = 0 \Rightarrow k = \pm 1 \Rightarrow k_1 = 1, k_2 = -1$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + G(x) \xrightarrow{c_1 = c_2 = 1/2} y = \frac{1}{2} e^x + \frac{1}{2} e^{-x} + G(x)$$

$$G(x) = x(ax + b)e^x = (ax^2 + bx)e^x \Rightarrow G'(x) = (ax^2 + bx + 2ax + b)e^x \Rightarrow$$

$$G''(x) = (ax^2 + bx + 2ax + 2b + 2a)e^x$$

$$y'' - y = xe^x \Rightarrow (ax^2 + bx + 2ax + 2b + 2a)e^x - (ax^2 + bx + 2ax + b)e^x \equiv xe^x \Rightarrow$$

$$(2ax + b + 2a)e^x \equiv xe^x \Rightarrow 2ax + b + 2a \equiv x \Rightarrow 2a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$b + 2a = 0 \Rightarrow b = -1 \Rightarrow G(x) = x \left(\frac{1}{2}x - 1 \right) e^x = \frac{1}{2}x^2 e^x - xe^x \Rightarrow$$

$$y = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x} + \frac{1}{2}x^2 e^x - xe^x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x} + x^2 e^x) - xe^x$$

۴۴- (۳) پارامترهای a و b مستقل از هم هستند زیرا رابطهای بین آنها وجود ندارد. از این تابع دو بار مشتق می‌گیریم:

$$\begin{cases} y = ax + bx^2 \\ y' = a + 2bx \\ y'' = 2b \end{cases}$$

برای اینکه دستگاه سه معادله درجه اولی (برحسب a و b) سازگار باشد. باید دترمینان زیر برابر صفر باشد:

$$\begin{vmatrix} y & x & x^2 \\ y' & 1 & 2x \\ y'' & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0$$

۴۵- (۳)

$$y = c_1(x^2 + c_2) \Rightarrow y' = 2xc_1 \Rightarrow y'' = 2c_1 \xrightarrow{\text{جاگذاری}} 2xc_1 = 2xc_1$$

$$y = c_1 + c_2 x \Rightarrow y' = c_2 \Rightarrow y'' = 0 \xrightarrow{\text{جاگذاری}} y'' = 0$$

$$y = c \sin x \Rightarrow y' = c \cos x \Rightarrow y'' = -c \sin x \xrightarrow{\text{جاگذاری}} -c \sin x - c \sin x \neq 0 \Rightarrow y = \frac{c+x}{x^2+1}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{x^2+1 - 2x(c+x)}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+1-2cx}{(x^2+1)^2} \xrightarrow{\text{جاگذاری}} \frac{-x^2+1-2cx}{(x^2+1)^2} = \frac{1-2x \left(\frac{c+x}{x^2+1} \right)}{x^2+1}$$

$$\Rightarrow \frac{-x^2+1-2cx}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2+1-2cx-2x^2}{x^2+1} \Rightarrow \frac{-x^2+1-2cx}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+1-2cx}{(x^2+1)^2}$$

پاسخ تشریحی سؤالات تستی فصل ۱۲

(۱)-۱

(۳)-۲

$$\Delta^2 y_x = y_{x+2} - 2y_{x+1} + y_x = e^{x+2} - 2e^{x+1} + e^x = e^x \cdot e^2 - 2e^x \cdot e + e^x = e^x(e^2 - 2e + 1) = e^x(e-1)^2$$

(۱)-۳

$$\Delta^r y_x = y_{x+r} - {}^r y_{x+r} + {}^r y_{x+1} - y_x = {}^r(x+{}^r) + 1 - {}^r[{}^r(x+{}^r) + 1] + {}^r[{}^r(x+1) + 1] - {}^r(x+1) = 0$$

(۴)-۴

$$\begin{aligned} \Delta^1 y_x - {}^r \Delta y_x - y_x &= 0 \Rightarrow y_{x+r} - {}^r y_{x+1} + y_x - {}^r(y_{x+1} - y_x) - y_x = 0 \Rightarrow \\ y_{x+r} - {}^r y_{x+1} + y_x - {}^r y_{x+1} + {}^r y_x - y_x &= 0 \Rightarrow y_{x+r} - \Delta y_{x+1} + {}^r y_x = 0 \end{aligned}$$

(۲)-۵

$$\begin{aligned} \Delta^r y_x + \Delta^r y_x + \Delta y_x &= -y_x \Rightarrow (y_{x+r} - {}^r y_{x+r} + {}^r y_{x+1} - y_x) + (y_{x+r} - {}^r y_{x+1} + 1 + y_x) + \\ (y_{x+1} - y_x) + y_x &= 0 \Rightarrow y_{x+r} - {}^r y_{x+r} + {}^r y_{x+1} = 0 \quad \text{مرتبه دوم} \end{aligned}$$

۶-(۱) با استفاده از رابطه گریگوری-نیوتن داریم:

$$\begin{aligned} \Delta^0 y_x &= y_{x+0} - c_0^1 y_{x+1} + c_0^2 y_{x+2} - c_0^3 y_{x+3} + c_0^4 y_{x+4} - c_0^5 y_x \\ &= y_{x+0} - \Delta y_{x+1} + 1^0 y_{x+2} - 1^0 y_{x+3} + \Delta y_{x+4} - y_x \end{aligned}$$

(۲)-۷

$$\Delta^v y_x = y_{x+v} - c_v^1 y_{x+1} + \dots + c_v^r y_{x+r} - \dots \Rightarrow c_v^r = \frac{v!}{r!v!} = 35$$

۸-(۲) گزینه (۱) درست است، زیرا:

$$\Delta^r y_x = y_{x+r} - {}^r y_{x+1} + y_x$$

$$\Delta^r y_x = a(x+{}^r)^r + b(x+{}^r) + c - {}^r[a(x+{}^r)^r + b(x+{}^r) + c] + ax^r + bx + c = {}^r a$$

$$Dy = {}^r ax + b \Rightarrow D^r y = {}^r a \Rightarrow \Delta^r y_x = D^r y = {}^r a$$

گزینه (۲) نادرست است، زیرا:

$$\Delta y_x = y_{x+1} - y_x = a(x+1)^r + b(x+1) + c - ax^r - bx - c = {}^r ax + a + b$$

$$Dy = {}^r ax + b \Rightarrow \Delta y_x = Dy$$

گزینه (۳) درست است، زیرا:

$$\Delta^r y_x = \Delta^r y_{x+1} - \Delta^r y_x = {}^r a - {}^r a = 0 \Rightarrow \Delta^r y_x = \dots \equiv \Delta^n y_x = 0$$

گزینه (۴) درست است، زیرا:

$$D^r y = 0 = \Delta^r y_x$$

۹-(۲) جواب هر معادله در خود آن معادله صدق می‌کند. گزینه (۲) جواب است زیرا:

$$\frac{(x+1)(x+1-1)}{r} + c - \left(\frac{x(x-1)}{r} + c \right) = x \Rightarrow \frac{x(x+1-x-1)}{r} = x \Rightarrow x = x$$

۱۰-(۲)

$$y. = -4 \Rightarrow \frac{c}{1+0} = -4 \Rightarrow c = -4 \xrightarrow{+} y_x = \frac{-4}{1-4x} = \frac{4}{4x-1}$$

(۲)-۱۱

$$y_0 = 1 \Rightarrow 1 = c_1 + c_2 \cdot 1^0 + c_3 \cdot 1^0 \Rightarrow c_1 + c_2 + c_3 = 1$$

$$y_1 = 1 \Rightarrow 1 = c_1 + c_2 \cdot 1^1 + c_3 \cdot 1^1 \Rightarrow c_1 + 2c_2 + 2c_3 = 1$$

$$y_2 = -1 \Rightarrow -1 = c_1 + c_2 \cdot 2^2 + c_3 \cdot 2^2 \Rightarrow c_1 + 4c_2 + 4c_3 = -1$$

$$-\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 1 \\ c_1 + 2c_2 + 2c_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow c_2 + c_3 = 0, \quad -\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 1 \\ c_1 + 4c_2 + 4c_3 = -1 \end{cases} \Rightarrow 3c_2 + 3c_3 = -2$$

$$-3 \begin{cases} c_2 + c_3 = 0 \\ 3c_2 + 3c_3 = -2 \end{cases} \Rightarrow 3c_3 = -2 \Rightarrow c_3 = -\frac{2}{3}, c_2 = \frac{2}{3}, c_1 = 0$$

$$y_x = 2^x(2) + 3^x(-1) \Rightarrow y_x = 2^{x+1} - 3^x$$

(۲)-۱۲

$$\begin{cases} y_0 = 1 \Rightarrow 1 = c_1 + c_2 \cdot 1^0 = 0 \\ y_1 = 2 \Rightarrow 2 = c_1 + c_2 \cdot 1^1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ c_1 + 2c_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow c_2 = 1 \Rightarrow c_1 = -1$$

$$y_x = -1 + (2)2^x - x \Rightarrow y_x = -1 + 2^{x+1} - x$$

(۳)-۱۳

$$-\begin{cases} y_x = c_1 + c_2 2^x + \left(\frac{1}{6}\right) 2^x \\ y_{x+1} = c_1 + 2c_2 2^x + \frac{2}{3} 2^x \end{cases} \Rightarrow y_{x+1} - y_x = c_2 2^x + \frac{1}{3} 2^x$$

$$-2 \begin{cases} y_{x+1} - y_x = c_2 2^x + \frac{1}{3} 2^x \\ y_{x+1} - y_{x+1} = 2c_2 2^x + (2) 2^x \end{cases} \Rightarrow y_{x+2} - 3y_{x+1} + 2y_x = 2^x$$

۱۴-۲) با استفاده از قضیه ۱ قسمت (۶-۱۱) خواهیم داشت:

$$C = \begin{vmatrix} f_1(0) & f_2(0) & f_3(0) \\ f_1(1) & f_2(1) & f_3(1) \\ f_1(2) & f_2(2) & f_3(2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 \\ 4 & 16 & 64 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow 2^x, 2^{2x}, 2^{3x} \text{ مستقل خطی اند}$$

$$C = \begin{vmatrix} f_1(0) & f_2(0) & f_3(0) \\ f_1(1) & f_2(1) & f_3(1) \\ f_1(2) & f_2(2) & f_3(2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 6 & 4 \end{vmatrix} = -24 \neq 0 \Rightarrow x^2 - 2x, 3x, 4 \text{ مستقل خطی اند}$$

۱۵-۱۱) توابع $(-2)^x$ و $(-3)^x$ مستقل خطی هستند، زیرا

$$C = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = -2 - (-2) = 0 \neq 0$$

بنابر قضیه ۲ قسمت (۱۱-۶) جواب عمومی به صورت زیر است:

$$y_x = c_1(-2)^x + c_2(-3)^x$$

$$\begin{cases} y_0 = 1 \Rightarrow 1 = c_1(-2)^0 + c_2(-3)^0 \\ y_1 = 3 \Rightarrow 3 = c_1(-2)^1 + c_2(-3)^1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ -2c_1 - 3c_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow c_2 = -5, c_1 = 6$$

$$y_x = 6(-2)^x - 5(-3)^x \quad \text{جواب خصوصی}$$

(۱)-۱۶

$$\lambda y_{x+1} + \tau y_x - \tau = 0 \Rightarrow \lambda y_{x+1} = -\tau y_x + \tau \Rightarrow y_{x+1} = -\frac{\tau}{\lambda} y_x + \frac{\tau}{\lambda}, (\lambda \neq 1)$$

$$y_x = \left(-\frac{\tau}{\lambda}\right)^x \left(y_0 - \frac{\frac{\tau}{\lambda}}{1 + \frac{\tau}{\lambda}}\right) + \frac{\frac{\tau}{\lambda}}{1 + \frac{\tau}{\lambda}} = \left(-\frac{\tau}{\lambda}\right)^x \left(y_0 - \frac{1}{\tau}\right) + \frac{1}{\tau}$$

(۲)-۱۷

$$y_{x+2} + \tau y_x = 0 \Rightarrow k^2 + \tau = 0 \Rightarrow k^2 = -\tau \Rightarrow k = \pm \sqrt{-\tau} = \pm \sqrt{\tau} i$$

$$\Delta < 0 \Rightarrow y_x = r^x (c_1 \cos \theta x + c_2 \sin \theta x)$$

$$r = \sqrt{0 + \tau} = \sqrt{\tau}, \tan \theta = \frac{\sqrt{\tau}}{0} = \infty \Rightarrow \tan \theta = \tan \frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$y_x = (\sqrt{\tau})^x \left(c_1 \cos \frac{\pi}{2} x + c_2 \sin \frac{\pi}{2} x \right)$$

$$\begin{cases} y_0 = 1 \Rightarrow (\sqrt{\tau})^0 (c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0) = 1 \\ y_1 = \sqrt{\tau} \Rightarrow (\sqrt{\tau})^1 \left(c_1 \cos \frac{\pi}{2} + c_2 \sin \frac{\pi}{2} \right) = \sqrt{\tau} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 + 0 = 1 \Rightarrow c_1 = 1 \\ 0 + c_2 = 1 \Rightarrow c_2 = 1 \end{cases}$$

$$y_x = (\sqrt{\tau})^x \left(\cos \frac{\pi}{2} x + \sin \frac{\pi}{2} x \right)$$

(۲)-۱۸

$$y_{x+1} - y_x - 1^0 = 0 \Rightarrow y_{x+1} = y_x + 1^0, (A = 1)$$

$$y_x = y_0 + 1^0 x, y_0 = 2 \Rightarrow y_x = 2 + 1^0 x$$

(۴)-۱۹

$$9y_{x+1} + 5y_x - 18 = 0 \Rightarrow 9y_{x+1} = -5y_x + 18 \Rightarrow y_{x+1} = -\frac{5}{9}y_x + \frac{2}{3}, (\lambda \neq 1)$$

$$y_x = \left(-\frac{5}{9}\right)^x \left(y_0 - \frac{\frac{2}{3}}{1 + \frac{5}{9}}\right) + \frac{\frac{2}{3}}{1 + \frac{5}{9}} \Rightarrow y_x = \left(-\frac{5}{9}\right)^x \left(y_0 - \frac{9}{4}\right) + \frac{9}{4}$$

$$y_0 = 1 \Rightarrow y_x = \left(-\frac{5}{9}\right)^x \left(1 - \frac{9}{4}\right) + \frac{9}{4} \Rightarrow y_x = \left(-\frac{5}{9}\right)^x \left(-\frac{5}{4}\right) + \frac{9}{4}$$

(۱)-۲۰

$$y_{x+1} + \tau y_x = 0 \Rightarrow y_{x+1} = -\tau y_x, (\lambda \neq 1)$$

$$y_x = (-\tau)^x \left(y_0 - \frac{0}{1 + \tau}\right) + \frac{0}{1 + \tau} \Rightarrow y_x = y_0 (-\tau)^x$$

(۲)-۲۱

$$2y_{x+1} - y_x = 2 \Rightarrow 2y_{x+1} = y_x + 2 \Rightarrow y_{x+1} = \frac{1}{2}y_x + 1, (A \neq 1)$$

$$y_x = \left(\frac{1}{2}\right)^x \left(y_0 - \frac{1}{1 - \frac{1}{2}}\right) + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \Rightarrow y_x = \left(\frac{1}{2}\right)^x (y_0 - 2) + 2$$

$$y_0 = 4 \Rightarrow y_x = \left(\frac{1}{2}\right)^x (2) + 2 = \left(\frac{1}{2}\right)^x \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} + 2 \Rightarrow y_x = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} + 2$$

(۳)-۲۲

$$y_{x+2} - 2y_{x+1} + y_x = 0 \Rightarrow k^2 - 2k + 1 = 0 \Rightarrow (k-1)(k-1) = 0 \Rightarrow$$

$$k_1 = 2, k_2 = 1 \Rightarrow \Delta > 0 \Rightarrow y_x = c_1(2)^x + c_2(1)^x$$

$$\begin{cases} y_0 = 1 \Rightarrow c_1(2)^0 + c_2(1)^0 = 1 \\ y_1 = 2 \Rightarrow c_1(2)^1 + c_2(1)^1 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ 2c_1 + c_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow c_1 = 1, c_2 = 0$$

$$y_x = (2)^x + 0(1)^x \Rightarrow y_x = (2)^x$$

(۴)-۲۳

$$y_{x+2} + 2y_{x+1} + y_x = 0 \Rightarrow k^2 + 2k + 1 = 0, \Delta' = 1 - 2 = -1 < 0$$

$$k = -1 \pm \sqrt{-1} \Rightarrow k = 1 \pm i, \Delta' < 0 \Rightarrow y_x = r^x (c_1 \cos \theta x + c_2 \sin \theta x)$$

$$r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}, \tan \theta = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} \Rightarrow y_x = (\sqrt{2})^x \left(c_1 \cos \frac{\pi}{4} x + c_2 \sin \frac{\pi}{4} x \right)$$

$$\begin{cases} y_0 = 0 \Rightarrow (\sqrt{2})^0 (c_1 \cos(0) + c_2 \sin(0)) = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \\ y_1 = 1 \Rightarrow (\sqrt{2})^1 \left(c_1 \cos \frac{\pi}{4} + c_2 \sin \frac{\pi}{4} \right) = 1 \Rightarrow c_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow y_x = (\sqrt{2})^x \sin \frac{\pi}{4} x$$

(۱)-۲۴

$$y_{x+2} - 2y_{x+1} - y_{x+1} + y_x = 0 \Rightarrow k^2 - 2k^2 - k + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$(k-1)(k+1)(k-2) = 0 \Rightarrow k_1 = 1, k_2 = -1, k_3 = 2$$

$$y_x = c_1 + c_2(-1)^x + c_3(2)^x, c_1 = c_2 = c_3 = 1 \Rightarrow y_x = 1 + (-1)^x + (2)^x$$

(۱)-۲۵

$$2y_{x+2} + 2\Delta y_x = 0 \Rightarrow 2k^2 + 2\Delta = 0 \Rightarrow k^2 = -\frac{2\Delta}{2} \Rightarrow k = \pm \frac{\Delta}{2}i \Rightarrow a = 0, b = \frac{\Delta}{2}$$

$$r = \sqrt{0 + \frac{2\Delta}{2}} \Rightarrow r = \frac{\Delta}{2}, \tan \theta = \frac{\Delta/2}{0} = \infty \Rightarrow \tan \theta = \tan \frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$y_x = \left(\frac{\Delta}{2}\right)^x \left(c_1 \cos \frac{\pi}{2} x + c_2 \sin \frac{\pi}{2} x \right) \xrightarrow{c_1 = c_2 = 1} y_x = \left(\frac{\Delta}{2}\right)^x \left(\cos \frac{\pi}{2} x + \sin \frac{\pi}{2} x \right)$$

(۱)-۲۶

$$y_{x+2} - 2y_{x+1} + y_x = 0, k^2 - 2k + 1 = 0 \Rightarrow (k-1)^2 = 0 \Rightarrow k_1 = k_2 = 1$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow y_x = c_1 1^x + c_2 x 1^x$$

$$\begin{cases} y_0 = 0 \Rightarrow c_1 1^0 + c_2 (0) 1^0 = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \\ y_1 = 1 \Rightarrow c_1 1^1 + c_2 (1) 1^1 = 1 \Rightarrow c_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow y_x = \frac{1}{2} x 2^x$$

(۳)-۲۷

$$y_{x+2} - 4y_{x+1} + 4y_x = 2, k^2 - 4k + 4 = 0 \Rightarrow (k-2)(k-2) = 0$$

$$\Rightarrow k_1 = 2, k_2 = 2, \Delta > 0 \Rightarrow y_x = c_1 2^x + c_2 x 2^x + y^* \xrightarrow{c_1=c_2=1} y_x = 2^x + x 2^x + y^*$$

$$y^* : y^* - 4y^* + 4y^* = 2 \Rightarrow 0y^* = 2 \Rightarrow y^* = \frac{1}{2} \Rightarrow y_x = 2^x + x 2^x + \frac{1}{2}$$

(۱)-۲۸

$$2y_{x+2} + 5y_{x+1} + 2y_x = 2, 2k^2 + 5k + 2 = 0 \Rightarrow k_1 = -1, k_2 = -\frac{2}{3}$$

$$\Delta > 0 \Rightarrow y_x = c_1 (-1)^x + c_2 \left(-\frac{2}{3}\right)^x + y^*$$

$$y^* : 2y^* + 5y^* + 2y^* = 2 \Rightarrow 9y^* = 2 \Rightarrow y^* = \frac{2}{9} \Rightarrow y_x = c_1 (-1)^x + c_2 \left(-\frac{2}{3}\right)^x + \frac{2}{9}$$

$$\begin{cases} y_0 = 0 \Rightarrow c_1 (-1)^0 + c_2 \left(-\frac{2}{3}\right)^0 + \frac{2}{9} = 0 \\ y_1 = 1 \Rightarrow c_1 (-1)^1 + c_2 \left(-\frac{2}{3}\right)^1 + \frac{2}{9} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = -\frac{2}{9} \\ -c_1 - \frac{2}{3}c_2 = \frac{7}{9} \end{cases} \Rightarrow c_2 = \frac{2}{9}, c_1 = -1$$

$$y_x = -(-1)^x + \frac{2}{9} \left(-\frac{2}{3}\right)^x + \frac{2}{9}$$

(۴)-۲۹

$$\Delta^2 y_x - 2\Delta y_x - 2 = 0 \Rightarrow y_{x+2} - 2y_{x+1} + y_x - 2(y_{x+1} - y_x) - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$y_{x+2} - 4y_{x+1} + 3y_x = 2, k^2 - 4k + 3 = 0 \Rightarrow (k-3)(k-1) = 0 \Rightarrow k_1 = 3,$$

$$k_2 = 1, \Delta > 0 \Rightarrow y_x = c_1 (3)^x + c_2 (1)^x + y^* \xrightarrow{c_1=c_2=1} y_x = (3)^x + (1)^x + y^*$$

$$y^* : y^* - 4y^* + 3y^* = 2 \Rightarrow 0 = 2 \quad \text{غیرممکن}$$

$$f(x) = xy^* \Rightarrow f(x+1) = y_{x+1} \Rightarrow f(x+1) = (x+1)y^* = xy^* + y^*$$

$$f(x+2) = y_{x+2} \Rightarrow f(x+2) = (x+2)y^* = xy^* + 2y^* \Rightarrow$$

$$f(x+2) - 2f(x+1) + f(x) = 2 \Rightarrow xy^* + 2y^* - 2(xy^* + y^*) + 3xy^* = 2$$

$$\Rightarrow 2y^* - 2y^* = 2 \Rightarrow y^* = -1 \Rightarrow y_x = (3)^x + (1)^x - 1$$

(۲)-۳۰

$$y_{x+2} - 9y_x = 3, k^2 - 9 = 0 \Rightarrow k = \pm 3 \Rightarrow k_1 = 3, k_2 = -3$$

$$\Delta > 0 \Rightarrow y_x = c_1(3)^x + c_2(-3)^x + y^* \xrightarrow{c_1=c_2=1} y_x = (3)^x + (-3)^x + y^*$$

$$y^* : y^* - 9y^* = 3 \Rightarrow y^* = -\frac{3}{8} \Rightarrow y_x = (3)^x + (-3)^x - \frac{3}{8}$$

پاسخ تشریحی سؤالات تستی فصل ۱۳

(۱)-۱

$$z = 3 - 2i \Rightarrow \bar{z} = 3 + 2i$$

(۲)-۲

$$z = 2 - 2i \Rightarrow |z| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{12}$$

(۳)-۳

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3-2i}{-1+i} = \frac{3-2i}{-1+i} \times \frac{-1-i}{-1-i} = \frac{-3-3i+2i+2i^2}{1+i-i-i^2} = \frac{-5-i}{2} = -\frac{5}{2} - \frac{i}{2}$$

(۳)-۴

$$x=1, y=-1 \Rightarrow r = \sqrt{1+1} \Rightarrow r = \sqrt{2}, \tan \theta = \frac{-1}{1} \xrightarrow{180^\circ \leq \theta < 270^\circ} \tan \left(\pi - \frac{\pi}{4} \right) = \tan \frac{3\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow P \left(\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4} \right)$$

(۲)-۵

$$r = \sqrt{2}, \theta = \frac{5\pi}{4} \Rightarrow x = r \cos \theta = \sqrt{2} \cos \frac{5\pi}{4} = \sqrt{2} \cos \left(\pi + \frac{\pi}{4} \right) = -\sqrt{2} \cos \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow x = -\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}, y = r \sin \theta = \sqrt{2} \sin \frac{5\pi}{4} = \sqrt{2} \sin \left(\pi + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$= -\sqrt{2} \sin \frac{\pi}{4} \Rightarrow y = -\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow P \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

(۳)-۶

$$\begin{cases} e^{ix} = \cos x + i \sin x \\ e^{-ix} = \cos x - i \sin x \end{cases} \Rightarrow e^{ix} + e^{-ix} = 2 \cos x \Rightarrow \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

(۳)-۷

$$Z = (2-2i+4i-6i^2)(6-4i+3i-2i^2) = (\lambda+i)(\lambda-i) = 64 - i^2 = 65$$

(۱)-۸

$$x=-2, y=2 \Rightarrow r = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}, \tan \theta = \frac{2}{-2} = -1 \Rightarrow \theta = \frac{3\pi}{4}$$

$$Z = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) = 2\sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{3\pi}{4}$$

(۲)-۹

$$\begin{aligned} x + iy &= \frac{3-i}{4+\delta i} \times \frac{4-\delta i}{4-\delta i} = \frac{12-1\delta i-4i+\delta i^2}{16+\delta^2} \Rightarrow x + iy = \frac{7-19i}{17} \\ &= \frac{7}{17} - \frac{19}{17}i \Rightarrow x = \frac{7}{17}, y = -\frac{19}{17} \Rightarrow x + y = \frac{7}{17} - \frac{19}{17} = \frac{-12}{17} \end{aligned}$$

(۱)-۱۰

$$\begin{aligned} \left| \frac{z+2i}{z-i} \right| &= \frac{|z+2i|}{|z-i|} \leq 2 \Rightarrow |z+2i| \leq 2|z-i| \Rightarrow |x+i(y+2)|^2 \leq 4|x+i(y-1)|^2 \\ \Rightarrow x^2 + (y+2)^2 &\leq 4x^2 + 4(y-1)^2 \Rightarrow 3x^2 + 4y^2 - 12y + 8 \geq 0 \Rightarrow x^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 \geq \frac{11}{4} \end{aligned}$$

(۳)-۱۱

$$3x + 5y + i(2y - x) = 7 + 5i \Rightarrow \begin{cases} 3x + 5y = 7 \\ 2y - x = 5 \end{cases} \Rightarrow x = -1, y = 2$$

(۲)-۱۲

$$x + y - 1 = 0 \Rightarrow r \cos \theta + r \sin \theta - 1 = 0 \Rightarrow r(\sin \theta + \cos \theta) = 1 \Rightarrow r = \frac{1}{\sin + \cos \theta}$$

(۴)-۱۳

$$\begin{aligned} r = |z| &= \sqrt{2}, \tan \theta = \frac{-1}{1} \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{4}, z = \sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right) \\ z^4 &= 16\sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{4\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{4\pi}{4} \right) \right) = 16\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} \right) = 16(1-i) \end{aligned}$$

(۲)-۱۴

$$\begin{aligned} ((r \cos \theta)^i + (r \sin \theta)^i)^i &= (r \cos \theta)^i \Rightarrow (r^i (\cos^i \theta + \sin^i \theta))^i = r^i \cos^i \theta \\ \Rightarrow r^i &= r^i \cos^i \theta \Rightarrow r^i = \cos^i \theta \Rightarrow r = \sqrt[4]{\cos \theta} \end{aligned}$$

(۲)-۱۵

$$\begin{aligned} i^{30}, n = 30 &\Rightarrow n = 7(4) + 2 \Rightarrow i^{30} = -1 \\ i^{15}, n = 15 &\Rightarrow n = 7(2) + 1 \Rightarrow i^{15} = -i \\ \frac{-3-i}{2i-1} &= \frac{-3-i}{2i-1} \times \frac{2i+1}{2i+1} = \frac{-6i-3-2i^2-i}{-4-1} = \frac{-1-7i}{-5} = \frac{1}{5} + \frac{7}{5}i \end{aligned}$$

(۴)-۱۶

$$\begin{aligned} r = \sqrt{x^2 + y^2} &\Rightarrow r^2 = x^2 + y^2, \sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta = 2 \left(\frac{y}{r} \right) \left(\frac{x}{r} \right) \\ x^2 + y^2 &= 7 \left(\frac{y}{r} \right) \left(\frac{x}{r} \right) \Rightarrow x^2 + y^2 = \frac{7xy}{r^2} \Rightarrow (x^2 + y^2) = \frac{7xy}{(x^2 + y^2)} \Rightarrow (x^2 + y^2)^2 = 7xy \end{aligned}$$

(۴)-۱۷

$$|z-i| = |x+iy-i| = |x+i(y-1)| = 2 \Rightarrow x^2 + (y-1)^2 = 4$$

مکان نقاط M دایره‌ای است به مرکز $(۰, ۱)$ و شعاع ۲، اکنون فاصله نقاط داده شده تا $(۰, ۱)$ را محاسبه می‌کنیم، هر کدام بزرگ‌تر از ۲ باشد خارج دایره است.

$$OA = \sqrt{9+1} = \sqrt{10} > 2, OB = \sqrt{4+0} = 2, OC = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}, OD = \sqrt{0+4} = 2$$

(۲)-۱۸

$$Z = -4 = -4 + 0i \Rightarrow x = -4, y = 0 \Rightarrow r = \sqrt{16+0} = 4, \tan \theta = \frac{0}{-4} = 0 \Rightarrow \theta = \pi$$

$$Z = 4(\cos \pi + i \sin \pi) = 4 \operatorname{cis} \pi$$

(۱)-۱۹

$$z_1 z_2 = \sqrt{2} \sqrt{2} \left(\cos \left(\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \right) \right) = \sqrt{2} (\cos \pi + i \sin \pi) = \sqrt{2}$$

(۳)-۲۰

$$z_1 = 1 - i \Rightarrow r_1 = \sqrt{2}, \theta_1 = -\frac{\pi}{4}, z_2 = 1 + \sqrt{2}i \Rightarrow r_2 = 2, \theta_2 = \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \right) \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right)$$

$$\left(\frac{z_1}{z_2} \right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}^{1/2}} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}^{1/2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} i \right) = \frac{1}{\sqrt{2}^{1/2}} (1 + \sqrt{2}i)$$

(۲)-۲۱

$$|z - 1| + |z + 1| = 2\sqrt{2} \Rightarrow |x - 1 + iy| = 2\sqrt{2} - |x + 1 + iy| \Rightarrow$$

$$(x - 1)^2 + y^2 = 8 + (x + 1)^2 + y^2 - 4\sqrt{2}|x + 1 + iy| \Rightarrow$$

$$-4x - 4 = -4\sqrt{2}|x + 1 + iy| \Rightarrow x^2 + 4 + 4x = 2(x + 1)^2 + 2y^2 \Rightarrow x^2 + 2y^2 = 2 \quad \text{بیضی}$$

(۳)-۲۲

$$y = -x \Rightarrow r \sin \theta = -r \cos \theta \Rightarrow \tan \theta = -1 \Rightarrow \theta = \frac{7\pi}{4}$$

(۴)-۲۳

$$i - \tan \alpha = \frac{i \cos \alpha - \sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{i}{\cos \alpha} (\cos \alpha + i \sin \alpha)$$

$$i + \tan \alpha = \frac{i \cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{i}{\cos \alpha} (\cos \alpha - i \sin \alpha)$$

$$\left(\frac{i - \tan \alpha}{i + \tan \alpha} \right)^n = \frac{(\cos \alpha + i \sin \alpha)^n}{(\cos \alpha - i \sin \alpha)^n} = \frac{\cos n\alpha + i \sin n\alpha}{\cos n\alpha - i \sin n\alpha} = \frac{1 + i \tan \alpha}{1 - i \tan \alpha}$$

(۳)-۲۴

$$z^2 + 3z + 2i = z^2 + z + 2i = z(z + 1) + 2i = z(z - i) + 2i = z(z - i)(z + i) + 2i = z(z + i)(z^2 - iz + 2) = 0 \Rightarrow z = -i, z = \frac{i \pm \sqrt{-1 - 4}}{2}, \frac{i \pm 3i}{2} \Rightarrow z = 2i, z = -i$$

(۲)-۲۵

$$z = \sqrt[3]{i} \Rightarrow z^3 = i, i \Rightarrow r = 1, \tan \theta = \frac{1}{0} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$z^3 = \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) = 0 + i(-1) = -i$$

(۳)-۲۶

$$z = 1 + i \Rightarrow r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}, \tan \theta = \frac{1}{1} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} \quad (\text{نقطه } z \text{ در ربع اول است})$$

$$\sqrt[3]{1+i} = (2^{1/2})^{1/3} \left(\cos \frac{2k\pi + \pi/4}{3} + i \sin \frac{2k\pi + \pi/4}{3} \right)$$

(۱)-۲۷

$$\begin{aligned} (-1 + \sqrt{3}i)^{-1} &= \frac{1}{(-1 + \sqrt{3}i)^2} = \frac{1}{1 - 2\sqrt{3}i + 3i^2} = \frac{1}{-2 - 2\sqrt{3}i} \times \frac{-2 + 2\sqrt{3}i}{-2 + 2\sqrt{3}i} \\ &= \frac{-2 + 2\sqrt{3}i}{4 + 12} = \frac{1}{16}(-2 + 2\sqrt{3}i) \end{aligned}$$

(۲)-۲۸

$$z = i \pm \sqrt{(-i)^2 + 2} = i \pm 1 \Rightarrow z_1 = 1 + i, z_2 = -1 + i$$

(۱)-۲۹

$$z^3 = (6 + 2\sqrt{3}i)^3 = 36 + 24\sqrt{3}i + 12i^2 = 24 + 24\sqrt{3}i$$

$$\frac{1}{z^2} = \frac{1}{24 + 24\sqrt{3}i} \times \frac{24 - 24\sqrt{3}i}{24 - 24\sqrt{3}i} = \frac{24 - 24\sqrt{3}i}{(24)^2 + (24)^2(3)} = \frac{1 - \sqrt{3}i}{96}$$

(۱)-۳۰

$$\sin z = \sin(x + iy) = \sin x \cos(iy) + \cos x \sin(iy)$$

با استفاده از رابطه $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ انتخاب $\theta = iy$ داریم:

$$e^{-y} = \cos iy + i \sin iy, e^y = \cos iy - i \sin iy$$

$$\cos iy = \frac{1}{2}(e^y + e^{-y}), \sin iy = -\frac{i}{2}(e^y - e^{-y}) = -i \sin hy$$

$$\sin z = \sin x \cos hy + i \cos x \sin hy$$

(۲)-۳۱

$$x + iy = (6 + 11i)(7 + 3i) = 42 + 18i + 77i + 33i^2 = 9 + 95i \Rightarrow$$

$$x + iy = 9 + 95i \Rightarrow x = 9, y = 95 \Rightarrow x + y = 104$$

(۳)-۳۲

$$z^3 = (2 + 3i)^3 = 8 + 36i + 54i^2 + 27i^3 = 8 + 36i - 54 - 27i \Rightarrow -46 + 9i \Rightarrow (\bar{z}^3) = -46 - 9i$$

(۱)-۳۳

$$1+i \Rightarrow r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}, \tan \theta = \frac{1}{1} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$(1+i)^4 = \left[\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \right]^4 = 16 (\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = 16(1+0) = 16$$

(۲)-۳۴

$$z^5 = 1 \Rightarrow z^5 - 1 = 0 \Rightarrow (z-1)(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1) = 0 \Rightarrow z = 1, z = -1 \pm i\sqrt{2}$$

(۱)-۳۵

$$\begin{aligned} (x-\alpha)^r + (y-\beta)^r &= R^r \Rightarrow x^r + (y-\beta)^r = R^r \Rightarrow (r \cos \theta)^r + (r \sin \theta - \beta)^r = R^r \\ \Rightarrow r^r \cos^r \theta + r^r \sin^r \theta - r^r \sin \theta + \beta &= R^r \Rightarrow r^r (\cos^r \theta + \sin^r \theta) = R^r \sin \theta \Rightarrow r = R \sin \theta \end{aligned}$$

(۲)-۳۶

$$M(1,1) \Rightarrow r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

(۴)-۳۷

$$1+i \Rightarrow r = \sqrt{2}, \tan \theta = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$(1+i)^8 = \left[\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \right]^8 = 16 \left(\cos \frac{2\pi}{1} + i \sin \frac{2\pi}{1} \right) = -16i$$

$$\sqrt{2}+i \Rightarrow r = 2, \tan \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$(\sqrt{2}+i) = 2 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = 2 \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 1 + \sqrt{2}i$$

$$(1+i)^8 (\sqrt{2}+i) = -16i + 16\sqrt{2} = 16(\sqrt{2}-i)$$

(۱)-۳۸

$$1-i \Rightarrow r = \sqrt{2}, \tan \theta = \frac{-1}{1} = -1 \Rightarrow \theta = \frac{7\pi}{4}$$

$$\sqrt[4]{1-i} = \left[\sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right) \right]^{1/4} = \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$1+i \Rightarrow r = \sqrt{2}, \tan \theta = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$\sqrt[4]{1+i} = \left[\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \right]^{1/4} = \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\sqrt[4]{1-i} \cdot \sqrt[4]{1+i} = \sqrt[4]{16} \left(\cos \frac{2\pi}{4} + i \sin \frac{2\pi}{4} \right) = \sqrt[4]{16} \cos \frac{\pi}{2}$$

(۴)-۳۹

$\theta \rightarrow -\theta : r = 2 \cos(-2\theta) = 2 \cos 2\theta \Rightarrow$ منحنی نسبت به محور قطبی متقارن است

$\theta \rightarrow \pi + \theta : r = 2 \cos(2\pi + 2\theta) = 2 \cos 2\theta \Rightarrow$ منحنی نسبت به قطب متقارن است

$\theta \rightarrow \pi - \theta : r = 2 \cos(2\pi - 2\theta) = 2 \cos 2\theta \Rightarrow$ منحنی نسبت به محور y ها متقارن است

(۲)-۴۰

$$z_1 = z_2 \Rightarrow 1 - x = 2 \Rightarrow x = -1, y - 1 = 4 \Rightarrow y = 5 \Rightarrow x + y = -1 + 5 = 2$$

(۳)-۴۱

$$z_1 = 2 \Rightarrow r_1 = \sqrt{16 + 0} = 4, \tan \theta_1 = \frac{0}{4} = 0 \Rightarrow \theta_1 = 0$$

$$z_2 = -1 + \sqrt{3}i \Rightarrow r_2 = \sqrt{1 + 3} = 2, \tan \theta_2 = \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3} \Rightarrow \theta_2 = \frac{2\pi}{3}$$

$$z = \left[\frac{2}{2} \left(\cos \left(0 - \frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(0 - \frac{2\pi}{3} \right) \right) \right]^{1/2} = 2^{1/2} (\cos(-\lambda\pi) + i \sin(-\lambda\pi)) = 2^{1/2} (\cos(0) + i \sin(0))$$

(۲)-۴۲

$$\begin{aligned} & 2 \left(\frac{1 + 2i + i^2}{1 - 2i + i^2} \right) - 2 \left(\frac{1 - 2i + 2i^2 - i^2}{1 + 2i + 2i^2 + i^2} \right) = 2 \left(\frac{2i}{-2i} \right) - 2 \left(\frac{-2 - 2i}{-2 + 2i} \right) = -2 - \left(\frac{-2 - 2i}{-1 + i} \right) \\ & = -2 - \left(\frac{-2 - 2i}{-1 + i} \times \frac{-1 - i}{-1 - i} \right) = -2 - \left(\frac{2 + 2i + 2i + 2i^2}{1 + i - i - i^2} \right) = -2 - \left(\frac{4i}{2} \right) = -2 - 2i \end{aligned}$$

(۳)-۴۳

$$z_1 z_2 = (1 - i)(-2 - 4i) = -6 - 2i$$

$$z_2 \bar{z}_1 = (-2 + 4i)(1 + i) = -6 + 2i$$

$$Re(-6 - 2i - 6 + 2i) = Re(-12) = -12$$

(۱)-۴۴

$$Im(1 - 2i + i^2 - 2 + 4i - 2) = Im(-4 + 2i) = 2$$

(۴)-۴۵

$$2z_1 - 3z_2 = 2(-2 + 4i) - 3(1 - i) = -4 + 8i - 3 + 3i = -7 + 11i$$

$$|2z_1 - 3z_2| = |-7 + 11i| = \sqrt{49 + 121} = \sqrt{170} \Rightarrow |2z_1 - 3z_2|^2 = 170$$

$$(\overline{z_1 + z_2})(z_1 - z_2) = (\overline{z_1 + z_2})(z_1 - z_2) \text{ بنابراین } \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2 \text{ می‌دانیم (۲)-۴۶}$$

$$(z_1 + z_2) = -2 + 4i + \sqrt{3} - 2i = (-2 + \sqrt{3}) + 2i \Rightarrow (\overline{z_1 + z_2}) = (-2 + \sqrt{3}) - 2i$$

$$(z_1 - z_2) = 1 - i - \sqrt{3} + 2i = (1 - \sqrt{3}) + i \Rightarrow (\overline{z_1 - z_2}) = (1 - \sqrt{3}) - i$$

$$\begin{aligned} & [(-2 + \sqrt{3}) - 2i][(1 - \sqrt{3}) - i] = -2 + 2\sqrt{3} + \sqrt{3} - 2 + 2i - \sqrt{3}i - 2i + 2\sqrt{3}i + 2i \\ & = -4 + 2\sqrt{3} + \sqrt{3}i = -4 + \sqrt{3}(2 + i) \end{aligned}$$

$$\overline{z_1/z_2} = \bar{z}_1/\bar{z}_2 \text{ می‌دانیم (۳)-۴۷}$$

$$\bar{z}_1 = 1 + i, \bar{z}_2 = -2 - 4i \Rightarrow \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} = \frac{1 + i}{-2 - 4i} \times \frac{-2 + 4i}{-2 + 4i} = \frac{-2 + 4i - 2i + 4i^2}{4 + 16} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i$$

۴۸- (۱) به تذکر قسمت (۱۳-۲-۱) مراجعه کنید:

$$z \cdot \bar{z} = r^2 = 2^2 = 4$$

۴۹- (۱) می‌دانیم $1/z = 1/r(\cos \theta - i \sin \theta)$ بنابراین:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r} \left(\cos \frac{\pi}{r} - i \sin \frac{\pi}{r} \right)$$

۵۰- (۲) می‌دانیم $z^{-n} = 1/z^n = 1/r^n (\cos n\theta - i \sin n\theta)$ بنابراین:

$$z^{-r} = \frac{1}{z^r} = \frac{1}{r^r} (\cos \pi - i \sin \pi) = \frac{1}{r^r} (\cos \pi - i \sin \pi) = -\frac{1}{r^r}$$

(۴)-۵۱

$$r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}, \tan \theta = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$z_1 = \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$z_2 = \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$$

$$z_3 = \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right)$$

(۳)-۵۲

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\cos \left(\frac{5\pi}{4} - \frac{3\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{5\pi}{4} - \frac{3\pi}{4} \right) \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos \pi + i \sin \pi) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

(۳)-۵۳

$$|z - 1| = |z + 1| \Rightarrow |x + iy - 1| = |x + iy + 1| \Rightarrow |(x-1) + iy| = |(x+1) + iy| \Rightarrow \sqrt{(x-1)^2 + y^2} = \sqrt{(x+1)^2 + y^2} \Rightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 = x^2 + 2x + 1 + y^2 \Rightarrow x = 0$$

(۱)-۵۴

$$z = x - iy \Rightarrow (\bar{z})^2 = x^2 + (-iy)^2 - 2ixy = x^2 + y^2 - 2ixy$$

(۲)-۵۵

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) \Rightarrow \bar{z} = r(\cos \theta - i \sin \theta)$$

$$z \cdot \bar{z} = r \cdot r (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = r^2$$

پاسخ تشریحی تست‌های آزمون کارشناسی ارشد

===== پاسخ تشریحی تست‌های آزمون کارشناسی ارشد =====
 «بسط دوجمله‌ای»

۱- (۲) می‌دانیم $c_n^r x^{n-r} y^r = \text{جمله } (r+1)\text{ام}$:

$$\begin{aligned} c_{10}^r (\sqrt{2}x)^{10-r} \left(-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^r &= c_{10}^r (\sqrt{2})^{10-r} \left(-\frac{1}{2}\right)^r x^{10-r} (x^{-1/2})^r \\ &= c_{10}^r (\sqrt{2})^{10-r} \left(-\frac{1}{2}\right)^r x^{(10-r)-r/2} \end{aligned}$$

به منظور داشتن x^1 باید:

$$(10-r) - \frac{r}{2} = 1 \Rightarrow r + \frac{r}{2} = 9 \Rightarrow \frac{3}{2}r = 9 \Rightarrow r = 6$$

$$x^1 \text{ ضریب} = c_{10}^6 (\sqrt{2})^4 \left(-\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{2} c_{10}^6$$

می‌دانیم اگر $r_1 + r_2 = n$ باشد آن‌گاه $c_n^{r_1} = c_n^{r_2}$ است، بنابراین:

$$c_{10}^6 = c_{10}^4 \Rightarrow x^1 \text{ ضریب} = \frac{1}{2} c_{10}^4$$

۲- (۲) با توجه به ویژگی شماره ۱۱ قسمت (۲-۱) داریم:

$$p = 1, q = 1, n = 8 \Rightarrow r = \frac{n \cdot p}{p+q} = \frac{8 \times 1}{1+1} \Rightarrow r = 4 \Rightarrow c_8^4 = \frac{8!}{4!4!} = 70$$

(۲)-۳

$$c_8^r (x)^{8-r} \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^r = c_8^r (x)^{8-r} (x^{-1/2})^r = c_8^r (x)^{8-r-r/2}$$

به منظور داشتن x^2 باید:

$$8-r - \frac{r}{2} = 2 \Rightarrow \frac{3}{2}r = 6 \Rightarrow r = 4 \Rightarrow x^2 \text{ ضریب} = c_8^4 = \frac{8!}{4!4!} = 70$$

(۱)-۴

$$\text{مجموع ضرایب} = \left(1 - \frac{1}{2 \times 1}\right)^8 = \left(1 - \frac{1}{2}\right)^8 = \left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{1}{256}$$

۵- (۴) با توجه به ویژگی شماره ۸ قسمت (۲-۱) داریم:

$$\text{مجموع ضرایب بسط} = \left(2 - \frac{4}{3}\right)^6 = \left(\frac{6-4}{3}\right)^6 = \left(\frac{2}{3}\right)^6 = \frac{64}{729}$$

(۳)-۶

$$c_p^r(x^r)^{p-r} \left(-\frac{1}{x}\right)^r = c_p^r(x^r)^{p-r}(-x^{-1})^r = c_p^r(x)^{12-2r}(-x)^{-r} = c_p^r(-1)^{-r}(x)^{12-2r-r}$$

می‌دانیم منظور از جمله مستقل از x جمله‌ای است که توان x آن صفر است. پس:

$$12 - 2r - r = 0 \Rightarrow 3r = 12 \Rightarrow r = 4, \text{ ضریب جمله مستقل} = c_p^r(-1)^{-r} = c_p^r = 15$$

(۱)-۷

$$c_A^r(2x)^{A-r} \left(-\frac{1}{2}\right)^r = c_A^r(2)^{A-r}(x)^{A-r}(-2)^{-r}$$

به منظور داشتن x^f باید $r = 4$ باشد. پس:

$$c_A^r(2)^f(x)^f(-2)^{-f} = \frac{A!}{f!f!} \times 16 \times \frac{1}{16 \times 16} x^f = \frac{35}{8} x^f$$

(۴)-۸

$$c_A^r(x)^{A-r} \left(\frac{-1}{2\sqrt{x}}\right)^r = c_A^r(x)^{A-r} \left(\frac{-1}{2}\right)^r (x^{-1/2})^r = c_A^r \left(\frac{-1}{2}\right)^r (x)^{A-r-r/2}$$

به منظور داشتن x^f باید:

$$A - r - \frac{r}{2} = f \Rightarrow \frac{3}{2}r = 6 \Rightarrow r = 4$$

$$c_A^r \left(\frac{-1}{2}\right)^f x^f = \frac{A!}{f!f!} x^f = \frac{35}{8} x^f$$

(۳)-۹

$$C_{10}^r(x)^{10-r} \left(-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^r = C_{10}^r(x)^{10-r}(x)^{-1/2r}(-1)^{-1/2r} = C_{10}^r(-1)^{-1/2r}(x)^{10-\frac{3}{2}r}$$

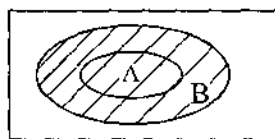
r را طوری تعیین می‌کنیم که توان x برابر ۴ باشد:

$$10 - \frac{3}{2}r = 4 \Rightarrow r = 4, \quad \text{ضریب جمله} = C_{10}^4 = \frac{10!}{4!6!} = 210$$

پاسخ تشریحی تست‌های آزمون کارشناسی ارشد

((مجموعه‌ها))

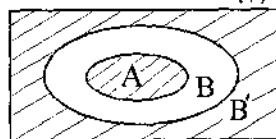
(۴)-۱



$$A \cap B = A$$

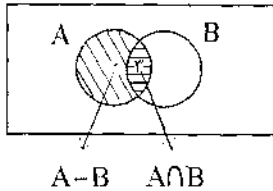


$$A \cup B = B$$



$$A \cap B' = \emptyset$$

۲-۲) $\{a\}$ عضو مجموعه A می‌باشد یعنی $a \in A$. عبارت داده شده در صورتی درست بود که داشته باشیم $\{\{a\}\} \subseteq A$.



۳-۱) در شکل مقابل که با توجه به معلومات مسئله رسم شده است. در فضای $A - B$ به غیر از صفر هیچ عدد دیگری نمی‌تواند باشد زیرا در صورت وجود، جزء $A - B$ به‌شمار می‌آید. در فضای $A \cap B$ هم به غیر از ۲ هیچ عدد دیگری نمی‌تواند باشد زیرا در صورت وجود، جزء $A \cap B$ به‌شمار می‌آید. بنابراین ۱ و ۲ در فضای هاشور نخورده B قرار دارند، پس $A = \{1, 2\}$.

۴-۱)

۵-۳) و ۲) $A_1 = \{-1, 0\}$ و $A_2 = \{-2, -1, 0, 1\}$ و ... بنابراین « n » شتمین عضوهای A_1 و A_2 و ... می‌باشد. پس $A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_n$ در نتیجه $A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_n$ و $\bigcup_{i=1}^n A_i = A_n$ بنابراین $\bigcap_{i=1}^n A_i \neq \emptyset$. گزینه ۴ بسط قضیه دمورگان است.

۶-۲)

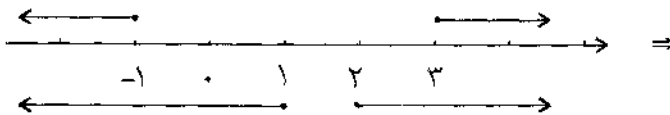
$$(A' \cap B) \cup (A \cap B) = (A' \cup A) \cap B = M \cap B = B$$

۷-۱) به توضیح تست شماره ۵ مراجعه کنید.

۸-۲)

$$A: |x - 1| \geq 2 \Rightarrow \begin{cases} x - 1 \geq 2 \\ x - 1 \leq -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x \leq -1 \end{cases}$$

$$B: x^2 - 3x + 2 \leq 0 \Rightarrow x \geq 2 \text{ یا } x \leq 1$$



$$\left(\begin{array}{c} \text{Number line for } A \cup B: \text{rays from } -1 \text{ and } 3 \text{ pointing outwards} \\ (A \cup B) \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} \text{Number line for } A \cap B: \text{segment from } 2 \text{ to } 3 \\ (A \cap B) \end{array} \right) =$$

$$\begin{array}{c} \text{Number line for } (-1, 1] \cup [2, 3) \\ (-1, 1] \cup [2, 3) \end{array}$$

۹-۳)

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \Rightarrow 18 = 10 + n(B) - 4 \Rightarrow n(B) = 12$$

۱۰-۲)

$$(A \cup B) \cap (A' \cup B) = B \cup (A \cap A') = B \cup \emptyset = B$$

(۳)-۱۱

$$(A \cup B) - A = (A \cup B) \cap A' = (A \cap A') \cup (B \cap A') = \phi \cup (B \cap A') = B \cap A' = B - A$$

۱۲- (۱) قانون دمورگان است.

(۲)-۱۳

$$\begin{aligned} B - (A - B) &= B - (A \cap B') = B \cap (A \cap B')' = B \cap (A' \cup B) \\ &= (B \cup \phi) \cap (B \cup A') = B \cup (\phi \cap A') = B \cup \phi = B \end{aligned}$$

(۱)-۱۴

$$A^{\phi} \text{ تعداد اعضای } A^{\phi} = n(A)^{\phi} = 3^{\phi} = 243$$

۱۵- (۲) چهار عضو دارد زیرا:

$$(A \cap B) \cup A' = \{ \} \cup \{1, 3, 5, 7\} = \{1, 3, 5, 7\}$$

(۲)-۱۶

$$[A \cap B \cap (A - B)]' = [A \cap B \cap (A \cap B')]' = [(A \cap A) \cap (B \cap B')]' = (A \cap \phi)' = \phi' = M$$

۱۷- (۴) دو عضو دارد زیرا

$$A = \{1, 2\}, B = \{2, 3, 4\} \Rightarrow B - A = \{3, 4\}$$

$$18- (۱) \text{ خواهیم داشت: } A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_n \text{ بنابراین } A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n = A_1 \text{ یا } \bigcap_{i=1}^n A_i = A_1$$

(۳)-۱۹

$$\begin{aligned} (A \cap B) \cap (A - B)' &= (A \cap B) \cap (A \cap B')' = (A \cap B) \cap (A' \cup B) = [(A \cap B) \cap A'] \cup [(A \cap B) \cap B] \\ &= [(A \cap A') \cap B] \cup [(B \cap B) \cap A] = (\phi \cap B) \cup (B \cap A) = \phi \cup (B \cap A) = A \cap B \end{aligned}$$

۲۰- (۳) اگر مجموعه A دارای n عضو باشد، تعداد زیرمجموعه‌های آن 2^n است. حال اگر ۲ عضو اضافه شود، خواهیم داشت:

$$2^{n+2} = 2^n \times 2^2 = 4 \times 2^n$$

(۲)-۲۱

$$A - (A \cap B) = A \cap (A \cap B)' = A \cap (A' \cup B') = (A \cap A') \cup (A \cap B') = \phi \cup (A \cap B') = A \cap B'$$

(۳)-۲۲

$$A \subset B \Rightarrow A - B = \phi, (A - B)' \cap A = \phi' \cap A = M \cap A = A$$

۲۳- (۲) زیرا هر یک از مؤلفه‌های سمت‌یی داده شده بید عضو M باشند.

(۳)-۲۴

$$(A - B) \cap A \cap B = (A \cap B') \cap A \cap B = (A \cap A) \cap (B \cap B') = A \cap \phi = \phi$$

(۴)-۲۵

$$A' = \{x|x \leq 2\}, B' = \{x|x > -2\} \Rightarrow A' \cap B' = \{x| -2 < x \leq 2\}$$

۲۶-۳) داریم $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ و $B = \{3, 6, 9\}$ بنابراین:

$$A - B = \{1, 5, 7\} \Rightarrow \text{تعداد زیرمجموعه‌ها} = 2^3 = 8$$

(۱)-۲۷

$$\begin{aligned} [A \cap B \cap (A - B)] \cup A &= [A \cap B \cap (A \cap B')] \cup A = [(A \cap A) \cap (B \cap B')] \cup A \\ &= (A \cap \phi) \cup A = \phi \cup A = A \end{aligned}$$

(۱)-۲۸

$$A \subset B \subset C \Rightarrow \begin{cases} A \cap B = A, C \cap B = B \\ A \cup B = B, A \cup C = C \end{cases}$$

$$[(\underbrace{A \cap B}_A) \cup C] \cap (\underbrace{A \cup B}_B) = (\underbrace{A \cup C}_C) \cap B = C \cap B = B$$

۲۹-۱) داریم $A = \{2, 3, 4\}$ و $B = \{3, 4, 5\}$ بنابراین:

$$(A - B) \times A = \{2\} \times \{2, 3, 4\} = \{(2, 2), (2, 3), (2, 4)\}$$

(۳)-۳۰

$$(M \cup N) \cap N' = (N' \cap M) \cup (N' \cap N) = (N' \cap M) \cup \phi = N' \cap M = M \cap N'$$

۳۱-۲) داریم $n(A) = 5$, $n(B) = 7$ و $n(A \cap B) = 3$ بنابراین:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 5 + 7 - 3 = 9$$

(۱)-۳۲

$$(A \cup B) \cap (A \cup B') = A \cup (B \cap B') = A \cup \phi = \phi$$

۳۳-۴) به توضیح تست شماره ۲۰ مراجعه کنید.

$$2^{n+r} = 2^n \times 2^r = 8 \times 2^r$$

(۱)-۳۴

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$19 = 10 + 15 - n(A \cap B) \Rightarrow n(A \cap B) = 6$$

۳۵-۴) قانون جذب $A \cup (B \cap A) = A$ پس:

$$A' \cap [A \cup (B \cap A)] = A' \cap A = \phi$$

پاسخ تشریحی تست‌های آزمون کارشناسی ارشد

«تابع»

(۲)-۱

$$y^2 = \sqrt{x^2 - 1} \Rightarrow y = \pm \sqrt{x^2 - 1}, x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm \sqrt{1 - x^2}$$

$$x^2 - 2xy + y^2 - 1 = 0 \Rightarrow (x - y)^2 - 1 = 0 \Rightarrow y = x \pm 1$$

بنابراین گزینه‌های ۱ و ۲ و ۳ تبع نمی‌باشند، زیرا به‌ازای هر مقدار حقیقی x (متعلق به دامنه تعریف) دو مقدار برای y به‌دست می‌آید.

(۲)-۲

$$x - |x| \geq 0 \Rightarrow x \geq |x| \Rightarrow D_f = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

به‌ازای $\mathbb{R}^+$ داریم $|x| = x$ در نتیجه $x - |x|$ مساوی صفر است و بنابراین $R_f = \{0\}$.

(۴)-۳

$$y = \frac{x+1}{x}, x = \frac{y+1}{y} \Rightarrow xy = y+1 \Rightarrow y = \frac{1}{x-1} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{x-1}$$

(۱)-۴

$$f \circ g = f(g(x)) = \sqrt{x^2} = |x|$$

(۱)-۵

$$(6x - 9)^2 = 9 \Rightarrow 6x - 9 = \pm 3 \Rightarrow 6x = \pm 3 + 9 \Rightarrow x = 2, x = 1$$

(۴)-۶

$$y = \operatorname{sh} x, x = \operatorname{sh} y \Rightarrow y = \operatorname{Arcsh} x \Rightarrow y = \frac{1}{2} \operatorname{Arcsh} x \Rightarrow y = \frac{1}{2} \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

۷- (۱) به متن درس مراجعه شود.

(۳)-۸

$$f(g(x)) = |g(x)| \xrightarrow{g(x) < 0} f(g(x)) = -g(x)$$

(۱)-۹

$$y = b^x, x = b^y \Rightarrow y = \log_b^x \Rightarrow f^{-1}(x) = \log_b^x$$

(۱)-۱۰

(۲)-۱۱

$$\begin{cases} x^2 - x > 0 \Rightarrow x > 1 & \text{یا} & x < 0 \\ 1 - x > 0 \Rightarrow x < 1 \end{cases} \Rightarrow D_f = \{x | x < 0\} = (-\infty, 0)$$

(۱)-۱۲

$$y = \frac{3x+3}{x} = 3 + \frac{3}{x} \Rightarrow x = \{\pm 1, \pm 3\}$$

زیرا x باید مقسوم‌علیه‌های عدد ۳ باشد تا $3/x$ یک عدد صحیح باشد.

(۳)-۱۳

$$x = n + p \ (n \in \mathbb{Z}, 0 \leq p < 1) \Rightarrow [x] = n$$

$$[x] - x = n - n - p \Rightarrow [x] - x = -p \Rightarrow -1 < -p \leq 0 \Rightarrow -1 < [x] - x \leq 0 \equiv (-1, 0]$$

(۴)-۱۴

$$(f \circ g)(1/2) = f(g(1/2)), g\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \times \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow f(1) = 1^2 = 1$$

(۱)-۱۵

$$x = \frac{e^{xy} + 1}{e^{xy} - 1} \Rightarrow x e^{xy} - x = e^{xy} + 1 \Rightarrow e^{xy}(x - 1) = x + 1$$

$$\Rightarrow e^{xy} = \frac{x+1}{x-1} \Rightarrow xy = \ln \frac{x+1}{x-1} \Rightarrow y = \frac{1}{x} \ln \frac{x+1}{x-1} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{x} \ln \frac{x+1}{x-1}$$

(۳)-۱۶

$$[x] + [-x] = 0 \Rightarrow [x] = -[-x]$$

تساوی فوق هنگامی برقرار است که $x \in \mathbb{Z}$ باشد و از آنجا که مخرج کسر باید مخالف صفر باشد، خواهیم داشت:

$$D_f = \mathbb{R} - \mathbb{Z}$$

(۲)-۱۷

$$\begin{cases} 1 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1 \\ \ln x \Rightarrow x > 0 \\ x + 1 > 0 \Rightarrow x > -1 \end{cases} \Rightarrow D_f = (0, 1]$$

(۲)-۱۸

$$g \circ f = g(f(x)) = \sqrt{x^2 + 1}$$

(۱)-۱۹

$$x + 2 > 0 \Rightarrow x > -2, x - 2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2, 4 - x^2 \geq 0 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2 \Rightarrow D_f = (-2, 2]$$

(۳)-۲۰ داریم $[[x]] = 0, 1, 2, 3, \dots$

$$y = 2^0 = 1, y = 2^1 = 2, y = 2^2 = 4, \dots \Rightarrow R_f = \{1, 2, 4, \dots\}$$

(۱)-۲۱

$$x = \ln \frac{y-1}{y+1} \Rightarrow e^x = \frac{y-1}{y+1} \Rightarrow ye^x + e^x = y - 1 \Rightarrow$$

$$y = \frac{-1 - e^x}{e^x - 1} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{-1 - e^x}{e^x - 1}, f^{-1}(1) = \frac{-1 - e}{e - 1} = \frac{-(e+1)}{-(1-e)} = \frac{e+1}{1-e}$$

(۲)-۲۲

$$\frac{1}{3x-2} = t \Rightarrow 3tx - 2t = 1 \Rightarrow x = \frac{1+2t}{3t}$$

$$f(t) = \frac{\frac{1+2t}{3t} - 1}{\frac{1+2t}{3t} + 1} = \frac{\frac{1+2t-3t}{3t}}{\frac{1+2t+3t}{3t}} = \frac{1-t}{1+5t} \Rightarrow f(x) = \frac{1-x}{1+5x}$$

۲۳- (۲) همان‌طور که ملاحظه می‌شود تنها در گزینه (۲) بازای هر مقدار x حداکثر یک مقدار برای y حاصل می‌شود:

$$y^2 = x + 1 \Rightarrow y = \pm \sqrt{x + 1}$$

$$y + x^2 - 1 = 0 \Rightarrow y = -x^2 + 1$$

$$x^2 + y^2 - 1 = 0 \Rightarrow y^2 = 1 - x^2 \Rightarrow y = \pm \sqrt{1 - x^2}$$

$$y = \text{Arcsin } x \xrightarrow{x=1} y = \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots$$

(۱)-۲۴

$$[x] = 0 \Rightarrow 0 \leq x < 1 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - [0, 1)$$

(۲)-۲۵

$$\text{Arcsin}(x - 1) = t \Rightarrow x - 1 = \sin t \Rightarrow x = \sin t + 1$$

$$f(t) = \frac{\sin t + 1 - 1}{\sin t + 1} = \frac{\sin t}{\sin t + 1} \Rightarrow f(x) = \frac{\sin x}{\sin x + 1}$$

۲۶- (۲) راه حل تستی: متغیر مستقل تابع $f^{-1}(x)$ همان متغیر وابسته $f(x)$ است.

$$y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \Rightarrow \ln(1 + \sqrt{2}) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \Rightarrow 1 + \sqrt{2} = x + \sqrt{x^2 + 1}$$

با توجه به گزینه‌های داده شده تنها بازای $x = 1$ تساوی فوق برقرار است.

۲۷- (۲) تابع فرد، تابعی است که نمودار آن نسبت به مبدأ مختصات قرینه باشد.

(۳)-۲۸

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$-x^2 + 2x + 2$		$-$	$+$	$-$

$$-x^2 + 2x + 2 > 0 \Rightarrow -x^2 + 2x + 2 = 0 \Rightarrow x = -1, x = 3$$

$$\Rightarrow D_f = \{x | -1 < x < 2\} = (-1, 2)$$

(۱)-۲۹

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$-x - 1$		$+$	$-$	$-$

$$x = \frac{e^y - 1}{e^y + 1} \Rightarrow x e^y + x = e^y - 1 \Rightarrow e^y = \frac{-x - 1}{x - 1}$$

$x - 1$	$-$	$-$	$+$
$-x - 1$	$-$	$+$	$+$

$$\Rightarrow y = \ln \frac{-x - 1}{x - 1}, \frac{-x - 1}{x - 1} > 0 \Rightarrow x = -1, x = 1$$

$$\Rightarrow R_f = \{x | -1 < x < 1\} = (-1, 1)$$

(۲)-۳۰

$$g(1) = \ln 1 = 0, (f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(0) = \frac{e^0 + e^0}{1} = 1$$

(۲)-۳۱

(۳)-۳۲

$$\sin x > 0 \Rightarrow \text{مینوس در ناحیه اول یا دوم} \Rightarrow 2k\pi < x < 2k\pi + \pi$$

(۱)-۳۳

$$x = \ln \frac{y + 1}{y} \Rightarrow \frac{y + 1}{y} = e^x \Rightarrow y + 1 = y e^x \Rightarrow (e^x - 1)y = 1 \Rightarrow$$

$$y = \frac{1}{e^x - 1} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{e^x - 1} \Rightarrow f^{-1}(2) = \frac{1}{e^2 - 1}$$

(۴)-۳۴

$$f(-x) = e^{(-x)^{-1}} = e^{x^{-1}} = f(x)$$

$$f(-x) = (-x)e^{(-x)^{-1}} = -xe^{x^{-1}} = -f(x)$$

$$f(-x) = \sin(-x) + (-x) = -\sin x - x = -(\sin x + x) = -f(x)$$

$$f(-x) = \cos(-x) + (-x) = \cos x - x$$

(۱)-۳۵

$$x = \sqrt{\frac{1-y}{1+y}} \Rightarrow x^2 = \frac{1-y}{1+y} \Rightarrow x^2 + yx^2 = 1-y \Rightarrow$$

$$y(x^2 + 1) = 1 - x^2 \Rightarrow y = \frac{1-x^2}{1+x^2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$$

$f^{-1}(x)$ یک تابع است، زیرا به ازای هر x تنها یک مقدار برای y وجود دارد.

(۳)-۳۶

$$f(g(x)) = \frac{\frac{2x}{x+1}}{\frac{2x}{x+1} - 1} = \frac{\frac{2x}{x+1}}{\frac{2x - x - 1}{x+1}} = \frac{2x}{x-1}$$

۳۷-(۲) چون فرجه رادیکال فرد است، مقدار زیر رادیکال می‌تواند مثبت و یا منفی باشد و از آنجا که مخرج کسر یعنی $1+x^2$ همیشه مثبت است در نتیجه $D_f = \mathbb{R}$.

(۱)-۳۸

$$y = \frac{x}{x+1} \Rightarrow yx + y = x \Rightarrow x(y-1) = -y \Rightarrow x = \frac{-y}{y-1}$$

$$y-1 \neq 0 \Rightarrow y \neq 1 \Rightarrow R_f = \mathbb{R} - \{1\}$$

(۳)-۳۹

$$(f \circ f)(1) = f(f(1)), f(1) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{1}{3}$$

(۳)-۴۰

$$f(-1/5) = [2(-1/5) + 1] + 2 = [-5/5] + 2 = -1 + 2 = 1$$

(۲)-۴۱

$$x = e^y + 2 \Rightarrow e^y = x - 2 \Rightarrow y = \ln(x - 2) \Rightarrow f^{-1}(x) = \ln(x + 2)$$

(۱)-۴۲

$$y = \frac{x+3}{x} \Rightarrow yx = x+3 \Rightarrow x(y-1) = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{y-1}$$

$$y-1 \neq 0 \Rightarrow y \neq 1 \Rightarrow R_f = \mathbb{R} - \{1\}$$

۴۳- (۴) راه اول:

$$x = \ln(y + 4) \Rightarrow e^x = y + 4 \Rightarrow y = e^x - 4 \Rightarrow$$

$$f^{-1}(x) = e^x - 4 \Rightarrow f^{-1}(0) = e^0 - 4 = -3$$

راه دوم: متغیر مستقل تابع $f^{-1}(x)$ همان متغیر وابسته تابع $f(x)$ است، بنابراین:

$$0 = \ln(x + 4) \Rightarrow e^0 = x + 4 \Rightarrow x = -3$$

۴۴- (۴)

$$y = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \Rightarrow y^2 = \frac{x^2}{x^2 + 1} \Rightarrow y^2 x^2 + y^2 = x^2 \Rightarrow (y^2 - 1)x^2 = -y^2 \Rightarrow x^2 = \frac{-y^2}{y^2 - 1}$$

$$\Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{-y^2}{y^2 - 1}}, \frac{-y^2}{y^2 - 1} \geq 0 \Rightarrow -y^2 < 0, y^2 - 1 = 0 \Rightarrow y = \pm 1$$

y	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$-y^2$		-	-	-
$y^2 - 1$		+	0	-
$\frac{-y^2}{y^2 - 1}$		-	∞	+

$$\Rightarrow R_f = \{y \mid -1 < y < 1\} \equiv (-1, 1)$$

۴۵- (۲)

$$(f \circ g)(y) = f(g(y)), g(y) = 4y \Rightarrow f(4y) = \sqrt{4y + 1} = \sqrt{5} = 5\sqrt{2}$$

۴۶- (۳)

$$f(-x) = \sin(-x) = -\sin x = -f(x) \quad \text{تابع فرد است}$$

$$f(-x) = \sin(-x) + \cos(-x) = -\sin x + \cos x \quad \text{تابع نه فرد و نه زوج است}$$

$$f(-x) = |-x|((-x)^2 + 1) = |x|(x^2 + 1) = f(x) \quad \text{تابع زوج است}$$

$$f(-x) = (-x)^2 + (-x) = -x^2 - x = -(x^2 + x) = -f(x) \quad \text{تابع فرد است}$$

۴۷- (۱)

$$x^2 - 4 > 0 \Rightarrow x^2 > 4 \Rightarrow |x| > 2$$

۴۸- (۱)

$$f(-x) = (-x)^2 - (-x) = -x^2 + x = -(x^2 - x) = -f(x) \quad \text{تابع فرد است}$$

$$f(-x) = (-x)^2 + (-x) = x^2 - x \quad \text{تابع نه فرد و نه زوج است}$$

$$f(-x) = \sin(-x) + \cos(-x) = -\sin x + \cos x \quad \text{تابع نه فرد و نه زوج است}$$

$$f(-x) = \cos(-x) = \cos x = f(x) \quad \text{تابع زوج است}$$

۴۹- (۳)

$$(f \circ g)(2) = f(g(2)), g(2) = \frac{2-1}{2+1} = \frac{1}{3} \Rightarrow f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1/3}{1/3+1} = \frac{1}{4}$$

۵۰-(۲) راه اول:

$$x = \frac{2y}{y-2} \Rightarrow xy - 2x = 2y \Rightarrow y = \frac{2x}{x-2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{2x}{x-2} \Rightarrow f^{-1}(-2) = \frac{-4}{-2-2} = 1$$

راه دوم: متغیر مستقل تابع $f^{-1}(x)$ همان متغیر وابسته تابع $f(x)$ است. بنابراین:

$$-2 = \frac{2x}{x-2} \Rightarrow -2x + 4 = 2x \Rightarrow 4x = 4 \Rightarrow x = 1$$

۵۱-(۴)

$$\ln x - 1 \neq 0 \Rightarrow \ln x \neq 1 \Rightarrow x \neq e^1 \Rightarrow x \neq e \Rightarrow D_f = \mathbb{R}^+ - \{e\}$$

۵۲-(۱) نقاط تقاطع دو تابع f و f^{-1} که معکوس یکدیگرند، روی خط $y = x$ (نیمساز ناحیه اول و سوم) واقع است.

$$\begin{cases} y = x \\ y = \frac{x}{x+1} \end{cases} \Rightarrow x^2 + x - x = x = 0$$

۵۳-(۲)

$$(f \circ g)(1) = f(g(1)), g(1) = \frac{\pi}{6} \Rightarrow f(\pi/6) = 2 \sin \frac{\pi}{6} + 1 = 2 \times \frac{1}{2} + 1 = 2$$

۵۴-(۳)

$$\begin{aligned} f(-x) &= \sqrt[3]{(-x+1)^3} + \sqrt[3]{(-x-1)^3} = \sqrt[3]{[-(x-1)]^3} + \sqrt[3]{[-(x+1)]^3} \\ &= \sqrt[3]{(x-1)^3} + \sqrt[3]{(x+1)^3} = f(x) \quad \text{تابع زوج است} \end{aligned}$$

۵۵-(۱) تابع یک به یک نیست زیرا اگر خطی موازی محور x ها رسم کنیم، نمودار تابع را در دو نقطه قطع می‌کند. تابع زوج است زیرا، توابع زوج نسبت به محور y ها قرینه‌اند.

۵۶-(۴)

$$|x| - 1 \neq 0 \Rightarrow |x| \neq 1 \Rightarrow x \neq \pm 1 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$$

۵۷-(۲)

$$\begin{aligned} y = \frac{e^x + 1}{e^x - 1} &\Rightarrow ye^x - y = e^x + 1 \Rightarrow e^x(y - 1) = y + 1 \Rightarrow \\ e^x &= \frac{y+1}{y-1} \Rightarrow x = \ln \frac{y+1}{y-1}, \frac{y+1}{y-1} > 0 \Rightarrow y = -1, y = 1 \end{aligned}$$

y	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$y+1$		$-$	$+$	$+$
$y-1$		$-$	$-$	$+$
$\frac{y+1}{y-1}$		$+$	$-\infty$	$+$

$$\Rightarrow R_f = \mathbb{R} - [-1, 1]$$

۵۸-(۲)

$$(f \circ g)(1) = f(g(1)), g(1) = \ln 1 = 0 \Rightarrow f(0) = \frac{2e^0 - e^0}{2} = \frac{1}{2}$$

۵۹-(۱)

$$f \circ g(3) = f(g(3)) \quad g(3) = \sqrt{3+1} = 2$$

پس

$$f(g(y)) = f(y) = \frac{y}{y+1} = \frac{y}{y}$$

(۴)-۶۰

$$y = \frac{x^y}{x^y + 1} \Rightarrow yx^y + 1y = x^y \Rightarrow x^y - yx^y = 1y \Rightarrow (1-y)x^y = 1y$$

$$\Rightarrow x^y = \frac{1y}{1-y} \Rightarrow x = \pm \sqrt[y]{\frac{1y}{1-y}} \Rightarrow R_f = [0, 1)$$

(۲)-۶۱

$$y = \frac{\ln(x+1)}{x} \Rightarrow \begin{cases} x+1 > 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow x \neq 0, (-1, \infty)$$

(۱)-۶۲

$$x = \ln \frac{y+1}{y} \Rightarrow \frac{y+1}{y} = e^x \Rightarrow y+1 = ye^x \Rightarrow ye^x - y = 1 \Rightarrow (e^x - 1)y = 1$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{e^x - 1} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{e^x - 1} f^{-1}(1) = \frac{1}{e^1 - 1} = \frac{1}{e - 1}$$

(۲)-۶۳

$$f(-x) = e^{(-x)^y} + 1 = e^{x^y} + 1 = f(x)$$

$$f(-x) = e^{y(-x)} - (-x) = e^{-yx} + 1$$

$$f(-x) = (-x)^y = x^y = f(x)$$

$$f(-x) = \cos(-x) = \cos x = f(x)$$

(۴)-۶۴

$$y = \frac{1}{y} \left(x - \frac{1}{x} \right), x = \frac{1}{y} \left(y - \frac{1}{y} \right) \Rightarrow x = \frac{1}{y} \left(\frac{y^2 - 1}{y} \right) \Rightarrow$$

$$y^3 - yxy - 1 = 0 \Rightarrow y = x \pm \sqrt{x^y + 1} \xrightarrow{x > y} y = x + \sqrt{x^y + 1}$$

(۳)-۶۵

$$g(f(x)) = \ln \sqrt{e^{-x}} = \ln e^{-x/2} = -\frac{x}{2} \ln e = -\frac{x}{2}$$

(۲)-۶۶

$$[x] - 1 = 0 \Rightarrow [x] = 1 \Rightarrow 1 \leq x < 2 \equiv [1, 2)$$

۶۷- (۱) تابع نه فرد و نه زوج است، زیرا:

$$f(-x) = (-x)^y + (-x) \sin(-x) = -x^y + x \sin x$$

(۱)-۶۸

$$y = \frac{x+y}{x} = 1 + \frac{y}{x}$$

برای اینکه $\frac{4}{x}$ یک عدد طبیعی باشد، باید x مقسوم علیه‌های عدد ۴ باشد. بنابراین $x = \{1, 2, 4\}$
 $x^2 \geq 0$ بنابراین $x^2 + 1 \geq 1$ در نتیجه $\ln(x^2 + 1)$ همواره مثبت است ($\mathbb{R}^+$) و چون به ازای $x = 0$ داریم
 $\ln 1 = 0$ خواهیم داشت: $R_f = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$
 (۲)-۷۰

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{4} = 1 - y^2 \Rightarrow x^2 = 4 - 4y^2 \Rightarrow x = \pm 2\sqrt{1 - y^2}$$

$$1 - y^2 \geq 0 \Rightarrow |y| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq y \leq 1$$

(۳)-۷۱

$$f \circ g = f(g(x)) = \frac{\frac{2x}{x-1}}{\frac{2x}{x-1} + 1} = \frac{\frac{2x}{x-1}}{\frac{2x + x - 1}{x-1}} = \frac{2x}{3x-1}$$

(۱)-۷۲

$$x = \frac{2y}{y-1} \Rightarrow xy - x = 2y \Rightarrow y(x-2) = x \Rightarrow y = \frac{x}{x-2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x}{x-2}$$

(۲)-۷۳

$$y\sqrt{x^2+1} - x = 0 \Rightarrow y\sqrt{x^2+1} = x \Rightarrow y^2(x^2+1) = x^2 \Rightarrow x^2(y^2-1) = -y^2 \Rightarrow x^2 = \frac{-y^2}{y^2-1}$$

$$\Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{-y^2}{y^2-1}} \Rightarrow x = \pm y \sqrt{\frac{1}{y^2-1}}, \frac{1}{y^2-1} > 0 \Rightarrow \frac{1}{y^2-1} < 0, y^2-1 = 0 \Rightarrow y = \pm 1$$

$$\frac{y}{y^2-1} \left| \begin{array}{cccc} -\infty & -1 & 1 & +\infty \\ + & 0 & - & 0 & + \end{array} \right| \Rightarrow R_f = \{y \mid -1 < y < 1\} \equiv (-1, 1)$$

(۱)-۷۴

$$(f \circ g)\left(\frac{\delta}{4}\right) = f\left(g\left(\frac{\delta}{4}\right)\right), g\left(\frac{\delta}{4}\right) = \sqrt{\frac{\delta}{4} - 1} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + 1} = \frac{1}{3}$$

(۲)-۷۵

$$x^2 - 1 > 0 \Rightarrow x^2 > 1 \Rightarrow |x| > 1$$

(۱)-۷۶

$$-1 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -\cos x \leq 1 \Rightarrow 2-1 \leq 2-\cos x \leq 1+2 \Rightarrow$$

$$1 \leq 2-\cos x \leq 3 \Rightarrow 1 \geq \frac{1}{2-\cos x} \geq \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{3} \leq y \leq 1 \equiv \left[\frac{1}{3}, 1\right]$$

(۳)-۷۷ شرط یک به یک بودن $x_1 = x_2$ $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$

$$e^{x_1} = e^{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2, x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow x_1 = \pm x_2$$

$$\ln x_1 = \ln x_2 \Rightarrow x_1 = x_2, \frac{1}{x_1} = \frac{1}{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$$

۷۸- (۳) $f(-x) = e^{-x}$ تابع نه فرد و نه زوج است، $f(-x) = e^{-(-x)} = e^x$ تابع نه فرد و نه زوج است، $f(-x) = (-x)^2 + (-x) = x^2 - x$ تابع نه زوج است، $f(-x) = e^{(-x)^2} = e^{x^2} = f(x)$ تابع نه زوج است.

۷۹- (۱) متغیر مستقل تابع $f^{-1}(x)$ برابر متغیر وابسته تابع $f(x)$ است، بنابراین:

$$3 = \frac{x}{x-1} \Rightarrow 3x - 3 = x \Rightarrow 2x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

۸۰- (۳)

$$y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \Rightarrow yx^2 + y = x^2 - 1 \Rightarrow x^2 = \frac{y+1}{1-y} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{y+1}{1-y}}$$

$$\frac{y+1}{1-y} \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} y+1=0 \Rightarrow y=-1 \\ 1-y=0 \Rightarrow y=1 \end{cases}$$

y	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$y+1$	-	۰	+	+
$1-y$	+	+	۰	-
$\frac{y+1}{1-y}$	-	۰	+	∞

$$\Rightarrow R_f: -1 \leq y < 1$$

۸۱- (۴)

$$x^2 - 1 \neq 0 \Rightarrow x^2 \neq 1 \Rightarrow x \neq \pm 1 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{1, -1\}$$

۸۲- (۱) به توضیح تست شماره ۷۰ مراجعه کنید.

$$\frac{1}{2} = \frac{e^x}{e^x + 1} \Rightarrow \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2} = e^x \Rightarrow \frac{1}{2}e^x = \frac{1}{2} \Rightarrow e^x = 1 \Rightarrow x = 0$$

۸۳- (۳)

۸۴- (۲) چون نمودار تابع نسبت به مبدأ مختصات متقارن است، پس تابع فرد است.

۸۵- (۳)

$$(f \circ g)(1) = f(g(1)), g(1) = \ln 1 = 0 \Rightarrow f(0) = \frac{2e^0 - e^0}{2} = 1$$

۸۶- (۴)

$$3x = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{0\}$$

۸۷- (۱)

$$D_f = \{x | x > -1\}, \quad x = \ln(y+1) \Rightarrow y+1 = e^x \Rightarrow y = e^x - 1 \Rightarrow R_f = \mathbb{R}$$

===== پاسخ تشریحی تست‌های آزمون کارشناسی ارشد =====

«حد و پیوستگی»

۱- (۴) تابع f در نقطه $x = 0$ حد ندارد زیرا:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1 - 0 = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 - 1 = -1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$$

۲-۳) توابع کسری به‌ازای ریشه مخرج خود گسسته می‌باشند، بنابراین نقطه گسستگی توابع داده شده عبارت است از:

$$۱) x + ۱ = 0 \Rightarrow x = -۱ \quad ۲) \ln x - ۱ = 0 \Rightarrow \ln x = ۱ \Rightarrow x = e$$

$$۳) \ln x = 0 \Rightarrow x = e^0 \Rightarrow x = ۱ \quad ۴) ۱ + e^{1/x} > 0$$

(۴)-۳

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{1/x^2} = ۱^\infty, \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{1/x^2} = \exp \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{x^2} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{ل‌ه‌وپلا}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{-\sin x}{\cos x}}{2x} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\tan x}{2x}, x \rightarrow 0 \Rightarrow \tan x \sim x, \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{2x} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{1/x^2} = e^{-1/2}$$

۲-۴) راه اول:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{y}{x}\right)^{1+x} = ۱^\infty, \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{y}{x}\right)^{1+x} = \exp \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{y}{x}\right)}{\frac{1}{1+x}} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{ل‌ه‌وپلا}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{-\frac{y}{x^2}}{1 + y/x}}{\frac{-1}{(1+x)^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y(1+x)^2}{x^2 \left(\frac{x+y}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{yx^2 + yx + y}{x^2 + yx} = y, \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{y}{x}\right)^{1+x} = e^y$$

راه دوم:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{y}{x}\right)^{1+x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{y}{x}\right) \left(1 + \frac{y}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{y}{x}\right) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{y}{x}\right)^x = ۱ \times e^{y \times 1} = e^y$$

(۲)-۵) راه اول:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{yx \cdot \sin x}{\sqrt{x^2 + 1} - 1} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{yx \cdot \sin x}{\sqrt{x^2 + 1} - 1} \times \frac{\sqrt{x^2 + 1} + 1}{\sqrt{x^2 + 1} + 1} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{yx \cdot \sin x (\sqrt{x^2 + 1} + 1)}{x^2 + 1 - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{y \sin x (\sqrt{x^2 + 1} + 1)}{x} = \\ y \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{x^2 + 1} + 1) = y \times y = y^2$$

راه دوم:

$$x \rightarrow 0 \Rightarrow \sin x \sim x \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{yx^2}{\sqrt{x^2 + 1} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{yx^2(\sqrt{x^2 + 1} + 1)}{x^2 + 1 - 1} = y \lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{x^2 + 1} + 1) = y \times y = y^2$$

(۲)-۶

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} y^{-(1/(x-1))} = y^{-(1^+)} = y^{-\infty} = \frac{1}{y^\infty} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

۲-۷) گسستگی تابع باید در نقاط $x = ۱$ و $x = 0$ بررسی شود:

$$f(0) = -۱, \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -۱, \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 - ۱ = -۱ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0)$$

بنابراین تابع در نقطه $x = 0$ پیوسته است.

$$f(1) = -1, \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1 - 1 = 0, \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$$

بنابراین تابع در نقطه $x = 1$ گسسته است.

(۲)-۸

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)! + (n+1)!}{(n+2)! - (n+1)!} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)(n+1)! + (n+1)!}{(n+2)(n+1)! - (n+1)!} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)![(n+2) + 1]}{(n+1)![(n+2) - 1]} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{n+1} = 1 \end{aligned}$$

(۳)-۹

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{[x]^2 - [x]}{x^2 - 1} &= \frac{1 - 1}{1 - 1} = 0, \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{[x]^2 - [x]}{x^2 - 1} = \frac{0 - 0}{1 - 1} = 0 \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0 \end{aligned}$$

(۲)-۱۰

$$f(0) = 1, \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) = 1$$

(۳)-۱۱

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+5} - 3}{\sqrt{x} - 2} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{ل‌ه‌و}} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x+5}}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \frac{1}{1} = \frac{2}{3}$$

(۴)-۱۲

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+2} - 3^n - 5}{3^{n+1} + 3^n - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1} \left(3 - \frac{1}{3} - \frac{5}{3^{n+1}} \right)}{3^{n+1} \left(1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3^{n+1}} \right)} = \frac{3 - \frac{1}{3} - 0}{1 + \frac{1}{3} - 0} = \frac{\frac{8}{3}}{\frac{4}{3}} = 2$$

(۱)-۱۳

$$f(1) = e, \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = e^{1a}, \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = e$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \Rightarrow e^{1a} = e \Rightarrow 1a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

(۳)-۱۴

$$f(4) = \left[\frac{4}{3} \right] + b = 1 + b, \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{(x-4)(x+4)}{x-4} = 8$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = a[4^- - 4] + b = a + b \Rightarrow 1 + b = 8 = a + b \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a + b = 8 \\ 1 + b = 8 \end{cases} \Rightarrow b = 7 \Rightarrow a = 1$$

۱۵- (۱) طبق تعریف مشتق داریم:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + h\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{h} = \left(\sin \frac{\pi}{2}\right)' = 0$$

(۴)-۱۶

$$e^x - 2 = 0 \Rightarrow e^x = 2 \Rightarrow x = \ln 2$$

(۱)-۱۷

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x - [x]}{x - 1} = \frac{x - 1}{x - 1} = 1$$

(۱)-۱۸

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^7 - \sqrt[3]{x}}{\ln(7-x)} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{7x^6 - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}}{-1} = \frac{7 - \frac{1}{3}}{-1} = \frac{\frac{20}{3}}{-1} = -\frac{20}{3}$$

(۱)-۱۹

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n(n-1)(n-2)!}{r!(n-r)!} = \frac{n(n-1)}{r}$$

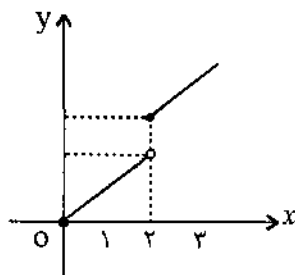
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} \times \frac{n(n-1)}{2}}{\frac{n(n+1)}{2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n^2+n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

(۳)-۲۰

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{an}\right)^n = \lim_{a \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\frac{1}{a}}{n}\right)^n = e^{1/a \times 1} = e^{1/a}$$

$$\Rightarrow e^{1/a} = e^r \Rightarrow \frac{1}{a} = r \Rightarrow a = \frac{1}{r}$$

(۲)-۲۱



$$0 \leq x < 1 \Rightarrow 0 \leq \frac{1}{r}x < 1 \Rightarrow \left\lceil \frac{1}{r}x \right\rceil = 0 \Rightarrow f(x) = x$$

$$1 \leq x < 2 \Rightarrow \frac{1}{r} \leq \frac{1}{r}x < 1 \Rightarrow \left\lceil \frac{1}{r}x \right\rceil = 1 \Rightarrow f(x) = x$$

$$2 \leq x < 3 \Rightarrow 1 \leq \frac{1}{r}x < 2 \Rightarrow \left\lceil \frac{1}{r}x \right\rceil = 2 \Rightarrow f(x) = 1 + x$$

$$x = 3 \Rightarrow \frac{x}{r} = \frac{3}{r} \Rightarrow \left\lceil \frac{1}{r}x \right\rceil = 3 \Rightarrow f(x) = 1 + x$$

(۳)-۲۲

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{rx} = e^{1 \times r} = e^r$$

(۲)-۲۳

$$f(1) = 2 - 1 = 1, \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = a + 1, \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2 - 1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \Rightarrow a + 1 = 1 \Rightarrow a = 0$$

(۱)-۲۴

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} y = \lim_{x \rightarrow -1^+} ([x - 1] + 2) = -2 + 2 = 0, \lim_{x \rightarrow -1^-} y = \lim_{x \rightarrow -1^-} ([x - 1] + 2) = -3 + 2 = -1$$

۲۵- (۳) به ازای $x = 1$ عبارت $(x^2 - 1)^2$ مساوی صفر می‌شود و $\ln 0$ تعریف نشده است، بنابراین تابع برای $x = 1$ گسسته است.

(۲)-۲۶

$$f(1) = 1 - 2 = -1, \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1 + a, \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1 - 2 = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \Rightarrow 1 + a = -1 \Rightarrow a = -2$$

(۴)-۲۷

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{t} + 1 \right)^{te^t} = e^{2 \times e^t} = e^e$$

(۲)-۲۸

$$e^{2x} - 1 = 0 \Rightarrow e^{2x} = 1 \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

(۲)-۲۹

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{هسپتال}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{1} = 0$$

(۲)-۳۰

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3 + x}{3 + 2^{1/x}} = \frac{3 + 0^-}{3 + 2^{-\infty}} = \frac{3}{3}$$

(۴)-۳۱

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x - x}{x} = \frac{1 - 0^-}{0^-} = -\infty$$

(۱)-۳۲

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{1+x} \right)^x = 1^\infty, \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{1+x} \right)^x = \exp \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(\frac{x}{1+x} \right)}{\frac{1}{x}} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{هسپتال}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x(1+x)}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x}{1+x} = -1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{1+x} \right)^x = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

(۴)-۳۳

$$\sin x + \frac{3}{x} = 0 \Rightarrow \sin x = -\frac{3}{x}$$

در صورتی که می‌دانیم $1 \leq \sin x \leq -1$ است، بنابراین تابع f فاقد گسستگی است.

(۲)-۳۴

$$x \rightarrow 0 \Rightarrow \sin x \sim x \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 - 1)x}{2x(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 1}{2(x+2)} = -\frac{1}{4}$$

(۱)-۳۵

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x + 1) = 3$$

(۳)-۳۶

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{10^x - e^{2x}}{x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{ل‌ه‌وپلاز}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{10^x \ln 10 - 2e^{2x}}{1} = \ln 10 - 2$$

(۲)-۳۷

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 1}{2\sqrt[3]{x} + 2} = \frac{-1}{2+\infty + 2} = -\frac{1}{\infty} = 0$$

(۲)-۳۸

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (1+x)^{1/x}, \frac{1}{x} = t \Rightarrow x = \frac{1}{t}, \lim_{t \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{\frac{1}{t}} = e^{1 \times \frac{1}{t}} = e^{1/t} = e^{1/0} = \sqrt{e}$$

(۳)-۳۹ عبارت داده شده تعریف مشتق $y = x^x$ بنابرین $y' = 2x^x$ می‌باشد.

(۴)-۴۰

$$\ln |x| - 1 = 0 \Rightarrow \ln |x| = 1 \Rightarrow |x| = e \Rightarrow x = \pm e \xrightarrow{x > 0} x = e$$

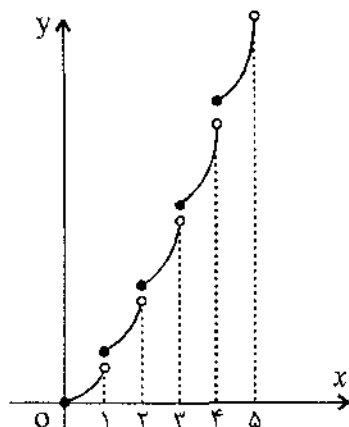
(۳)-۴۱

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x - [x]}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x - 0}{x + 1} = \frac{1}{2}$$

(۳)-۴۲

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!(2n)^2}{(n+1)n!(n+2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2}{n^2 + 3n + 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2}{n^2} = 2$$

(۴)-۴۳



$$0 \leq x < 1 \Rightarrow [x] = 0 \Rightarrow f(x) = x^1$$

$$1 \leq x < 2 \Rightarrow [x] = 1 \Rightarrow f(x) = 1 + x^1$$

$$2 \leq x < 3 \Rightarrow [x] = 2 \Rightarrow f(x) = 2 + x^2$$

$$3 \leq x < 4 \Rightarrow [x] = 3 \Rightarrow f(x) = 3 + x^3$$

$$4 \leq x < 5 \Rightarrow [x] = 4 \Rightarrow f(x) = 4 + x^4$$

(۱)-۴۴

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x}\right)^{1/x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{1/x} = e^{-1 \times \frac{1}{x}} = e^{-1}$$

(۴)-۴۵

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 + x - 2} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{ل‌ه‌وپلاز}} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x - 3}{2x + 1} = \frac{1}{3}$$

(۴)-۴۶

$$e^{yx} - 16 = 0 \Rightarrow e^{yx} = 16 \Rightarrow yx = \ln 16 \Rightarrow x = \frac{1}{y} \ln 16 = \ln \sqrt{16} \Rightarrow x = \ln 4$$

(۳)-۴۷

$$f(0) = e^0 + e^0 = 2, \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x + e^{-x}) = 2, \lim_{x \rightarrow 0^-} (2a - x) = 2a$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \Rightarrow 2 = 2a \Rightarrow a = 1$$

(۲)-۴۸

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{y+x}{y+\sqrt[3]{1/x}} = \frac{y+0^+}{y+\sqrt[3]{+\infty}} = \frac{y}{\infty} = 0$$

(۴)-۴۹

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{y}{yx}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{y}{x}\right)^x = e^{y/x \times 1} = e^{y/r} = \sqrt[r]{e^y}$$

۵۰- (۴) این تابع وقتی پیوسته است که $(x+1)$ مثبت باشد، چون $x^y \geq 0$ است پس $(x+1)$ هیچ‌گاه منفی نمی‌شود، در نتیجه این تابع همواره پیوسته است.

(۱)-۵۱

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{1+y+\dots+n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)(n-2)!}{\frac{n(n+1)}{y}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y(n-1)(n-2)!}{(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{yn \left(1 - \frac{1}{n}\right) (n-2)!}{n \left(1 + \frac{1}{n}\right)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y \left(1 - \frac{1}{n}\right) (n-2)!}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)} = \frac{y \left(1 - \frac{1}{\infty}\right) (\infty-2)!}{\left(1 + \frac{1}{\infty}\right)} = \frac{y \times 1 \times \infty}{1} = \infty \end{aligned}$$

(۴)-۵۲

$$e^x + 2 = 0 \Rightarrow e^x = -2 \Rightarrow x = \ln(-2) \Rightarrow \phi = \text{مجموعه نقاط گسستگی نامعین}$$

(۳)-۵۳

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (ax^y + a) = 2a, \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2x + 1) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \Rightarrow 2a = 3 \Rightarrow a = \frac{3}{2}$$

(۳)-۵۴

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{yx} &= \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}{yx(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1+x-1+x}{yx(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{y(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(۱)-۵۵

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^x = e^{-2/2 \times 1} = e^{-1/2}$$

(۴)-۵۶

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+2}{x^2-1/x+1} = \frac{\infty + 2}{\infty + 1} = \frac{2}{\infty} = 0$$

(۴)-۵۷

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x-4}{\sqrt{x^2+12}-4} &= \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2x-4)(\sqrt{x^2+12}+4)}{(\sqrt{x^2+12}-4)(\sqrt{x^2+12}+4)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x-2)(\sqrt{x^2+12}+4)}{x^2+12-16} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x-2)(\sqrt{x^2+12}+4)}{(x-2)(x+2)} = \frac{2(\sqrt{16}+4)}{(2+2)} = 4 \end{aligned}$$

(۲)-۵۸

$$f(1) = a + 1, \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2ax + 4) = 2a + 4, \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (ax^2 + 1) = a + 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \Rightarrow 2a + 4 = a + 1 \Rightarrow a = -3$$

(۴)-۵۹

$$\ln x - 2 = 0 \Rightarrow \ln x = 2 \Rightarrow x = e^2$$

(۴)-۶۰

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^{2x} = e^{-2 \times 2} = e^{-4}$$

۱۱-۶۱ عبارت داده شده تعریف مشتق تابع $y = x^0$ است بنابراین $y' = 0x^0$

(۴)-۶۲

$$e^x - 3 = 0 \Rightarrow e^x = 3 \Rightarrow x = \ln 3$$

(۱)-۶۳

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x - [x]}{x - 2} = \frac{x - 2}{x - 2} = 1$$

۱۱-۶۴ (ـ) هیچ کدام از گزینه‌ها صحیح نمی‌باشد.

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\ln(x+2)}{x + \sqrt{x}} = \frac{\ln 1}{-1 - 1} = \frac{0}{-2} = 0$$

(۱)-۶۵

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)!}{r!(n-r)!} = \frac{n(n-1)(n-2)}{r}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{\frac{n(n-1)(n-2)}{r}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{rn^2 + rn}{n^3 - 3n^2 + 2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{rn^2}{n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r}{n} = 0$$

یادآوری:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n+1)$$

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$$

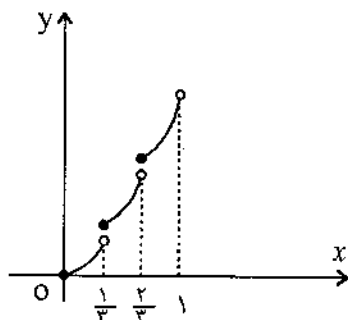
$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$$

(۱)-۶۶

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^{1/n} = e^{1/a} \Rightarrow e^{1/a} = e^{1/1} \Rightarrow 1/a = 1 \Rightarrow a = 1$$

(۲)-۶۷



$$0 \leq x < 1 \Rightarrow 0 \leq x < \frac{1}{2} \Rightarrow [x] = 0 \Rightarrow f(x) = x$$

$$1 \leq x < 2 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq x < \frac{3}{2} \Rightarrow [x] = 1 \Rightarrow f(x) = 1 + x$$

$$2 \leq x < 3 \Rightarrow \frac{3}{2} \leq x < \frac{5}{2} \Rightarrow [x] = 2 \Rightarrow f(x) = 2 + x$$

پاسخ تشریحی تست‌های آزمون کارشناسی ارشد

«مشتق»

(۴)-۱

$$y = \frac{xe^x}{x-1} \Rightarrow y' = \frac{(e^x + xe^x)(x-1) - xe^x}{(x-1)^2} \Rightarrow y'_{(1)} = \frac{(e^0 + 0)(0-1) - 0}{(0-1)^2} = -1$$

(۱)-۲

$$y = \cos x \Rightarrow y^{(n)} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right), y^{(\Delta)} = \cos\left(x + \frac{\Delta\pi}{2}\right) = -\sin x$$

(۲)-۳

$$z = f(u, v, w) \Rightarrow dz = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv + \frac{\partial z}{\partial w} dw$$

$$z = uvw \Rightarrow d = vwdu + uwdv + uvdw$$

(۱)-۴

$$y = xe^{-x} \Rightarrow y' = e^{-x} - xe^{-x} \Rightarrow e^{-x}(1-x) = 0 \Rightarrow e^{-x} > 0, 1-x = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$y'' = -e^{-x} - (e^{-x} - xe^{-x}) = -2e^{-x} + xe^{-x} = e^{-x}(x-2) \Rightarrow y''_{(1)} = -\frac{1}{e} < 0 \Rightarrow \text{نقطه max است}$$

۵- (۱) با توجه به تست شماره ۴ داریم:

$$y'' = -2e^{-x} + xe^{-x} = e^{-x}(x - 2)$$

$$y'' = 0 \Rightarrow e^{-x}(x - 2) = 0 \Rightarrow e^{-x} > 0, x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ طول نقطه عطف}$$

(۲)-۶

$$y' = e^x + xe^x = e^x(1 + x) \Rightarrow y'_{(1)} = e^1(1 + 0) = 1, \text{ شیب خط قائم} = -\frac{1}{y'_{(1)}} = -1$$

(۱)-۷

$$y'_x = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}$$

$$(۲)-۸ \text{ داریم } y = u^v \Rightarrow y' = u^v \left(v' \ln u + v \cdot \frac{u'}{u} \right)$$

$$y' = x^{e^x} \left(e^x \ln x + e^x \frac{1}{x} \right) \Rightarrow y'_{(1)} = 1^e \left(e^1 \ln 1 + \frac{e}{1} \right) = e$$

۹- (۱) داریم $\sin x - e^y = 0$ بنابراین:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{\cos x}{-e^y} = -\frac{\cos x}{-\sin x} = \cot x$$

(۳)-۱۰

$$f'(x) = \frac{e^{-x}}{2\sqrt{1-e^{-x}}} \Rightarrow \text{ضریب زاویه خط مماس} = f'(\circ) = \frac{1}{2\sqrt{1-1}} = \text{بی نهایت}$$

(۳)-۱۱

$$dy = \frac{1}{1+x^2} e^{\text{Arc tan } x} dx \Rightarrow dy = \frac{1}{1+0} e^{\text{Arc tan } (\circ/1)} = e^{\circ} = 1$$

(۱)-۱۲

$$y' = \frac{\lambda - 2x}{\lambda x - x^2} \Rightarrow \frac{\lambda - 2x}{\lambda x - x^2} = 0 \Rightarrow \lambda - 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{\lambda}{2}$$

$$y'' = \frac{-2(\lambda x - x^2) - (\lambda - 2x)(\lambda - 2x)}{(\lambda x - x^2)^2} \Rightarrow y''_{(\frac{\lambda}{2})} = -\frac{32}{16^2} < 0 \Rightarrow \text{نقطه max است}$$

(۳)-۱۳

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - (x+h) - x^2 + x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2hx + h^2 - x - h - x^2 + x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x + h - 1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h - 1) = 2x - 1 \xrightarrow{x=2} f'(2) = 4 - 1 = 3 \end{aligned}$$

(۴)-۱۴

$$\begin{aligned} y' &= na(ax+b)^{n-1} \Rightarrow y'' = n(n-1)a^2(ax+b)^{n-2} \Rightarrow y''' = n(n-1)(n-2)a^3(ax+b)^{n-3} \\ &\Rightarrow \dots \Rightarrow y^{(n)} = n!a^n(ax+b)^{n-n} = n!a^n \end{aligned}$$

(۳)-۱۵

$$y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \dots}}} \Rightarrow y^2 = x + \sqrt{x + \sqrt{x + \dots}} \Rightarrow y^2 = x + y \Rightarrow y^2 - x - y = 0 \Rightarrow y'_x = -\frac{-1}{2y-1} = \frac{1}{2y-1}$$

۱۶-(۲) به تست شماره ۸ مراجعه کنید.

۱۷-(۳) فرمول کوشی به صورت $f(b) - f(a)/g(b) - g(a) = f'(c)/g'(c)$ است، بنابراین:

$$\frac{f(2) - f(1)}{g(2) - g(1)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \Rightarrow \frac{2-1}{1-1} = \frac{2c}{2c^2} \Rightarrow \frac{1}{0} = \frac{1}{c} \Rightarrow c = \frac{1}{1}$$

۱۸-(۲) $y' = 2x^2 + 2ax + b$ چون در نقطه $x = 1$ شیب منحنی صفر است داریم $0 = 2 + 2a + b$

$y'' = 4x + 2a$ چون $x = 1$ طول نقطه عطف است داریم $6 + 2a = 0$ یا $a = -3$ مقدار a را در تساوی (۱)

جایگذاری می‌کنیم $b = 2 - 6 + 2a = -2$ یا $b = 2$ در نتیجه $a + b = 0$.

(۱)-۱۹

$$y' = (2x^2 - 2)a^{x^2-2x} \ln a \Rightarrow y'_{(1)} = (2-2)a^{1-2} \ln a = a^{-1} \ln a = \frac{1}{a} \ln a$$

(۲)-۲۰

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{2b \cos t \sin^2 t}{-2a \sin t \cos^2 t} = -\frac{b \sin t}{a \cos t} = -\frac{b}{a} \tan t$$

(۲)-۲۱

$$f'(x) = \frac{2x^2 e^{-x^2}}{2\sqrt{1-e^{-x^2}}} = \frac{2x^2 e^{-x^2}}{2} (1-e^{-x^2})^{-1/2} \Rightarrow f'(0^+) = 0$$

(۱)-۲۲

$$f(2) - f(1) = f'(c) \Rightarrow \frac{2}{5} - \frac{1}{4} = \frac{c+2-c}{(c+2)^2} \Rightarrow \frac{2}{5} = \frac{2}{(c+2)^2} \Rightarrow (c+2)^2 = 2 \Rightarrow c+2 = \pm\sqrt{2} \Rightarrow c = \pm\sqrt{2} - 2$$

۲۳-(۳ و ۲) بنا به قضیه ۲، قسمت (۵-۱۷-۱):

$$y = (\sin^2 x)^{n/2} \cdot (\cos^2 x)^{m/2}, \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad \text{ثابت}$$

حاصل ضرب بالا وقتی $\max$ است که:

$$\frac{\sin^2 x}{n/2} = \frac{\cos^2 x}{m/2} \Rightarrow \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{n/2}{m/2} \Rightarrow \tan^2 x = \frac{n}{m} \Rightarrow \tan x = \sqrt{\frac{n}{m}} \Rightarrow \cot x = \sqrt{\frac{m}{n}}$$

(۱)-۲۴

$$f'(x) = 2x^2 + 2kx \Rightarrow f''(x) = 4x + 2k, f''(1) = 0 \Rightarrow 4 + 2k = 0 \Rightarrow k = -\frac{2}{1}$$

(۳)-۲۵

$$y' = 6x^5 - 4x^2 \Rightarrow x^2(6x^3 - 4) = 0 \Rightarrow x = 0, x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$y'' = 30x^4 - 8x \Rightarrow \begin{cases} f''(0^+) < 0 \\ f''(0^-) < 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0 \text{ طول نقطه ماکزیم نسبی است}$$

(۲)-۲۶

$$y'_x = \frac{2x(x^2+1) - 2x(2x^2-1)}{(x^2+1)^2} \Rightarrow y'_{(1)} = \frac{1-2}{1} = \frac{2}{1} \Rightarrow x'_y = \frac{1}{y'_x} = \frac{1}{2}$$

(۴)-۲۷

$$y^{(n)} = \frac{(-c)^{n-1}n!(ad-bc)}{(cx+d)^{n+1}} \Rightarrow y^{(15)} = \frac{(-1)^{15}15!(2-2)}{(x+2)^{16}} = \frac{15!}{(x+2)^{16}}$$

$$y^{(15)}_{(-2)} = \frac{15!}{(-2+2)^{16}} = 15!$$

(۴)-۲۸

$$f'(x) = \frac{1}{x} x^{-1/2} (x+2)^{-1/2} - \frac{2}{x} x^{1/2} (x+2)^{-3/2} = \frac{1}{2\sqrt{x(x+2)^3}} - \frac{2\sqrt{x}}{2\sqrt{(x+2)^3}}$$

$$= \frac{\sqrt{(x+2)^3} - 2\sqrt{x^2}}{2\sqrt{x^2(x+2)^3}} = 0 \Rightarrow \sqrt{(x+2)^3} - 2\sqrt{x^2} = 0 \Rightarrow x+2-2x = 0 \Rightarrow x = 2$$

x	2
$f'(x)$	$+$ 0 $-$
	max

(۱)-۲۹ به تست شماره ۲۴ مراجعه کنید.

(۱)-۳۰

$$y^{(4)} = \frac{(1)^4 4!(1-0)}{(1-x)^{10}} = \frac{9!}{(1-x)^{10}} \Rightarrow y^{(4)}_{(1)} = \frac{9!}{(1-1)^{10}} = 9!$$

(۱)-۳۱

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{1}{-\frac{1}{t^2}} = -t^2$$

اگر فرض کنیم $z = -t^2$ ، آن‌گونه:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dz}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = -2t(-t^2) = 2t^2$$

یا:

$$x = \frac{1}{t}, y = t \Rightarrow y = \frac{1}{x} \Rightarrow y'_x = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow y''_x = \frac{2}{x^3} = 2t^3$$

(۱)-۳۲

$$\Delta y \approx f(x+\Delta x) - f(x) = \frac{x+\Delta x}{1+x+\Delta x} - \frac{x}{1+x} \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y \approx \frac{1}{1} \frac{1}{1} - \frac{1}{1} = \frac{1}{1}$$

$$dy = f'(x).dx = \frac{(1+x)-x}{(1+x)^2}.dx = \frac{dx}{(1+x)^2} \xrightarrow{x \rightarrow 1} = \frac{1}{4} \approx \frac{1}{4}$$

$$\Delta y - dy = \frac{1}{12} - \frac{1}{4} = \frac{1-3}{12} = -\frac{2}{12}$$

۳۳- (۴) همان‌طور که ملاحظه می‌شود تنها مشتق تابع گزیده ۴ همواره مثبت است.

$$۱) f'(x) = -1 + \cos x \Rightarrow -2 \leq f'(x) \leq 0$$

$$۲) f'(x) = 1 - 2 \sin x \Rightarrow -1 \leq f'(x) \leq 3$$

$$۳) f'(x) = 1 + 2 \cos x \Rightarrow -1 \leq f'(x) \leq 3$$

$$۴) f'(x) = 1 - \cos x \Rightarrow 0 \leq f'(x) \leq 2$$

(۴)-۳۴

$$y' = \ln ax + \frac{xa}{ax} = \ln ax + 1 \Rightarrow \ln ax + 1 = 0 \xrightarrow{x=1} \ln a = -1 \Rightarrow a = e^{-1} \Rightarrow a = \frac{1}{e}$$

(۱)-۳۵

$$\Delta y \approx f(x+h) - f(x) = (x+h)^2 - 2(x+h) + 1 - x^2 + 2x - 1$$

$$\Delta y \approx x^2 + 2xh + h^2 - 2x - 2h + 1 - x^2 + 2x - 1 = 2xh + h^2 - 2h$$

$$\Delta y \approx 2(0)(0.1) + (0.1)^2 - 2(0.1) = -0.19$$

(۴)-۳۶

$$dy = (2x - 1)e^{x^2-x} dx \xrightarrow{x=1} dy = (2 - 1)e^{1-1} dx \Rightarrow dy = dx$$

(۲)-۳۷

$$y'_x = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{\ln y + \frac{y}{x} + 2y - 1}{\frac{x}{y} + \ln x + 2x - 1} \xrightarrow{(1,1)} y'_x = -\frac{\ln 1 + 1 + 2 - 1}{1 + \ln 1 + 2 - 1} = -1$$

(۳)-۳۸

$$R = p \times q \Rightarrow \frac{\Delta R}{R} = \frac{\Delta p}{p} + \frac{\Delta q}{q} \Rightarrow \dot{R} = \dot{p} + \dot{q} \Rightarrow \dot{R} = 2 + 3 = 5$$

(۱)-۳۹

$$y = \arctan x \Rightarrow y' = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow y'' = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$

$$y'' = 0 \Rightarrow -2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y''	$+$	0	$-$

(۳)-۴۰

$$AC = \frac{TC}{x} = x + 4 + \frac{9}{x}$$

$$\frac{dAC}{dx} = 0 \Rightarrow 1 - \frac{9}{x^2} = 0 \Rightarrow 1 = \frac{9}{x^2} \Rightarrow x = \pm 3 \Rightarrow x = 3$$

$$AC = 3 + 4 + \frac{9}{3} = 10$$

(۲)-۴۱

$$y' = 2e^{2x} \Rightarrow y'' = 2^2 e^{2x} \Rightarrow y''' = 2^3 e^{2x} \Rightarrow \dots \Rightarrow y^{(n)} = 2^n e^{2x}$$

$$y_{(0)}^{(n)} = 2^n e^0 = 2^n$$

(۳)-۴۲

$$y' = e^{x-1} + xe^{x-1} \Rightarrow y'_{(1)} = e^{1-1} + (1)e^{1-1} = e^0 + e^0 = 2$$

(۴)-۴۳

$$y' = \frac{1}{x-1} \Rightarrow y'_{(1)} = m = \frac{1}{1-1} = 1, x = 2 \Rightarrow y = \ln(2-1) = 0$$

$$\Rightarrow (1, 0) : y - 0 = 1(x - 2) \Rightarrow y = x - 2 \longrightarrow y = 0 - 2 = -2$$

(۴)-۴۴

$$y' = \frac{-x^2 + 1 + 2x^2}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^2 + 1}{(x^2 - 1)^2} \Rightarrow y' > 0, \text{ بنابراین تابع همواره صعودی و فاقد اکسترمم}$$

(۲)-۴۵

$$y' = e^{-x} - xe^{-x} \Rightarrow y'' = -e^{-x} - (e^{-x} - xe^{-x}) = xe^{-x} - 2e^{-x}$$

$$y'' = 0 \Rightarrow e^{-x}(x - 2) = 0 \Rightarrow e^{-x} > 0, x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ طول نقطه عطف}$$

(۴)-۴۶

$$y' = \frac{\frac{x^2 + 1 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2}}{\frac{x}{(x^2 + 1)}} = \frac{(x^2 + 1)(1 - x^2)}{x(x^2 + 1)^2} = \frac{1 - x^2}{x(x^2 + 1)} \Rightarrow y'_{(1)} = \frac{1 - 1}{1(1 + 1)} = 0$$

(۳)-۴۷

$$y' = x^x \left(\ln x + x \cdot \frac{1}{x} \right) = x^x (\ln x + 1) \xrightarrow{x=2} y' = 2^2 (\ln 2 + 1) = 4(\ln 2 + 1)$$

(۳)-۴۸

$$\Delta y \approx f(x + \Delta x) - f(x) = 2(x + \Delta x)^2 + 3(x + \Delta x) + 1 - 2x^2 - 3x - 1$$

$$\Delta y \approx 2x^2 + 4x \cdot \Delta x + 2(\Delta x)^2 + 3x + 3\Delta x + 1 - 2x^2 - 3x - 1$$

$$\Delta y \approx 4x \cdot \Delta x + 2(\Delta x)^2 + 3\Delta x \xrightarrow[\Delta x \rightarrow 0]{x=1} \Delta y \approx 4(1)(0,1) + 2(0,1)^2 + 3(0,1) = 0,72$$

(۴)-۴۹

$$dy = (4x + 3) \cdot dx = [(4(1) + 3)(0,1) = 0,7$$

(۳)-۵۰

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x + 5y - 2}{5x - 4y + 2} \xrightarrow{x=y=1} \frac{dy}{dx} = -\frac{2 + 5 - 2}{5 - 4 + 2} = -5$$

۵۱- (۳)

$$y' = \ln x + 1 \Rightarrow y'_{(1)} = m = \ln 1 + 1 = 1$$

$$y - 0 = 1(x - 1) \Rightarrow y = x - 1, \text{ محور طول‌ها, } \xrightarrow{y=0} 0 = x - 1 \Rightarrow x = 1$$

۵۲- (۴)

$$y' = \frac{(x+1) - x}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2} \Rightarrow y'' = \frac{-2(x+1)}{(x+1)^3} = \frac{-2}{(x+1)^2}$$

y'' به ازای هیچ مقداری از x در دامنه تعریفش برابر صفر نخواهد شد تا تغییر علامت دهد.

۵۳- (۱)

$$y' = e^x - 0 \Rightarrow y' = e^x \Rightarrow e^x > 0 \Rightarrow \text{تابع همواره صعودی و فاقد نقطه بحرانی است}$$

۵۴- (۲)

$$y' = 4x^3 - 32 \Rightarrow 4x^3 - 32 = 0 \Rightarrow x^3 = 8 \Rightarrow x = 2 \text{ طول نقطه بحرانی}$$

$$y'' = 12x^2 \Rightarrow y''_{(2)} = 12(2)^2 = 48 > 0 \Rightarrow \text{نوع نقطه می‌نیم است}$$

۵۵- (۴)

$$y' = 2e^{2x} + 2 \Rightarrow \text{شیب خط مماس} = y'_{(0)} = 2e^0 + 2 = 4$$

۵۶- (۳)

$$y' = (x+1)^x \left(\ln(x+1) + x \cdot \frac{1}{x+1} \right) \Rightarrow y'_{(1)} = 2 \left(\ln 2 + \frac{1}{2} \right) = 2 \ln 2 + 1$$

۵۷- (۱)

$$y' = \ln x + 1 \Rightarrow \ln x + 1 = 0 \Rightarrow \ln x = -1 \Rightarrow x = e^{-1} = \frac{1}{e} \text{ طول می‌نیم}$$

۵۸- (۳) توابع درجه دوم به فرم کلی $y = ax^2 + bx + c$ فاقد نقطه عطف‌اند.

۵۹- (۲)

$$dy = (2x + 2).dx \xrightarrow{x=0, dx=1} dy = (0 + 2)(0/1) = 0/2$$

۶۰- (۱) با توجه به فرمول قسمت (۵-۱۱).

۶۱- (۲)

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = 6x^2 - 4x \Rightarrow x'_y = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{6x^2 - 4x} \Rightarrow \left(\frac{dx}{dy} \right)_{x=1} = \frac{1}{2}$$

یا

$$2x^2 - 2x^2 + 1 - y = 0 \Rightarrow \frac{dx}{dy} = -\frac{-1}{6x^2 - 4x} \Rightarrow \left(\frac{dx}{dy} \right)_{x=1} = \frac{1}{2}$$

۶۲- (۴)

$$y' = 2e^{2x} \Rightarrow y'' = 2^2 e^{2x} \Rightarrow y''' = 2^3 e^{2x} \Rightarrow \dots \Rightarrow y^{(n)} = 2^n e^{2x} \Rightarrow y^{(n)}_{(0)} = 2^n e^0 = 2^n$$

۶۳- (۱)

$$y' = -2x + 4 \Rightarrow -2x + 4 = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ (طول نقطه مماس)}$$

$$y = -4 + 8 = 4 \Rightarrow y = 4 \text{ مختصات نقطه مماس}$$

بدیهی است شیب خط رسم شده برابر صفر است.

۶۴- (۲)

$$dy = (-2x + 4)dx \xrightarrow{x=1, dx=1} dy = (-2 + 4)(1) = 2$$

۶۵- (۳)

$$y' = \frac{x-1-x-1}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2} < 0 \text{ تابع همواره نزولی است}$$

$$y'' = \frac{2(x-1)}{(x-1)^3} = \frac{2}{(x-1)^2} \Rightarrow \text{در فاصله } [1, 2) \text{ همواره مثبت است، پس تابع فوق محدب است}$$

۶۶- (۴)

$$y' = \ln x + 1 + \frac{2}{x^2} \Rightarrow y'' = \frac{1}{x} - \frac{4}{x^3} = \frac{x^2 - 4}{x^3} = 0 \Rightarrow x = \pm 2$$

۶۷- (۴)

$$x^2 + y^2 - 2xy - y + x = 0, y' = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{2x - 2y + 1}{2y - 2x - 1} \xrightarrow{x=y=1} y' = 1$$

۶۸- (۳)

$$y' = e^x + xe^x \Rightarrow e^x(1+x) = 0 \Rightarrow e^x > 0, x = -1$$

$$\frac{x}{y' = e^x(1+x)} \left| \begin{array}{ccc} -\infty & -1 & +\infty \\ - & 0 & + \end{array} \right. \Rightarrow \text{در فاصله } (-1, +\infty) \text{ صعودی است}$$

۶۹- (۱)

$$y' = e^{rx} + 2xe^{rx} \Rightarrow e^{rx}(1+2x) = 0 \Rightarrow e^{rx} \neq 0, 1+2x = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

۷۰- (۴)

$$y' = 3x^2 - 9 \Rightarrow 3x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

$$y'' = 6x \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{3} \Rightarrow y'' = 6\sqrt{3} > 0 & \text{طول نقطه min} \\ x = -\sqrt{3} \Rightarrow y'' = -6\sqrt{3} < 0 & \text{طول نقطه max} \end{cases}$$

۷۱- (۱)

$$y' = \frac{1}{x+1} \Rightarrow y'' = \frac{-1}{(x+1)^2} \xrightarrow{x=0} y'' = \frac{-1}{(0+1)^2} = -1$$

۷۲- (۱)

$$y' = x^{x+2} \left(\ln x + (x+2) \cdot \frac{1}{x} \right) \xrightarrow{x=1} y' = \left(\ln 1 + \frac{3}{1} \right) = 0 + 3 = 3$$

۷۳- (۲)

$$y' = e^x - 2 \Rightarrow y'' = e^x$$

عبارت e^x در فاصله $[0, 1]$ همواره مثبت است. بنابراین تابع فوق محدب است.

(۲)-۷۴

$$y' = \ln x + 1 \Rightarrow \ln x + 1 = 0 \Rightarrow \ln x = -1 \Rightarrow x = e^{-1}$$

$$y'' = \frac{1}{x} \xrightarrow{x=e^{-1}} y'' = \frac{1}{1/e} = e > 0 \text{ است نقطه min}$$

$$y = e^{-1} \ln e^{-1} = -e^{-1} \times 1 = -e^{-1} \Rightarrow \min(e^{-1}, -e^{-1})$$

(۴)-۷۵

$$y = e^{2x} \Rightarrow y' = 2e^{2x} \Rightarrow y'' = 2^2 e^{2x} \Rightarrow \dots \Rightarrow y^{(n)} = 2^n e^{2x} = 2^2 e^{2x} \xrightarrow{y^{(5)}} y^{(5)} = 2^2$$

(۱)-۷۶

$$dy = \frac{1+x-x}{(1+x)^2} dx = \frac{dx}{(1+x)^2} \xrightarrow[\Delta x \approx dx = 0.1]{x=1} dy = \frac{0.1}{4} = 0.025$$

(۲)-۷۷

$$y' = 3x^2 \Rightarrow y'' = 6x \Rightarrow 6x = 0 \Rightarrow x = 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$y' = 6x$	$-$	0	$+$
	مقعر		محدب

(۳)-۷۸

بازای مقادیر مختلف x تابع $f'(x)$ متغیر است

$$f(x) = x - \sin x \Rightarrow f'(x) = 1 - \cos x \Rightarrow 0 \leq f'(x) \leq 2$$

$$f(x) = -x + \sin x \Rightarrow f'(x) = -1 + \cos x \Rightarrow -2 \leq f'(x) \leq 0$$

$$f(x) = -x + 2 \sin x \Rightarrow f'(x) = -1 + 2 \cos x \Rightarrow -3 \leq f'(x) \leq 1$$

(۲)-۷۹ به تست شماره ۶۹ مراجعه کنید.

(۴)-۸۰

$$dx = 1, x = 0$$

$$dy = f'(x)dx = (2 + 1^0 e^{1x})dx = (2 + 1^0 e^0)(1) \Rightarrow dy = 3$$

(۲)-۸۱

$$y'_x = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{2x+y-2\ln y - \frac{2y}{x}}{x+2y-\frac{2x}{y}-2\ln x} \xrightarrow{x=y=1} y'_x = -\frac{2+1-0-\frac{2}{1}}{1+2-\frac{2}{1}-0} = -1$$

(۴)-۸۲

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left(\frac{1}{x} - 1\right) e^{2x} - 2e^{2x}(\ln x - x)}{e^{2x}} \xrightarrow{x=1} \frac{dy}{dx} = \frac{0 - 2e^2(0 - 1)}{e^2} = \frac{2e^2}{e^2} = \frac{2}{e^2}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{1}{dy/dx} \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{1}{2/e^2} = \frac{1}{2} e^2$$

(۴)-۸۳

$$y' = e^x + 2 \Rightarrow e^x + 2 > 0$$

$$y = f(1) = c + 2, y = f(-1) = e^{-1} - 2 = \frac{1}{e} - 2$$

(۱)-۸۴

$$y' = 2x^2 + 1 \Rightarrow y'' = 4x = 0 \Rightarrow x = 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y''	$-$	0	$+$
	تحدب		
	تقعر		

(۲)-۸۵

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = 2(x + \Delta x)^2 - (x + \Delta x) + 3 - 2x^2 + x - 3$$

$$\Delta y = 2x^2 + 4x \cdot \Delta x + 2(\Delta x)^2 - x - \Delta x + 3 - 2x^2 + x - 3$$

$$\Delta y = \Delta x(4x + 2\Delta x - 1) = 0,1(4 + 0,2 - 1) = 0,32$$

(۴)-۸۶

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2} \xrightarrow{x=e^2} \frac{dy}{dx} = \frac{1 - \ln e^2}{e^2} = \frac{1 - 2}{e^2} = -e^{-2}$$

(۳)-۸۷

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x + y - 2}{-2y + x} \xrightarrow{x=2, y=1} \frac{dy}{dx} = -\frac{2 + 1 - 2}{-2 + 2} = -\infty$$

(۱)-۸۸

$$dy = \left(\frac{2}{1 + 4x^2} - e^x \right) dx \xrightarrow{x=0} dy = (2 - e^0) dx = 2 dx$$

(۳)-۸۹

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = -\frac{1}{u^2} e^{1/u} \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 2}}, x = 2 \Rightarrow u = \sqrt{4 - 2} = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = -e^1 \cdot \frac{2}{\sqrt{4 - 2}} = -2e$$

(۲)-۹۰

$$y' = \ln x + 1 \Rightarrow \text{شیب خط مماس} = y'(1) = \ln 1 + 1 = 1$$

$$y = 1 \ln 1 = 0 \Rightarrow \text{نقطه} (1, 0), y - 0 = 1(x - 1) \Rightarrow y = x - 1 \text{ معادله خط مماس}$$

(۱)-۹۱

$$y' = \frac{(x - 2) - (x + 1)}{(x - 2)^2} = \frac{-3}{(x - 2)^2} \Rightarrow \text{ضریب زاویه خط قائم} = -\frac{1}{y'(2)} = 3$$

(۲)-۹۲

$$y' = \ln x + 1 - 2x \Rightarrow y'' = \frac{1}{x} - 2 = \frac{1-2x}{x} \Rightarrow \frac{1-2x}{x} = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

(۳)-۹۳

$$y' = 8x^7 + 1 \Rightarrow 8x^7 + 1 = 0 \Rightarrow x^7 = -\frac{1}{8} \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \text{ طول نقطه بحرانی}$$

$$y'' = 56x^6 \xrightarrow{x=-1/2} y'' = 56 \left(-\frac{1}{2}\right)^6 = 6 > 0 \Rightarrow \text{نوع نقطه min است}$$

(۳)-۹۴

$$y' = e^x, e^x > 0 \quad \text{تابع همواره صعودی و فاقد نقطه بحرانی است}$$

(۱)-۹۵

$$x = 0 \Rightarrow y^7 = 8 \Rightarrow y = 2, \frac{dy}{dx} = \frac{-(3x^7 + y)}{7y^7 + x} \xrightarrow{x=0, y=2} \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{6}$$

(۳)-۹۶

$$x = 0 \Rightarrow y = e^0 + 1 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow \text{نقطه } (0, 2)$$

$$y' = 3e^{7x} \Rightarrow m = y'_{(-)} = 3e^0 = 3, y - 2 = 3(x - 0) \Rightarrow y = 3x + 2$$

(۴)-۹۷

$$y' = 2e^{7x} + 1 \Rightarrow y'' = 14e^{7x} \Rightarrow \dots \Rightarrow y^{(5)} = 2^5 e^{7x} \xrightarrow{x=0} y^{(5)} = 32$$

(۲)-۹۸

$$\frac{dx}{dy} = \frac{-7 \sin 7y / 7 \sqrt{\cos 7y}}{\sqrt{\cos 7y}} = \frac{-7 \sin 7y}{7 \cos 7y} = -\tan 7y \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\tan 7y} = -\cot 7y$$

(۱)-۹۹

$$y' = 2x \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$x = 0 \Rightarrow y = 0 + 1 = 1, x = 2 \Rightarrow y = 4 + 1 = 5 \quad \text{مقدار ماکزیم}$$

(۴)-۱۰۰

$$y' = (x+1)^x \left[\ln(x+1) + x \cdot \frac{1}{x+1} \right] \Rightarrow y'_{(-)} = 1(\ln 1 + 0) = 0$$

(۱)-۱۰۱

$$y' = \ln x + 1 \Rightarrow y'' = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{1}{x} \neq 0 \Rightarrow \text{نقطه عطف ندارد}$$

(۲)-۱۰۲

$$y' = e^x + xe^x \Rightarrow e^x(1+x) = 0 \Rightarrow e^x > 0, 1+x = 0 \Rightarrow x = -1$$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$	$\Rightarrow$	به ازای $x > -1$ صعودی است
y'	$-$	0	$+$		

(۴)-۱۰۳

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)^2 - f(x+h) - f(x)^2 + f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(\lambda x + f h - f)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (\lambda x + f h - f) = \lambda x - f \xrightarrow{x=1} \lambda - f = 2\end{aligned}$$

بنابراین

$$y = f x^2 - f x \Rightarrow y' = \lambda x - f \xrightarrow{x=1} y' = 2$$

(۴)-۱۰۴ برای توضیح بیشتر به قسمت (۵-۱۱) مراجعه کنید.

$$\begin{aligned}y = f(x) &= (\tan x - 1)^f + 2(\tan x - 1)^f, g(x) = x^f \\ y'_{g(x)} &= y'_{x^f} = \frac{f(1 + \tan^f x)(\tan x - 1)^f + f(1 + \tan^f x)(\tan x - 1)^f}{2x} \\ x = \frac{\pi}{f} &\Rightarrow y'_{x^f} = \frac{f(1 + 1)(1 - 1)^f + f(1 + 1)(1 - 1)^f}{2 \times \frac{\pi}{f}} = 0.\end{aligned}$$

(۳)-۱۰۵

$$y = x^f + 2x^f \Rightarrow f(x, y) = x^f + 2x^f - y \Rightarrow x'_y = -\frac{-1}{f x^{f-1} + f x^{f-1}} \xrightarrow{x=1} x'_y = \frac{1}{f}$$

(۱)-۱۰۶

$$\begin{aligned}x = 2 \xrightarrow{\text{روی محور طول‌ها}} y = 0 \Rightarrow 0 = \lambda + f a + 2 + c \Rightarrow f a + c = -1^0 * \\ y = f \xrightarrow{\text{روی محور عرض‌ها}} x = 0 \Rightarrow f = c, * f a + f = -1^0 \Rightarrow a = -f \Rightarrow a.c = -2f\end{aligned}$$

(۲)-۱۰۷

$$\begin{aligned}y' &= \left(\frac{1}{\sqrt{f\pi}} \right) (-x) e^{-x^f/f} \Rightarrow y'' = \left(-\frac{1}{\sqrt{f\pi}} \right) e^{-x^f/f} + \left(\frac{1}{\sqrt{f\pi}} \right) (x^f) e^{-x^f/f} \Rightarrow \\ y'' = 0 &\Rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{f\pi}} \right) e^{-x^f/f} (-1 + x^f) = 0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{f\pi}} e^{-x^f/f} > 0, -1 + x^f = 0 \Rightarrow x = \pm 1\end{aligned}$$

(۴)-۱۰۸ چون منحنی $y = e^{fx}$ محور عرض‌ها را قطع می‌کند، بنابراین $x = 0$ است. پس:

$$\begin{aligned}y = c' = 1 \Rightarrow \text{نقطه تقاطع با محور } y \text{ ها} \\ y' = 2e^{fx} \Rightarrow m = y'_{(0)} = 2e^0 = 2, y - 1 = 2(x - 0) \Rightarrow y - 2x - 1 = 0\end{aligned}$$

(۴)-۱۰۹

$$dy = \frac{1}{1+x^f} e^{\text{Arc tan } x} . dx \xrightarrow{x=1} dy = \frac{1}{f} e^{\pi/f} . dx$$

(۱)-۱۱۰

$$\begin{aligned}\Delta y \approx f(x + \Delta x) - f(x) &= \frac{(x + \Delta x) + 1}{x + \Delta x} - \frac{x + 1}{x} \\ \Delta y \approx \frac{(1 + 0/1) + 1}{1 + 0/1} - \frac{1 + 1}{1} &= \frac{2/1}{1/1} - 2 = \frac{2/1 - 2/1}{1/1} = \frac{-0/1}{1/1} = -\frac{1}{1/1}\end{aligned}$$

(۳)-۱۱۱

$$y'_x = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{y + ye^{xy} - 2}{x + xe^{xy} + 1} \xrightarrow{x=y=1} y'_x = -\frac{-2}{1} = 2$$

(۴)-۱۱۲

$$y' = (x+1)^x \left[\ln(x+1) + x \cdot \frac{1}{x+1} \right] \Rightarrow y'_{(1)} = 2 \left(\ln 2 + \frac{1}{2} \right) = 2 \ln 2 + 1$$

(۳)-۱۱۳ با توجه به تساوی‌های زیر، تنها در گزینه سوم $\Delta y / \Delta x$ مقدار ثابتی است.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x, \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{x^2}, \frac{\Delta y}{\Delta x} = a, \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x}$$

(۳)-۱۱۴

$$y' = 2 \times \frac{1}{e} e^{2x} \Rightarrow y'' = 2^2 \times \frac{1}{e} e^{2x} \Rightarrow \dots \Rightarrow y^{(n)} = 2^n \times \frac{1}{e} e^{2x}$$

$$y^{(n)}_{(1)} = 2^n \times \frac{1}{e} e^2 = \frac{2^n}{e} = 2^{n-1}$$

(۱)-۱۱۵

$$y' = 2x^2 - 2 \Rightarrow 2x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$y'' = 4x \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y'' = 4 > 0 & \text{نوع نقطه می‌نیم است} \\ x = -1 \Rightarrow y'' = -4 < 0 & \text{نوع نقطه ماکزیمم است} \end{cases}$$

(۲)-۱۱۶

$$y'_x \times x'_y = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} = 1$$

(۳)-۱۱۷

$$y^{(n)} = \frac{(-c)^{n-1} n! (ad - bc)}{(cx + d)^{n+1}}, y^{(n)} = \frac{(1)^{n-1} n! (1 - 0)}{(1 - x)^{n+1}} = \frac{n!}{(1 - x)^{n+1}} \xrightarrow{x=0} y^{(n)} = n!$$

(۴)-۱۱۸

$$y' = (x^2 + 1)^x \left[\ln(x^2 + 1) + x \cdot \frac{2x}{x^2 + 1} \right] \xrightarrow{x=1} y' = 2 \left[\ln 2 + \frac{2}{2} \right] = 2 \ln 2 + 2$$

(۳)-۱۱۹

$$y' = 2x \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \notin [1, 2]$$

$$x = 1 \Rightarrow y = 1 + 1 = 2, x = 2 \Rightarrow y = 2^2 + 1 = 5 \Rightarrow y = 2 \text{ مقدار می‌نیم است}$$

(۱)-۱۲۰

$$dy = \left[e^x + xe^x - \frac{1}{(x+1)^2} \right] dx \xrightarrow{x=0} dy = \left(e^0 + 0 \cdot e^0 - \frac{1}{(0+1)^2} \right) dx = 0$$

(۲)-۱۲۱

$$y'_x = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{y}{x + 2y} \xrightarrow{(1,1)} y'_x = -\frac{1}{1+2} = -\frac{1}{3}$$

۱۲۲- (۲) با توجه به تست شماره ۱۱۷ داریم:

$$y^{(n)} = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}} \Rightarrow y^{(10)} = \frac{10!}{(1-x)^{11}} \rightarrow y^{(10)} = \frac{10!}{(1-2)^{11}} = -(10!) \quad (2)-122$$

$$\Delta y \approx f(x + \Delta x) - f(x) = \frac{x + \Delta x}{(x + \Delta x) + 1} - \frac{x}{x + 1} = \Delta y \approx \frac{0.2}{1.2} - 0 = \frac{1}{6}$$

$$dy = \frac{x + 1 - x}{(x + 1)^2} \cdot dx \Rightarrow dy = \frac{1}{1^2} (0.2) = \frac{2}{10}$$

$$\Delta y - dy = \frac{1}{6} - \frac{2}{10} = \frac{10 - 12}{60} = -\frac{2}{60} = -\frac{1}{30} \quad (3)-124$$

$$y' = 4x^7 \Rightarrow y'' = 28x^6 > 0 \Rightarrow \text{همواره محدب}$$

(2)-125

$$f'(x) = 1 + \cos x \geq 0 \quad f'(x) = -2 + \cos x \leq -1$$

$$f'(x) = 1 - \cos x \geq 0 \quad f'(x) = -1 - 2 \sin x \Rightarrow -2 \leq f'(x) \leq 1$$

(1)-126

$$y' = e^{ax} + axe^{ax} \Rightarrow y'' = ae^{ax} + ae^{ax} + a^2 xe^{ax} \Rightarrow$$

$$e^{ax}(2a + a^2) = 0 \Rightarrow e^{ax} > 0, a(2 + a) = 0 \Rightarrow a = 0, a = -2$$

(4)-127

$$dx = 1, x = 0$$

$$dy = f'(x)dx = (e^{1x} + 2xe^{1x} + 5)dx = (e^0 + 0 + 5)(1) = 6$$

(1)-128

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(2e^{1x} - 2)(x + 2) - (e^{1x} - 2x)}{(x + 2)^2} \xrightarrow{x=0} \frac{dy}{dx} = \frac{0 - (1 - 0)}{4} = -\frac{1}{4}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{dy/dx} = \frac{1}{-\frac{1}{4}} = -4$$

(3)-129

$$y = e^{1x} + x \Rightarrow y' = 2e^{1x} + 1 \Rightarrow y'' = 2e^{1x} > 0$$

(2)-130

$$y' = \frac{1}{x} + 1 = \frac{1+x}{x}$$

نقطه بحرانی تابع به نقطه‌ای اطلاق می‌شود که در آن نقطه مشتق صفر گردد و یا آن‌که مشتق وجود نداشته باشد. بنابراین بازای $x = -1$ مشتق صفر می‌شود و بازای $x = 0$ مشتق وجود ندارد:

$$y = f(0) = \ln 0 + 0 = \text{نامعین}, \quad y = f(1) = \ln 1 + 1 = 1$$

۱۳۱- (۳)

$$NP = TR - TC = Ax - x^2 - 2x - 1 = -x^2 + 6x - 1$$

$$\frac{dNP}{dx} = 0 \Rightarrow -2x + 6 = 0 \Rightarrow x = 3$$

۱۳۲- (۱) طبق بحث قسمت (۵-۶-۷):

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (x + 2y)^x \left[\ln(x + 2y) + x \cdot \frac{1}{x + 2y} \right]$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_{x=y=1} = (1 + 2) \left[\ln 3 + \frac{1}{3} \right] = 3 \ln 3 + 1$$

پاسخ تشریحی تست‌های آزمون کارشناسی ارشد

«انتگرال»

۱- (۴)

$$u = \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x}, I = \int \frac{du}{u} = \ln u + c \Rightarrow I = \ln(\ln x) + c$$

۲- (۱)

$$u = 2x + 5 \Rightarrow du = 2dx, dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x$$

$$\int u dv = uv - \int v du = (2x + 5)e^x - \int 2e^x dx = (2x + 5)e^x - 2e^x$$

$$I = \int_1^2 (2x + 5)e^x dx = (2x + 5)e^x - 2e^x \Big|_1^2 = (4e - 2e) - (5e - 2e) = 2e - 3$$

۳- (۳)

$$I = \int \frac{dt}{t(t+1)} = \int \frac{t+1-t}{t(t+1)} dt = \int \frac{t+1}{t(t+1)} dt - \int \frac{t}{t(t+1)} dt = \int \frac{dt}{t} - \int \frac{dt}{t+1}$$

$$I = \ln |t| - \ln |t+1| + c = \ln \left| \frac{t}{t+1} \right| + c$$

۴- (۱)

$$y'' = f''(x) = 2, f'(x) = \int f''(x) dx = \int 2 dx \Rightarrow f'(x) = 2x + c$$

در نقطه $x=1$ مین است

$$f'(1) = 0 \Rightarrow 2 + c = 0 \Rightarrow c = -2 \Rightarrow f'(x) = 2x - 2$$

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int (2x - 2) dx = x^2 - 2x + c' \Rightarrow f(x) = x^2 - 2x + c'$$

مختصات نقطه $\min$ را در تابع

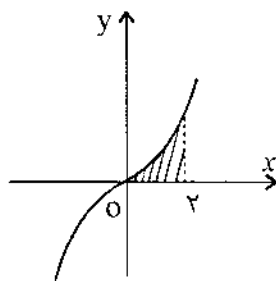
$$f(1) = 1 - 2 + c' = 2 \Rightarrow c' = 3 \Rightarrow y = f(x) = x^2 - 2x + 3$$

قرری می‌دهیم

۵- (۲)

$$f(x) = \int_{-x}^x e^{-t^2} dt \Rightarrow f'(x) = \frac{d}{dx} \int_{-x}^x e^{-t^2} dt \Rightarrow f'(x) = e^{-x^2}$$

(۱)-۶

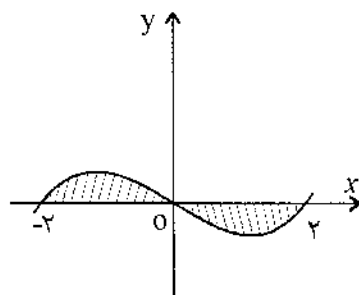


$$S = \int_0^2 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^2 = \frac{8}{3} \Rightarrow S = \frac{8}{3}$$

(۱)-۷

$$u = \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x}, y = \int u^2 du = \frac{1}{3} u^3 + c \Rightarrow y = \frac{1}{3} (\ln x)^3 + c$$

(۱)-۸



$$y = 0 \Rightarrow x^2 - x^3 = 0 \Rightarrow x(x^2 - x) = 0 \Rightarrow x = 0, x = \pm 1$$

$$S = \int_{-1}^1 (x^2 - x^3) dx + \int_0^1 (x^2 - x^3) dx = 2 \int_0^1 (x^2 - x^3) dx$$

$$S = 2 \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^1 = 2 \times \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$$

(۳)-۹

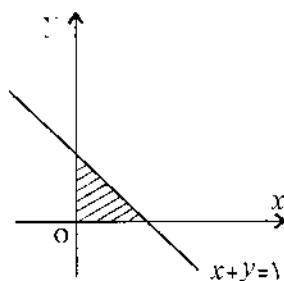
$$\begin{cases} x + y = 1 \Rightarrow x = 1 - y \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq y \leq 1 \\ 0 \leq x \leq 1 - y \end{cases}$$

$$\int_0^1 \int_0^{1-y} \sin \frac{x-y}{x+y} dx dy = \int_0^1 \int_0^{1-y} \sin(x-y) dx dy$$

$$= \int_0^1 [-\cos(x-y)]_0^{1-y} dy = \int_0^1 (-\cos(1-y-y) + \cos(0-y)) dy$$

$$= \int_0^1 (-\cos(1-2y) + \cos y) dy = \left[-\frac{1}{2} \sin(1-2y) + \sin y \right]_0^1 = -\frac{1}{2} \sin(1-2) + \sin 1 - \left(-\frac{1}{2} \sin(1-0) + \sin 0 \right)$$

$$= -\frac{1}{2} \sin(-1) + \sin 1 - \frac{1}{2} \sin 1 - \sin 0 = -\frac{1}{2} \sin 1 + \sin 1 - \frac{1}{2} \sin 1 + 0 = 0$$



(۱)-۱۰

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \text{Arc tan } x \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) = \pi$$

(۴)-۱۱

$$u = \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x}, dv = dx \Rightarrow v = x$$

$$I(x) = \int \ln x dx = uv - \int v du = x \ln x - \int x \frac{dx}{x} = x \ln x - x + c$$

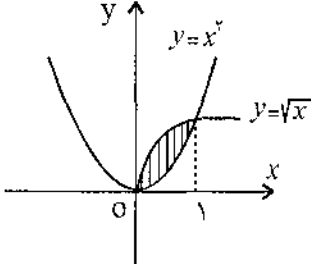
$$I(1) = \ln(1) - 1 + 1 = 0$$

(۴)-۱۲

$$G'(x) = \frac{d}{dx} \int_1^x \frac{1}{1+t^2} dt \Rightarrow G'(x) = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow G'(1) = \frac{1}{2}$$

$$G(1) = \int_1^1 \frac{1}{1+t^2} dt = 0 \Rightarrow G'(1) - G(1) = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$$

(۳)-۱۳

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = \sqrt{x} \end{cases} \Rightarrow x^2 = \sqrt{x} \Rightarrow x^4 = x \Rightarrow x(x^3 - 1) \Rightarrow x = 0, x = 1$$


$$S = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx = \left(\frac{2}{3} x^{3/2} - \frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

(۲)-۱۴

$$I = \int_0^1 \int_{y=x}^{y=x^2} e^{-x^2} dy dx = \int_0^1 \left(e^{-x^2} y \right) \Big|_{y=x}^{y=x^2} dx = \int_0^1 x e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} e^{-x^2} \Big|_0^1 \Rightarrow$$

$$I = -\frac{1}{2} e^{-1} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{e} - 1 \right)$$

(۴)-۱۵

$$\begin{aligned} d(x^2 - 1) &= 2x dx, \int_1^2 (x^2 - 2x + 2) d(x^2 - 1) = \int_1^2 (x^2 - 2x + 2) 2x dx \\ &= \int_1^2 (2x^3 - 4x^2 + 4x) dx = \left[\frac{1}{2} x^4 - \frac{4}{3} x^3 + 2x^2 \right]_1^2 = \frac{11}{6} \end{aligned}$$

(۴)-۱۶

$$I(x) = \int_1^x e^{-t^2} dt \Rightarrow I'(x) = \frac{d}{dx} \int_1^x e^{-t^2} dt \Rightarrow I'(x) = e^{-x^2}$$

$$I'(\sqrt{e}) = e^{-e}, I'(\sqrt{e}) = e^{-e} \Rightarrow I'(\sqrt{e}) - I'(\sqrt{e}) = e^{-e} - e^{-e}$$

(۳)-۱۷

$$u = \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x}, dv = x^2 dx \Rightarrow v = \frac{1}{3} x^3$$

$$I = \int x^2 \ln(x) dx = uv - \int v du = \frac{1}{3} x^3 \ln x - \int \frac{1}{3} x^3 \frac{dx}{x}$$

$$I = \frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{12} x^3 + c \xrightarrow{c=0, x=1} I = -\frac{1}{12} + 0 = -\frac{1}{12}$$

(۳)-۱۸

$$u = \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x}, dv = x^2 dx \Rightarrow v = \frac{1}{3} x^3$$

$$f(x) = \int x^2 \ln x dx = \frac{1}{3} x^3 \ln x - \int \frac{1}{3} x^3 \frac{dx}{x} = \frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{12} x^3 + c$$

$$\xrightarrow{c=0} f(1) = \frac{1}{3} \ln(1) - \frac{1}{12} + 0 \Rightarrow f(1) = -\frac{1}{12}$$

(۱)-۱۹

$$\begin{aligned}
 u &= \cos x \Rightarrow du = -\sin x dx, dv = e^{\delta x} dx \Rightarrow v = \frac{1}{\delta} e^{\delta x} \\
 \int e^{\delta x} \cos x dx &= \frac{1}{\delta} e^{\delta x} \cos x - \int -\frac{1}{\delta} e^{\delta x} \sin x dx \\
 u &= \sin x \Rightarrow du = \cos x dx, dv = e^{\delta x} dx \Rightarrow v = \frac{1}{\delta} e^{\delta x} \\
 \int e^{\delta x} \cos x dx &= \frac{1}{\delta} e^{\delta x} \cos x + \frac{1}{\delta} \left(\frac{1}{\delta} e^{\delta x} \sin x - \int \frac{1}{\delta} e^{\delta x} \cos x dx \right) \\
 \int e^{\delta x} \cos x dx &= \frac{1}{\delta} e^{\delta x} \cos x + \frac{1}{\delta^2} e^{\delta x} \sin x - \frac{1}{\delta^2} \int e^{\delta x} \cos x dx \\
 \int e^{\delta x} \cos x dx + \frac{1}{\delta^2} \int e^{\delta x} \cos x dx &= \frac{1}{\delta^2} e^{\delta x} \left(\cos x + \frac{1}{\delta} \sin x \right) \\
 \frac{1}{\delta^2} \int e^{\delta x} \cos x dx &= \frac{1}{\delta^2} e^{\delta x} \left(\cos x + \frac{1}{\delta} \sin x \right) \\
 \int e^{\delta x} \cos x dx &= \frac{\delta}{\delta^2} e^{\delta x} \left(\cos x + \frac{1}{\delta} \sin x \right) = \frac{1}{\delta} e^{\delta x} \left(\sin x + \frac{\delta}{1} \cos x \right) + c
 \end{aligned}$$

(۴)-۲۰

$$\int_{-1}^1 \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{-1}^1 x(1-x^2)^{-1/2} dx = -\frac{1}{2} \int_{-1}^1 -2x(1-x^2)^{-1/2} dx = -(1-x^2)^{1/2} \Big|_{-1}^1 = -1 - 0 = -1$$

(۱)-۲۱

$$\begin{aligned}
 x &= 1 \Rightarrow y = 1, y = x^2 \Rightarrow y' = 2x^1 \Rightarrow m = 2 \times 1 = 2 \\
 \text{معادله خط مماس: } y - 1 &= 2(x - 1) \Rightarrow y = 2x - 1 \\
 \begin{cases} y = x^2 \\ y = 2x - 1 \end{cases} &\Rightarrow x^2 = 2x - 1 \Rightarrow (x - 1)(x^1 + x - 2) = 0 \Rightarrow x = 1, x = -1 \\
 S &= \int_{-1}^1 (x^2 - 2x + 1) dx = \left[\frac{1}{3} x^3 - \frac{2}{2} x^2 + x \right]_{-1}^1 = \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

(۴)-۲۲

$$\begin{aligned}
 I(x) &= \int \frac{x+1}{\sqrt[3]{(x^2+2x)}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2(x+1)}{\sqrt[3]{(x^2+2x)}} dx \\
 I(x) &= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} (x^2+2x)^{2/3} + c \xrightarrow{c=0} I(-1) = \frac{2}{3} (1-2)^{2/3} = \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

(۳)-۲۳

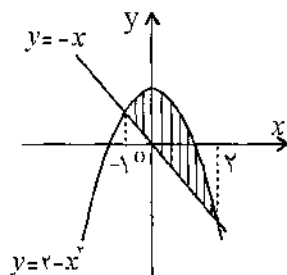
$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+e^{-x}} &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^{\infty} \frac{dx}{1+e^{-x}} = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^{\infty} \frac{e^x dx}{1+e^x} = \lim_{a \rightarrow -\infty} [\ln(1+e^x)]_a^{\infty} \\
 \lim_{a \rightarrow -\infty} [\ln 2 - \ln(1+e^a)] &= \ln 2 - \ln 1 = \ln 2
 \end{aligned}$$

تذکر: وقتی $e^a \rightarrow 0, a \rightarrow -\infty$

(۴)-۲۴

$$\begin{cases} y = 2 - x^2 \\ y = -x \end{cases} \Rightarrow 2 - x^2 = -x \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = -1, x = 2$$

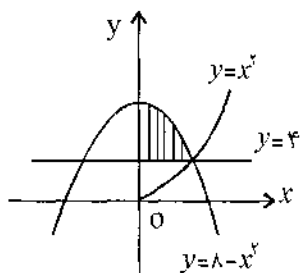
$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^2 [(2 - x^2) - (-x)] dx = \int_{-1}^2 (2 - x^2 + x) dx \\ &= 2x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 \Big|_{-1}^2 = \frac{9}{2} \end{aligned}$$



(۴)-۲۵ با توجه به فرمول شماره ۳۱ قسمت (۶-۴-۱) داریم:

$$\int_0^2 \frac{dx}{2\delta - x^2} = \frac{1}{2 \times \delta} \ln \left| \frac{\delta + x}{\delta - x} \right| \Big|_0^2 = \frac{1}{10} \ln \left| \frac{8}{2} \right| - \frac{1}{2} \ln |1| = \frac{1}{10} \ln 2 = \frac{1}{\delta} \ln 2$$

(۱)-۲۶



$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 4 - x^2 \end{cases} \Rightarrow x^2 = 4 - x^2 \Rightarrow 2x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$$

$x = 2$ قابل قبول است و در نتیجه $y = 4$ می‌باشد.

$$S = \int_{-2}^2 (4 - x^2 - x^2) dx = \int_{-2}^2 (4 - 2x^2) dx = 4x - \frac{2}{3}x^3 \Big|_{-2}^2 = \frac{16}{3}$$

(۱)-۲۷

$$u = x^2 + 2x \Rightarrow du = (2x + 2) dx \Rightarrow \frac{du}{2} = (x + 1) dx$$

$$x = 1 \Rightarrow u = 1 + 2 = 3, x = 0 \Rightarrow u = 0 + 0 = 0$$

$$\int_0^3 \frac{du}{2\sqrt{u}} = \frac{1}{2} \int_0^3 u^{-1/2} du = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1 - 1/2} u^{1/2+1} = u^{1/2} \Big|_0^3 = \sqrt{3}$$

(۲)-۲۸

$$k(t) = \int I(t) dt = \int t e^t dt, u = t \Rightarrow du = dt, dv = e^t dt \Rightarrow v = e^t$$

$$\int t e^t dt = t e^t - \int e^t dt = t e^t - e^t = e^t(t - 1) + c \rightarrow k(0) = e^0(0 - 1) + c = 0 \Rightarrow c = 1$$

$$k(t) = t e^t - e^t + 1$$

(۴)-۲۹

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{t^2}{t+1} dt &= \int_1^2 \left(t - \frac{t}{t+1} \right) dt = \int_1^2 \left(t - \frac{t+1-1}{t+1} \right) dt \\ &= \int_1^2 t dt - \int_1^2 dt + \int_1^2 \frac{dt}{t+1} = \left[\frac{1}{2}t^2 \right]_1^2 - \left[t \right]_1^2 + \left[\ln(t+1) \right]_1^2 = \frac{1}{2} - 1 + \ln 3 = \ln 3 - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(۳)-۳۰

$$S = \int_1^7 (5 - x^2 - 1) dx = \int_1^7 (4 - x^2) dx = \left(4x - \frac{1}{3}x^3 \right) \Big|_1^7 = 4 - \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$$

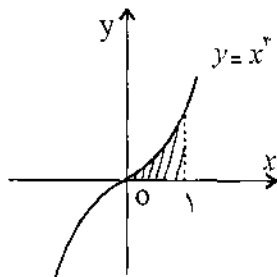
(۳)-۳۱

$$I = \int_1^7 \frac{1}{1+x} dx = \ln |1+x| \Big|_1^7 = \ln 8 - 1 \ln 2 = \ln 4$$

(۳)-۳۲

$$I = \int \frac{x}{1+x} dx = \int \frac{x+1-1}{1+x} dx = \int \frac{x+1}{1+x} dx - \int \frac{1}{1+x} dx = x - \ln |1+x| + c$$

(۱)-۳۳



$$S = \int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3 \right]_0^1 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$$

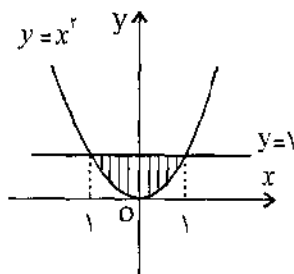
(۲)-۳۴

$$u = 2x \Rightarrow du = 2dx, dv = \sin x dx \Rightarrow v = -\cos x$$

$$\int 2x \sin x dx = -2x \cos x - \int -2 \cos x dx = -2x \cos x + 2 \sin x + c$$

$$I = \int_0^{\pi/2} 2x \sin x dx = [-2x \cos x + 2 \sin x]_0^{\pi/2} = 2 - 0 = 2$$

(۴)-۳۵



$$\begin{cases} y = 1 \\ y = x^2 \end{cases} \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$S = 2 \int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{2}{3}x^3 \right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

(۲)-۳۶

$$u = x+1 \Rightarrow x = u-1 \Rightarrow dx = du$$

$$I = \int \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx = \int \frac{u-1}{\sqrt{u}} du = \int (u^{1/2} - u^{-1/2}) du = \frac{2}{3}u^{3/2} - 2u^{1/2} + c$$

$$I = \frac{2}{3}(x+1)^{3/2} - 2(x+1)^{1/2} + c \Rightarrow I(0) = \frac{2}{3} - 2 + 0 = -\frac{4}{3}$$

(۳)-۳۷

$$I = \int_1^7 \frac{x}{x+1} dx = \int_1^7 \frac{x+1-1}{x+1} dx = \int_1^7 dx - \int_1^7 \frac{dx}{x+1} = [x]_1^7 - [\ln(x+1)]_1^7$$

$$I = 6 - \ln 8 - 0 = 6 - \ln 8$$

(۱)-۳۸

$$\begin{aligned} u = x &\Rightarrow du = dx, dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x \\ \int x e^x dx &= x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + c \\ I &= \int_0^1 x e^x dx = [x e^x - e^x]_0^1 = (e - e) - (0 - 1) = 1 \end{aligned}$$

(۲)-۳۹

$$S = \int_0^1 x^7 dx = \left[\frac{1}{8} x^8 \right]_0^1 = \frac{1}{8}$$

(۲)-۴۰

$$\begin{aligned} y' &= \int (e^{1/x} - x) dx = \frac{1}{x} e^{1/x} - \frac{1}{x} x^2 + c_1 \xrightarrow{c_1=0} y' = \frac{1}{x} e^{1/x} - \frac{1}{x} x^2 \Rightarrow \\ y &= \frac{1}{x} \int (e^{1/x} - x^2) dx = \frac{1}{x} \left(\frac{1}{x} e^{1/x} - \frac{1}{3} x^3 \right) + c_2 \xrightarrow{c_2=0} y = \frac{1}{x} e^{1/x} - \frac{1}{3} x^2 \xrightarrow{x=1} y = \frac{1}{e} \end{aligned}$$

(۱)-۴۱

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x+1}{x-1} dx = \int \frac{x-1+2}{x-1} dx = \int \frac{x-1}{x-1} dx - \int \frac{2}{x-1} dx = x + 2 \ln |x-1| + c \\ \xrightarrow{x=2, c=0} I &= 2 + 2 \ln |2-1| + 0 \Rightarrow I = 2 \end{aligned}$$

(۳)-۴۲

$$\begin{aligned} u = 1-x &\Rightarrow du = -dx, dv = e^{-x} dx \Rightarrow v = -e^{-x} \\ \int (1-x) e^{-x} dx &= (x-1) e^{-x} - \int e^{-x} dx = (x-1) e^{-x} + e^{-x} + c \\ I &= \int_{-1}^0 (1-x) e^{-x} dx = [(x-1) e^{-x} + e^{-x}]_{-1}^0 = e \end{aligned}$$

۴۳- (۲) با توجه به شکل سطح بین دو منحنی در فاصله $[0, 1]$ مورد نظر است.

$$\begin{aligned} \begin{cases} y = x^2 \\ y = 1 \end{cases} &\Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \\ S &= \int_0^1 (1-x^2) dx = \left[x - \frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

۴۴- (۲) به تست شماره ۳۴ مراجعه کنید.

(۲)-۴۵

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x}{x+1} dx = \int \frac{x+1-1}{x+1} dx = \int \frac{x+1}{x+1} dx - \int \frac{1}{x+1} dx = x - \ln |x+1| + c \\ \xrightarrow{x=1} I &= 1 - \ln 2 + c \end{aligned}$$

(۳)-۴۶

$$u = \sqrt{x} + 1 \Rightarrow du = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} = \int \frac{2du}{u} = 2 \ln u \Rightarrow \int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} = 2 \ln(\sqrt{x}+1) \Big|_1^4 = 2 \ln \frac{3}{2}$$

(۱)-۴۷

$$u = x \Rightarrow du = dx, dv = \cos x dx \Rightarrow v = \sin x$$

$$I = \int_0^\pi x \cos x dx = x \sin x \Big|_0^\pi - \int_0^\pi \sin x dx = 0 + \cos x \Big|_0^\pi = -1 - 1 = -2$$

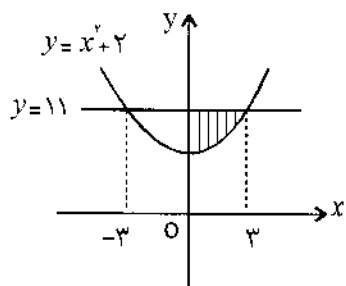
(۲)-۴۸

$$u = x \Rightarrow du = dx, dv = \frac{dx}{\sqrt{x+1}} \Rightarrow v = 2\sqrt{x+1}$$

$$I = \int \frac{x dx}{\sqrt{x+1}} = 2x\sqrt{x+1} - 2 \int \sqrt{x+1} dx = 2x\sqrt{x+1} - \frac{4}{3}(x+1)^{3/2} + c$$

$$\xrightarrow{x=4, c=2} I = 28 - \frac{32}{3} + 1 = \frac{14}{3}$$

(۳)-۴۹



$$\begin{cases} y = x^2 + 2 \\ y = 11 \end{cases} \Rightarrow x^2 + 2 = 11 \Rightarrow x = \pm 3$$

$$S = \int_{-3}^3 (11 - x^2 - 2) dx = 11x - \frac{1}{3}x^3 - 2x \Big|_{-3}^3 = 33 - 9 - 6 = 18$$

۵۰- (۱) می‌دانیم $\int u' e^u dx = e^u + c$ ، تابعی از x است.

$$I = \int_1^e x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int_1^e 2x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} e^{x^2} \Big|_1^e = \frac{1}{2}(e - 1)$$

(۲)-۵۱

$$I(x) = \int \frac{2}{x^2 - x} dx = 2 \int \frac{x+1-x}{x(x-1)} dx = 2 \int \frac{x}{x(x-1)} dx - 2 \int \frac{x-1}{x(x-1)} dx$$

$$I(x) = 2 \int \frac{dx}{x-1} - 2 \int \frac{dx}{x} = 2 \ln|x-1| - 2 \ln|x| + c \xrightarrow{c=0} I(2) = -2 \ln 2 = -\ln 4$$

(۱)-۵۲

$$u = \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x}, dv = dx \Rightarrow v = x$$

$$I = \int_1^2 \ln x dx = x \ln x \Big|_1^2 - \int_1^2 x \cdot \frac{dx}{x} = x \ln x - x \Big|_1^2 = 2 \ln 2 - 1$$

(۳)-۵۳

$$\int x \sqrt{x} dx = \int x^{3/2} dx = \frac{2}{5} x^{5/2} + c \Rightarrow \frac{2}{5} (1)^{5/2} + c = 1 \Rightarrow c = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

(۴)-۵۴

$$\int_1^{2\sqrt{e}} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx = \frac{1}{2} \int_1^{2\sqrt{e}} 2x(x^2+1)^{-1/2} dx = \frac{1}{2} \times 2(x^2+1)^{1/2} \Big|_1^{2\sqrt{e}} = 2$$

(۳)-۵۵

$$I = \int_1^2 \frac{dt}{-(1-t^2)} = - \int_1^2 \frac{dt}{1-t^2}$$

$$I = -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| \Big|_1^2 = -\frac{1}{2} (\ln 3 - \ln 1) = -\frac{1}{2} (\ln 3 - 0) = -\frac{1}{2} \ln 3$$

(۲)-۵۶

$$I(x) = \int \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx = \int \frac{x+1-1}{(x+1)^{1/2}} dx = \int \frac{x+1}{(x+1)^{1/2}} dx - \int \frac{1}{(x+1)^{1/2}} dx$$

$$I(x) = \int (x+1)^{1/2} dx - \int (x+1)^{-1/2} dx = \frac{1}{\frac{1}{2}+1} (x+1)^{1/2+1} - \frac{1}{-\frac{1}{2}+1} (x+1)^{-1/2+1} + c$$

$$I(x) = \frac{2}{3} (x+1)^{3/2} - 2(x+1)^{1/2} + c = \frac{2}{3} \sqrt{(x+1)^3} - 2\sqrt{(x+1)} + c$$

$$I(3) - I(0) = \left(\frac{2}{3} \times 8 - 2 \times 2 + c \right) - \left(\frac{2}{3} - 2 + c \right) = \frac{8}{3}$$

(۲)-۵۷

$$y = 4 - x^2, y = 3 \Rightarrow 3 = 4 - x^2 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$S = \int_0^1 (4 - x^2 - 3) dx = \int_0^1 (1 - x^2) dx = \left(x - \frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_0^1 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

(۳)-۵۸

$$\int \frac{\sqrt{x}+1}{x} dx = \int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x} \right) dx = \int x^{-1/2} dx + \int \frac{dx}{x} = 2x^{1/2} + \ln x + c$$

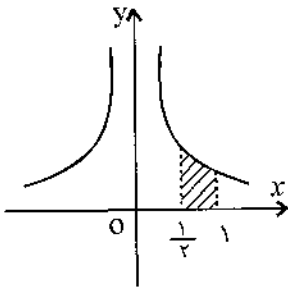
(۲)-۵۹

$$u = \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x}, dv = 2x dx \Rightarrow v = x^2$$

$$\int 2x \ln x dx = x^2 \ln x - \int x^2 \frac{dx}{x} = x^2 \ln x - \frac{1}{2} x^2$$

(۳)-۶۰

$$I = \int_0^1 \frac{x+2}{x+1} dx = \int_0^1 \frac{x+1}{x+1} dx + \int_0^1 \frac{1}{x+1} dx = x \Big|_0^1 + \ln |x+1| \Big|_0^1 = 1 + \ln 2$$



(۴)-۶۱

$$S = \int_{1/\sqrt{2}}^1 \frac{1}{x^2} dx = \int_{1/\sqrt{2}}^1 x^{-2} dx = -x^{-1} \Big|_{1/\sqrt{2}}^1$$

$$= -1 + \sqrt{2} = 1$$

$$-\frac{1}{1} = +\sqrt{2}$$

(۳)-۶۲

$$u = x \Rightarrow du = dx, e^x dx = dv \Rightarrow v = e^x$$

$$\int_0^1 x e^x dx = x e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = x e^x - e^x \Big|_0^1 = e - 1$$

(۳)-۶۳

$$\int_1^2 \frac{x+1}{x} dx = \int_1^2 \frac{x}{x} dx + \int_1^2 \frac{1}{x} dx = x \Big|_1^2 + \ln x \Big|_1^2 = 1 + \ln 2$$

(۱)-۶۴

$$y = \int (3x - 5) dx = \frac{3}{2} x^2 - 5x + c \xrightarrow{(1,2)} 2 = \frac{3}{2} - 5 + c \Rightarrow c = \frac{11}{2}$$

$$x = 0 \Rightarrow y = 0 - 0 + \frac{11}{2} \Rightarrow y = \frac{11}{2}$$

(۲)-۶۵

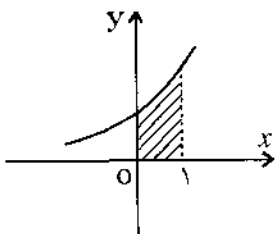
$$I(x) = \int x(2x^2 + 1)^{1/2} dx = \frac{1}{2} \int 2x(2x^2 + 1)^{1/2} dx = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} (2x^2 + 1)^{3/2} + c$$

$$I(0) = \frac{1}{3} (0 + 1)^{3/2} + c = \frac{1}{3} + c$$

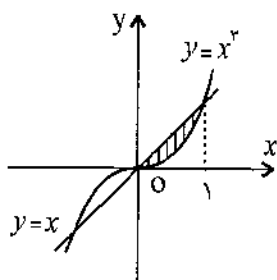
(۳)-۶۶ با توجه به تست شماره ۴۴ خواهیم داشت:

$$I(x) = 2x\sqrt{x+1} - \frac{2}{3}(x+1)^{3/2} + c \Rightarrow I(0) = -\frac{2}{3} + c$$

(۲)-۶۷



$$S = \int_0^1 e^x dx = e^x \Big|_0^1 = e - 1$$



(۳)-۶۸

$$\begin{cases} y = x^r \\ \Rightarrow x^r - x = 0 \Rightarrow x(x^r - 1) = 0 \Rightarrow x = 0, x = \pm 1 \\ y = x \end{cases}$$

$$S = \int_0^1 (x - x^r) dx = \left[\frac{1}{r} x^r - \frac{1}{r} x^r \right]_0^1 = \frac{1}{r} - \frac{1}{r} = \frac{1}{r}$$

(۱)-۶۹

$$I(x) = \int e^{x \ln c} dx = \int (c)^x dx = \frac{(c)^x}{\ln c} \Rightarrow I(0) = \frac{(c)^0}{\ln c} = (\ln c)^{-1}$$

(۴)-۷۰

$$1 - x = u \Rightarrow du = -dx, x = 1 - u$$

$$I = \int (1 - u) u^5 (-du) = - \int (u^6 - u^5) du = - \left(\frac{1}{7} u^7 - \frac{1}{6} u^6 \right) + c$$

$$I = -\frac{1}{7} (1 - x)^7 + \frac{1}{6} (1 - x)^6 + c \xrightarrow{x=1, c=0} I = -\frac{1}{7} + \frac{1}{6} = -\frac{13}{42}$$

(۲)-۷۱

$$u = 1 + \frac{1}{x} \Rightarrow du = -\frac{1}{x^2} dx$$

$$I = - \int \sqrt{1 + \frac{1}{x}} \left(-\frac{1}{x^2} \right) dx = - \int \sqrt{u} \cdot du = -\frac{2}{3} u^{3/2} + c = -\frac{2}{3} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{3/2} + c$$

$$\xrightarrow{x=1, c=0} I = -\frac{2}{3} \left(1 + \frac{1}{1} \right)^{3/2} = -\frac{2}{3} \left(\frac{2}{1} \right)^{3/2} = -\left(\frac{2}{1} \right)^{1/2} = -\sqrt{\frac{2}{1}}$$

(۳)-۷۲

محل تقاطع منحنی با محور ها: $y = 4x - x^2 = 0 \Rightarrow x(4 - x) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 4$

$$S = \int_0^4 (4x - x^2) dx = \left[2x^2 - \frac{1}{3} x^3 \right]_0^4 = 32 - \frac{64}{3} = \frac{32}{3}$$

(۱)-۷۳

$$u = \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x}, dx = dv \Rightarrow v = x$$

$$\int_1^e \ln x dx = \left[x \ln x \right]_1^e - \int_1^e x \cdot \frac{dx}{x} = \left[e \ln e - \ln 1 - x \right]_1^e = e \ln e - 1$$

(۳)-۷۴

$$u = 3x + 4 \Rightarrow du = 3 dx$$

$$\int_0^1 \sqrt{3x + 4} dx = \frac{1}{3} \int_4^7 \sqrt{u} du = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} u^{3/2} = \frac{2}{9} (3x + 4)^{3/2} \Big|_0^1 = \frac{16}{9} - \frac{2}{9} = \frac{14}{9}$$

(۴)-۷۵

$$\begin{aligned} u = \ln x &\Rightarrow du = \frac{dx}{x}, dv = x^{1/2} dx \Rightarrow v = \frac{1}{1/2} x^{1/2} \\ I &= \int x^{1/2} \ln x dx = \frac{1}{1/2} x^{1/2} \ln x - \int \frac{1}{1/2} x^{1/2} \cdot \frac{dx}{x} = \frac{1}{1/2} x^{1/2} \ln x - \frac{1}{1/2} x^{1/2} + c \\ \xrightarrow{x=1} I &= 0 - \frac{1}{1/2} + c = -\frac{1}{1/2} + c \end{aligned}$$

(۲)-۷۶

$$\begin{aligned} F(x) &= \int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}x+1} dx = \int (x+1)(x+1)^{-1/2} dx = \int (x+1)^{1/2} dx \Rightarrow \\ F(x) &= \frac{2}{3} (x+1)^{3/2} \Rightarrow F(0) = \frac{2}{3} (0+1)^{3/2} \Rightarrow F(0) = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

(۴)-۷۷

$$\begin{aligned} u = \ln x &\Rightarrow du = \frac{dx}{x}, dv = x dx \Rightarrow v = \frac{1}{2} x^2 \\ I(x) &= \int x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{dx}{x} = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{2} + c \\ I(1) &= 0 - \frac{1}{2} + c = -\frac{1}{2} + c \end{aligned}$$

(۲)-۷۸

$$\begin{aligned} \begin{cases} y = x \\ y = x^2 \end{cases} &\Rightarrow x = x^2 \Rightarrow x(1-x) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 1 \\ S &= \int_0^1 (x - x^2) dx = \left[\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

۷۹- (۳) در صورتی که از تابع شیب که همان dy/dx است انتگرال بگیریم، خود تابع به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} dy &= \left(2x + \frac{1}{x+1} \right) dx \Rightarrow y = \int \left(2x + \frac{1}{x+1} \right) dx \Rightarrow y = x^2 + \ln|x+1| + c \\ \xrightarrow{(0,0)} 0 &= 0 + \ln 1 + c \Rightarrow c = 0 \Rightarrow y = x^2 + \ln|x+1| \xrightarrow{x=1} y = 1 + \ln 2 \end{aligned}$$

۸۰- (۴) با توجه به فرمول ۳۱ قسمت (۶-۴-۱) خواهیم داشت:

$$I(x) = \int \frac{dx}{x-x^2} = \frac{1}{2} \ln x \left| \frac{x+x}{x-x} \right| + c \xrightarrow{x=1} I(1) = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+1}{1-1} \right| = \frac{1}{2} \ln 2$$

(۱)-۸۱

$$\begin{aligned} u = x &\Rightarrow du = dx, dv = \cos x dx \Rightarrow v = \sin x \\ I(x) &= \int x \cos x dx = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x \Rightarrow I(1) = 0 + 1 = 1 \end{aligned}$$

(۱)-۸۲

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = \ln x \end{cases} \Rightarrow \ln x = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$S = \int_1^2 \ln x dx = x \ln x \Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{x}{x} dx = x \ln x \Big|_1^2 - x \Big|_1^2 = 2 \ln 2 - 1$$

(۲)-۸۳

$$\begin{aligned} I &= \int_1^2 \frac{t}{t+1} dt = \int_1^2 \frac{t+1-1}{t+1} dt = \int_1^2 dt - \int_1^2 \frac{dt}{t+1} \\ &= t \Big|_1^2 - \ln |t+1| \Big|_1^2 = 1 - (\ln 2 - \ln 1) = 1 - \ln 2 \end{aligned}$$

(۲)-۸۴

$$I = \int x e^x dx, \quad u = x \Rightarrow du = dx, dv = e^x \Rightarrow v = e^x$$

$$I = \int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x = e^x (x - 1)$$

$$S = \int_{-1}^0 x e^x dx + \int_0^1 x e^x dx = [e^x (x - 1)]_{-1}^0 + [e^x (x - 1)]_0^1$$

$$S = [-1 + 1e^{-1}] + (0 + e) = \underbrace{-1 + \frac{1}{e}}_{(-)} + 1 = 1 - \frac{1}{e} + 1 = 2 - \frac{1}{e}$$

(۳)-۸۵

$$I(x) = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{\sqrt{2x+1}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x+1-1}{(2x+1)^{1/2}} dx$$

$$I(x) = \frac{1}{2} \int (2x+1)^{1/2} dx - \frac{1}{2} \int (2x+1)^{-1/2} dx$$

$$I(x) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 1 \right)} (2x+1)^{3/2+1} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} + 1 \right)} (2x+1)^{-1/2+1} + C$$

$$I(x) = \frac{1}{5} (2x+1)^{5/2} - \frac{1}{2} (2x+1)^{1/2} + C = \frac{1}{5} \sqrt{(2x+1)^5} - \frac{1}{2} \sqrt{2x+1} + C$$

$$I(1) - I(0) = \frac{1}{5} \sqrt{5} - \frac{1}{2} \sqrt{3} + C - \frac{1}{5} + \frac{1}{2} - C = \frac{1}{5} = \frac{1}{5}$$

پاسخ تشریحی تست‌های آزمون کارشناسی ارشد

«ماتریس»

(۴)-۱

$$AB = \begin{bmatrix} -2+2 & 2+1 \\ -3+1 & 3+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}, (AB)'I_2 = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$$

۲-۴) سطر اول را به سطر دوم اضافه می‌کنیم. چون سطرهاى دوم و سوم یکسان‌اند، دترمینان ماتریس برابر صفر است.
۳-۱) در قسمت شماره ۲ معلوم شد که دترمینان ماتریس A صفر است پس رتبه ماتریس ۳ نخواهد بود یکی از ماتریس‌های 2×2 آن را انتخاب کرده و دترمینان آن را محاسبه می‌کنیم. مثلاً

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 0 = 2$$

چون دترمینان فوق مخالف صفر است. بنابراین رتبه ماتریس ۲ است.
۴-۲)

$$A^{-1} = \frac{1}{4-6} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

۵-۳) شرط وجود جواب برای دستگاه دو معادله دوجوهی این است که:

$$\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'} \Rightarrow \frac{a}{1} \neq \frac{1}{-a} \Rightarrow -a^2 \neq 1$$

نامساوی فوق همواره برقرار است بنابراین دستگاه به‌ازای همه مقادیر a جواب دارد.
۶-۱)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, (A|B) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 3 \\ 1 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

با توجه به اینکه سطر سوم هر دو ماتریس مذکور صفر است، $r(A) = r(A|B) \neq 3$ و با تشکیل دترمینان‌های 2×2 معلوم می‌شود که $r(A) = r(A|B) = 2 < 3$ می‌باشد در نتیجه دستگاه سازگار با بی‌نهایت جواب خواهد بود.

۷-۳) می‌دانیم در ماتریس قطری، عناصر واقع بر قطر اصلی همان ریشه‌های معادله مفسر است یعنی ۱ و ۲.

۸-۱) چون دترمینان ماتریس ضرایب برابر صفر است دستگاه معادلات غیر از جواب بدیهی جواب‌های دیگری نیز دارد و به بیان دیگر دستگاه بی‌نهایت جواب دارد.

۹-۱) می‌دانیم در ماتریس قطری، عناصر واقع بر قطر اصلی همان ریشه‌های معادله مفسر است یعنی ۱ و ۲.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{adj} A \quad \text{می‌دانیم} \quad ۱۰-۴)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ -4 & -4 & -3 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -4 & -3 \end{vmatrix} = -4$$

تذکره: دانشجویان عزیز توجه داشته باشید که تنها با استفاده از عنصر واقع در سطر اول ستون اول ماتریس A^{-1} می‌توان

گزینه درست را پیدا کرد یعنی: $A_{11}/|A| = \frac{-4}{-1} = 4$. بدیهی است که گزینه‌های ۱ و ۲ و ۳ نادرست است.

۱۱-۱) سطر اول را در منفی یک ضرب نموده به سطرهاى دوم و سوم و چهارم می‌افزاییم، یعنی:

$$\begin{vmatrix} a+b & a & a & a \\ -b & b & 0 & 0 \\ -b & 0 & b & 0 \\ -b & 0 & 0 & b \end{vmatrix}$$

ستون‌های دوم و سوم و چهارم را با ستون اول جمع می‌کنیم، در این صورت ماتریس حاصل یک ماتریس بالامتلسی است که دترمینان آن برابر است با حاصل ضرب عناصر قطر اصلی:

$$\begin{vmatrix} 4a+b & a & a & a \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{vmatrix} = (4a+b)bbb = b^3(4a+b)$$

۱۲-۲) به ویژگی ۲ قسمت (۷-۳۹) مراجعه کنید.

۱۳-۳) به ویژگی ۳ قسمت (۷-۳۳) مراجعه کنید.

۱۴-۴)

$$A^{-1} = \frac{1}{-\cos^2 \theta - \sin^2 \theta} \begin{bmatrix} -\cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} -\cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ -\sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix}$$

$$A^{-1}|_{\theta=0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{مجموع عناصر روی قطر اصلی} = 1 - 1 = 0$$

۱۵-۲)

۱۶-۲) می‌دانیم $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj} A$ با توجه به صورت مسأله فقط عناصر روی قطر اصلی $\text{adj} A$ را به ترتیب زیر به دست می‌آوریم:

$$A_{11} = (-1)^1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \quad A_{22} = (-1)^1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \quad A_{33} = (-1)^0 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

از طرفی $|A| = 0 - 2 = -2$ در نتیجه مجموع عناصر قطر اصلی ماتریس A^{-1} برابر است با:

$$\frac{1}{-2} [(-1) + (-1) + 1] = \frac{1}{4}$$

۱۷-۲)

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = (6 + 0 + 0) - (0 + 0 + 0) = 6 \neq 0 \Rightarrow r(A) = 3$$

۱۸-۴) برای این که دستگاه دو معادله دوجوهلی فاقد جواب باشد، باید:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'} \Rightarrow \frac{2}{a} = \frac{1}{-2} \neq \frac{4}{6} \Rightarrow a = -4$$

و یا باید دترمینان ماتریس ضرایب برابر صفر باشد:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ a & -2 \end{vmatrix} = -4 - a = 0 \Rightarrow a = -4$$

۱۹- (۳)

$$|A - kI| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1-k & 0 & 2 \\ 0 & 2-k & 0 \\ 2 & 0 & 3-k \end{vmatrix} = (1-k)(2-k)(3-k) - 4(2-k) = 0 \Rightarrow$$

$$(2-k)[(1-k)(3-k) - 4] = (2-k)(k^2 - 4k - 1) = 0 \xrightarrow{\text{یکی از ریشه‌های}} k = 2$$

۲۰- (۱) راه اول:

$$A^{-1} = \frac{1}{-0/16 - 0/16} \begin{bmatrix} -0/8 & -0/4 \\ -0/4 & 0/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{10}{4} & \frac{10}{8} \\ \frac{10}{4} & -\frac{10}{8} \end{bmatrix}$$

$$A^* A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ \frac{10}{4} & \frac{10}{8} \\ \frac{10}{4} & -\frac{10}{8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{10}{4} & \frac{10}{8} \\ \frac{4}{8} & \frac{8}{5} \\ \frac{4}{8} & -\frac{8}{8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

 راه دوم: داریم $A^* = A$ بنابراین $A^* A^{-1} = A A^{-1} = I_n$ می‌دانیم

 ۲۱- (۳) ستون دوم را در m ضرب کرده و به ستون سوم می‌افزاییم، یعنی:

$$\begin{vmatrix} m & a-d & mb+mc+ma-md \\ m & b-d & ma+mc+mb-md \\ m & c-d & ma+mb+mc-md \end{vmatrix} = (a+b+c-d) \begin{vmatrix} m & a-d & m \\ m & b-d & m \\ m & c-d & m \end{vmatrix} = (a+b+c-d)(0) = 0$$

برای توضیح بیش‌تر به ویژگی‌های شماره ۸ و ۵ قسمت (۷-۳۳) مراجعه کنید.

۲۲- (۴) شرط وجود جواب‌های غیر از صفر برای یک دستگاه همگن این است که دترمینان ماتریس ضرایب آن صفر باشد.

$$\begin{vmatrix} 1 & k & 2 \\ k-1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = [-4 + 0 + 2(k-1)] - [-4 + 0 + 4k(k-1)] = 0 \Rightarrow$$

$$2k - 2 - 4k^2 + 4 = 0 \Rightarrow 4k^2 - 2k - 2 = 0 \Rightarrow k = 1, k = \frac{1}{2}$$

۲۳- (۱) ستون دوم و سوم را به ستون اول می‌افزاییم، یعنی:

$$\begin{vmatrix} a-b & b-c & c-a \\ b-c & c-a & a-b \\ c-a & a-b & b-c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (a-b) + (b-c) + (c-a) & b-c & c-a \\ (b-c) + (c-a) + (a-b) & c-a & a-b \\ (c-a) + (a-b) + (b-c) & a-b & b-c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & b-c & c-a \\ 0 & c-a & a-b \\ 0 & a-b & b-c \end{vmatrix} = 0$$

۲۴- (۳)

 ماتریس A از مرتبه ۳ نمی‌باشد $\Rightarrow |A| = (-10 + 2 - 18) - (6 - 2 - 30) = 0$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 6 = -4 \neq 0 \Rightarrow r(A) = 2$$

۲۵- (۳) چون ماتریس A بالامتثلی است دترمینان آن برابر با حاصل ضرب قطر اصلی است، یعنی $|A| = 8$ اگر A_{rr} عنصر سطر سوم ستون سوم ماتریس الحاقی ماتریس A باشد خواهیم داشت:

$$A_{rr} = \frac{1}{|A|} \cdot A_{rr} \quad , \quad A_{rr} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4$$

$$A_{rr} = \frac{1}{8} \times 4 = \frac{1}{2}$$

۲۶- (۴) شرط وجود جواب‌های غیربدهی (غیرصفر) برای یک دستگاه همگن این است که دترمینان ماتریس ضرایب آن صفر باشد.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & k \end{vmatrix} = (-2k + 4 + 1) - (-8 + 1 + k) = 0 \Rightarrow -3k + 12 = 0 \Rightarrow k = 4$$

۲۷- (۲) می‌دانیم حاصل ضرب مقادیر ویژه هر ماتریس مربع (ریشه‌های معادله مفسر) A برابر است با دترمینان A .

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = (-2 - 24 - 6) - (9 + 4 - 8) = -37$$

۲۸- (۲) ماتریس مربعی A وقتی معکوس‌پذیر است که دترمینان آن مخالف صفر باشد.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ a & 1 & 2 \\ a & -1 & 0 \end{vmatrix} = (0 + 4a - a) - (a - 2 + 0) = 0 \Rightarrow 3a - 2 = 0 \Rightarrow a = \frac{2}{3}$$

۲۹- (۱) داریم $|A| = (1 - 0 + 4) - (3 + 0 - 2) = 4$ اگر A_{rr} عنصر سطر دوم ستون دوم ماتریس الحاقی ماتریس A باشد خواهیم داشت:

$$A_{rr} = \frac{1}{|A|} \cdot A_{rr} \quad , \quad A_{rr} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 3 = -2$$

$$A_{rr} = \frac{1}{4} \times (-2) = -\frac{1}{2}$$

۳۰- (۴) می‌دانیم مجموع مقادیر ویژه هر ماتریس مربع A برابر است با $\text{tr} A$. و داریم $\text{tr} A = 1 + 4 = 5$

۳۱- (۲) $|A| = 0$ است زیرا همه عناصر سطر چهارم صفر است. پس باید دترمینان درجه سه را در نظر بگیریم همه دترمینان‌های 3×3 نیز مساوی صفر است، زیرا یا دو سطر متناسب دارند و یا همه عناصر یک سطر صفر است بنابراین باید دترمینان درجه دو را در نظر بگیریم، اگر حداقل یکی از دترمینان‌ها مخالف صفر باشد، مرتبه ماتریس A دو خواهد بود. مثلاً

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 4 = 2 \neq 0 \Rightarrow r(A) = 2$$

(۴)-۳۲

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & x & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} &= 0 \Rightarrow [4 \ 2 + x \ 5] \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} = 0 \\
 \Rightarrow 4 + 4 + 2x - 15 &= 0 \Rightarrow 2x = 7 \Rightarrow x = \frac{7}{2}
 \end{aligned}$$

(۳)-۳۳

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & k \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (4 + k - 1) - (2 - k + 2) = 0 \Rightarrow 2k - 1 = 0 \Rightarrow k = \frac{1}{2}$$

(۲)-۳۴

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1 + 0 + 1) - (0 + 0 + 0) = 0$$

(۱)-۳۵

$$\begin{aligned}
 A^T &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 4 & 11 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T - I_2 = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 4 & 11 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 4 & 10 \end{bmatrix} \\
 |A^T - I_2| &= \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 4 & 10 \end{vmatrix} = 20 - 32 = -12
 \end{aligned}$$

(۲)-۳۶

$$|A| = 0 \Rightarrow (0 + 4 + 2) - (0 + 2x + 4) = 0 \Rightarrow 6 - 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 1$$

(۳)-۳۷

$$A^T = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$$

(۲)-۳۸

$$A^{-1} = \frac{1}{6-2} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

(۱)-۳۹

$$\begin{aligned}
 &\frac{\begin{cases} x+y+z=2 \\ x-y-2z=-1 \end{cases}}{2x-z=1} \quad , \quad \frac{\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x+y-z=4 \end{cases}}{-x+2z=-2} \Rightarrow \begin{cases} 2x-z=1 \\ -2x+2z=-2 \end{cases} \Rightarrow \\
 &\frac{\begin{cases} 2x-z=1 \\ -x+2z=-2 \end{cases}}{2x=0 \Rightarrow x=0}
 \end{aligned}$$

۴۰- (۴) $|A_{2 \times 2}| = 0$ بنابراین ماتریس از مرتبه ۳ نیست و به همین صورت $|A_{2 \times 2}| = 0$ و بنابراین ماتریس از مرتبه ۲ نیست و چون $|A_{1 \times 1}| = 2$ پس ماتریس از مرتبه ۱ می‌باشد.
(۱)-۴۱

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ a & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (2 + 6 + 2a) - (a + 8 + 3) = 0 \Rightarrow a - 3 = 0 \Rightarrow a = 3$$

(۴)-۴۲

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 7 & 12 \\ 7 & 8 & 12 \\ 4 & 4 & 7 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T \text{ مجموع عناصر قطری ماتریس} = 23$$

(۲)-۴۳

$$A^{-1} = \frac{1}{5-2} \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} \text{ مجموع عناصر قطری ماتریس} = 2$$

(۱)-۴۴

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - y - 2z = 0 \\ -x + y + z = 0 \end{cases}$$

$$x + y - 2z = 0 \Rightarrow \underbrace{(x + y - z)} - z = 0 \Rightarrow -z = 0 \Rightarrow z = 0$$

$$x + y + z = (x + y - z) + 2z = 0 + 0 = 0$$

(۴)-۴۵

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T \text{ مجموع عناصر ماتریس} = 18$$

(۲)-۴۶

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (1 + 2 + 2) - (2 + 2 + 2) = 1$$

۴۷- (۴) درست شماره ۴۶ معلوم شد که دترمینان ماتریس مخالف صفر است بنابراین مرتبه ماتریس ۳ است.
۴۷- (۴) دستگاه دو معادله دوجمله‌ای در صورتی جواب‌های بی‌شمار دارد که:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \Rightarrow \frac{1}{1} = \frac{2a}{4} \Rightarrow 2a = 4 \Rightarrow a = 2$$

(۱)-۴۹

$$A^{-1} = \frac{1}{4-3} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} \text{ مجموع عناصر ماتریس} = 0$$

(۲)-۵۰

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 14 \\ -4 & 14 \end{bmatrix} \Rightarrow AB \text{ مجموع عناصر روی قطر } = 13$$

(۳)-۵۱

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (0 + 6 + 4) - (24 - 4 + 0) = -10$$

(۱۱)-۵۲

$$A^{-1} = \frac{1}{15-8} \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$$

(۲)-۵۳ دستگاه دو معادله دوجمله‌ای در صورتی جواب‌های بی‌شمار دارد که:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \Rightarrow \frac{a}{1} = \frac{1}{-2} \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

(-)-۵۴ دترمینان برای ماتریس‌های غیرمربع تعریف نشده است.

(۴)-۵۵

$$A^{-1} = \frac{1}{6-1} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} \text{ مجموع عناصر قطری } = 1$$

(۲)-۵۶ $|A_{r \times r}| = 0$ زیرا دو سطر ماتریس با هم متناسبند و در نتیجه ماتریس از مرتبه ۴ نیست. به همین دلیل $|A_{r \times r}| = 0$ و در نتیجه ماتریس از مرتبه ۲ نیست، اما

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 4 = -3 \neq 0 \Rightarrow r(A) = 2$$

(۳)-۵۷ شرط وجود جواب‌های غیرصفر برای یک دستگاه همگن این است که دترمینان ماتریس ضرایب آن صفر باشد.

$$\begin{vmatrix} m & 1 & -1 \\ 1 & -1 & +1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (-m + 2 + 2) - (1 - 2m + 2) = 0 \Rightarrow m + 1 = 0 \Rightarrow m = -1$$

(۴)-۵۸

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 2 \\ a-2 & 1 \end{vmatrix} = a - 2(a-2) = 0 \Rightarrow a - 2a + 4 = 0 \Rightarrow a = 4$$

(۳)-۵۹

$$A.A' = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 74 & 103 \\ 103 & 145 \end{bmatrix} \Rightarrow |A.A'| = \begin{vmatrix} 74 & 103 \\ 103 & 145 \end{vmatrix} = 10730 - 10609 = 121$$

(۴)-۶۰

$$A^{-1} = \frac{1}{45-56} \begin{bmatrix} 9 & -7 \\ -8 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{9}{11} & \frac{7}{11} \\ \frac{8}{11} & -\frac{5}{11} \end{bmatrix} \Rightarrow A \text{ مجموع عناصر معکوس ماتریس } = \frac{1}{11}$$

(۶۱)-(۲)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & y \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow [6 \ 3x \ y + 4] \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \\ 6 + 6x + y + 4 = 0 \Rightarrow 6x + y + 10 = 0$$

(۶۲)-(۱)

داریم $|A| = 3$ اگر A'_{13} عنصر مربوط به سطر اول و ستون سوم ماتریس الحاقی ماتریس A باشد آن‌گاه A'_{13} برابر است با A_{21} عنصر متناظر در ماتریس همساز که به صورت زیر می‌توان آن را به دست آورد:

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \quad A_{13}^{-1} = \frac{A'_{13}}{|A|} = \frac{1}{3}$$

(۶۳)-(۴) می‌دانیم $|AB| = |A||B|$

$$|A||B| = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = (2 \times 4 - 1 \times 5)(7 \times 2 + 3 \times 1) = 3 \times 17 = 51$$

(۶۴)-(۳)

$$A^T = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & 3 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & 3 \end{bmatrix}}_B = \text{ماتریس حاصل} \\ c_{rr} = \sum a_{rj} \cdot b_{jr} = 0 \times 5 + 1 \times (-1) + (-1)(3) = -4$$

(۶۵)-(۱)

$$\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1+x \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3x^2 + x^3 = 0 \Rightarrow x^2(3+x) = 0 \Rightarrow x = 0, x = -3$$

(۶۶)-(۱) داریم $|A| = 2 + 3 = 5$ اگر A'_{22} جزء مربوط به سطر سوم و ستون دوم ماتریس الحاقی ماتریس A باشد آن‌گاه A'_{22} برابر است با A_{22} عنصر متناظر در ماتریس همساز که به صورت زیر می‌توان آن را به دست آورد:

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \times -1 = 1 \quad A_{22}^{-1} = \frac{A'_{22}}{|A|} = \frac{1}{5}$$

(۶۷)-(۱)

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10+0+0 & 0+1+0 \\ -5+0+8 & 0+1-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 10 & 1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = -33$$

(۱)-۶۸

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 \text{ مجموع عناصر قطر اصلی} = 7 + 22 = 29$$

(۳)-۶۹

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & a \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (-a + 4 + 0) - (-6 + 0 + 4a) = 0 \Rightarrow -5a + 10 \Rightarrow a = 2$$

(۲)-۷۰ چون در ماتریس‌های $A_{2 \times 2}$ و $A_{3 \times 3}$ سطرهای مساوی وجود دارند بنابراین $|A_{2 \times 2}| = 0$ و بنابراین مرتبه ماتریس ۳ و ۲ نیست. اما $|A_{1 \times 1}| = 1$ در نتیجه ماتریس از مرتبه ۱ می‌باشد.

(۳)-۷۱ داریم $|A| = 2 - 6 = -4$. اگر A_{11} عنصر سطر اول و ستون اول ماتریس الحاقی A باشد، خواهیم داشت:

$$a_{11} = \frac{1}{|A|} \cdot A_{11} = \frac{1}{-4} \cdot (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{-4} \times 2 = -\frac{1}{2}$$

(۴)-۷۲ دستگاه دو معادله دوجبهولی در صورتی فاقد جواب است که:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'} \Rightarrow \frac{1}{a} = \frac{1}{1} \Rightarrow a = 1$$

(۱)-۷۳ در دستگاه همگن اگر دترمینان ماتریس ضرایب مخالف صفر باشد، دستگاه جواب منحصر به فرد (جواب صفر) دارد.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -4 + 1 = -3 \neq 0 \Rightarrow x = y = z = 0 \Rightarrow x + y + z = 0$$

(۱)-۷۴

$$(1 \ 2 \ -1) \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 2 + 4 - 1 = 5$$

(۴)-۷۵

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 10 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow x + y = 11$$

(۴)-۷۶

$$|A^2| = |A||A| = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (-2)(-2) = 4$$

(۲)-۷۷

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & k \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (0 + 2 + 0) - (0 + 0 + k) = 0 \Rightarrow 2 - k = 0 \Rightarrow k = 2$$

(۳)-۷۸

$$|A| = (0 + 4 + 0) - (0 + 0 + 1) = 3 \neq 0 \Rightarrow r(A) = 3$$

(۲)-۷۹

$$A^{-1} = \frac{1}{1-4} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} \text{ مجموع عناصر} = -\frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

۸۰-(۲) دستگاه دو معادله دو مجهولی در صورتی فاقد جواب است که:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'} \Rightarrow \frac{1}{1} = \frac{m}{-1} \Rightarrow m = -1$$

۸۱-(۴) دستگاه دو معادله دو مجهولی در صورتی بی‌نهایت جواب دارد که:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{2}{-a} \Rightarrow a = -4$$

(۳)-۸۲

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (1 - 2 + 4) - (-3 + 4 + 6) = 11 - 7 = 4$$

۸۳-(۱) ماتریس $A.B.C = (A.B).C = I$ بدین معنی است که AB ماتریس معکوس C می‌باشد و لذا $|C| \neq 0$ است. به‌طور مشابه ماتریس $A.B.C = A.(B.C) = I$ بدین معنی است که BC ماتریس معکوس A می‌باشد و لذا $|A| \neq 0$ است و به همین ترتیب:

$$|AB| = |A||B| \neq 0 \quad A \neq 0, B \neq 0, |AB| \neq 0$$

(۴)-۸۴

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 10 = -6, |B| = \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 15 - 14 = 1$$

$$|A^T B^{15}| = |A|^T |B|^{15} = (-6)^T (1)^{15} = 36$$

(۲)-۸۵

$$A^{-1} = \frac{1}{-4-3} \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{-7} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

۸۶-(۱) دستگاه دو معادله دو مجهولی در صورتی بی‌شمار جواب دارد که:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \Rightarrow \frac{a}{2a} = \frac{1}{-1} \Rightarrow -a = 2a \Rightarrow a = 0$$

راه دیگر: اگر دترمینان ماتریس ضرایب یک دستگاه همگن مساوی باشد دستگاه بی‌شمار جواب دارد:

$$\begin{vmatrix} a & 1 \\ 2a & -1 \end{vmatrix} = -a - 2a = 0 \Rightarrow a = 0$$

(۴)-۸۷

$$|A - \lambda I_3| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda = 1, \lambda = 3$$

راه دیگر:

$$|A - \lambda I_3| = 0 \Rightarrow \lambda^3 - (\text{tr} A)\lambda^2 + |A| = 0 \Rightarrow \lambda^3 - 4\lambda + 3 = 0 \\ \Rightarrow (\lambda - 1)(\lambda - 3) = 0 \Rightarrow \lambda = 1, \lambda = 3$$

(۴)-۸۸

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & k \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (4 + 2 + 0) - (0 + 4 + k) = 0 \Rightarrow 2 - k = 0 \Rightarrow k = 2$$

(۱)-۸۹

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+4+3 & 2+2+6 & 3+6+9 \\ 2+2+3 & 4+1+6 & 6+3+9 \\ 1+4+3 & 2+2+6 & 3+6+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 10 & 18 \\ 7 & 11 & 18 \\ 8 & 10 & 18 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow A^T \text{ مجموع عناصر قطری } = 8 + 11 + 18 = 37$$

 ۹۰-(۲) اگر عناصر ماتریس $\text{adj} A$ را به صورت A_{ij} نشان دهیم برای به دست آوردن b_{rr} ماتریس معکوس A داریم:

$$b_{rr} = \frac{1}{|A|} \cdot A_{rr}$$

 ولی A_{rr} با عنصر متناظر آن در ماتریس $\text{cof} A$ که به صورت زیر به دست می آید برابر است.

$$A_{rr} = (-1)^r \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow b_{rr} = \frac{1}{|A|} \times 0 = 0$$

۹۱-(۳) در یک دستگاه معادلات همگن اگر دترمینان ماتریس ضرایب صفر باشد، دستگاه بی نهایت جواب دارد.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & k \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (-k + 1 + 8) - (-2 + 2 + 2k) = 0 \Rightarrow -3k + 9 = 0 \Rightarrow k = 3$$

 ۹۲-(۳) معکوس ماتریس A وقتی وجود ندارد که دترمینان آن مساوی صفر باشد.

$$|A| = \begin{vmatrix} n & 2 & 1 \\ 2 & n & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (n^2 + 2 + 0) - (n + 2 + 0) = 0 \Rightarrow n^2 - n - 2 = 0 \Rightarrow n = 2, n = -1$$

 ۹۳-(۴) داریم $|A| = 4 - 6 = -2$. اگر A'_{rr} عنصر ماتریس $\text{adj} A$ باشد، آن گاه A'_{rr} برابر است با A_{rr} عنصر متناظر

 در ماتریس $\text{cof} A$ که به صورت زیر به دست می آید.

$$A_{rr} = (-1)^0 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 4 = 5 \Rightarrow A'_{rr} = -5$$

$$a_{rr} = \frac{1}{|A|} \cdot A'_{rr} = \frac{1}{-2} \times (-5) = +\frac{5}{2}$$

۹۴- (۴) می‌دانیم مجموع مقادیر ویژه هر ماتریس مربع A برابر است با $\text{tr } A$ یعنی $7 = 5 + 2$.
 ۹۵- (۱)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{bmatrix} = 1 + 0 + 3 = 3A$$

۹۶- (۲)

$$A^{-1} \text{عناصر} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{4+2+1}{4} = \frac{7}{4}$$

۹۷- (۱)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & k \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (1+k+4) - (-2k-2+1) = 0 \Rightarrow 3k+6=0 \Rightarrow k=-2$$

===== پاسخ تشریحی تست‌های آزمون کارشناسی ارشد =====

«بردار - خط - صفحه»

۱- (۱)

$$\begin{aligned} \cos(a, v) &= \frac{a \cdot v}{|a| \cdot |v|} = \frac{a(|a|b + |b|a)}{|a||v|} = \frac{|a|ab + |b|(a)^T}{|a||v|} \\ &= \frac{|a|ab + |b||a|^T}{|a||v|} = \frac{a \cdot b + |b||a|}{|v|} \\ \cos(b, v) &= \frac{b \cdot v}{|b| \cdot |v|} = \frac{b(|a|b + |b|a)}{|b||v|} = \frac{|a|(b)^T + |b|ab}{|b||v|} \\ &= \frac{|a| \cdot |b|^T + |b|ab}{|b||v|} = \frac{|a||b| + ab}{|v|} \end{aligned}$$

در نتیجه بردار v نیمساز بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ است.

۲- (۳)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ a & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (1+6a+2) - (1+3+4a) = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{4}$$

۳- (۱) بردار هادی خط مزبور به صورت $u = (1, 1, 3)$ است. بردار نرمال صفحه مطلوب، موازی خط هادی داده شده است. پس معادله صفحه موردنظر برابر است با:

$$1(x-0) + 1(y-0) + 3(z-0) = 0 \Rightarrow x + y + 3z = 0$$

۴- (۲) با توجه به راه حل تست شماره ۱، بردار v نیمساز بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ است و از آنجا که زاویه $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر 70° است، پس این بردارها با بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ زاویه 35° خواهد ساخت.

۵- (۲) می‌دانیم فاصله نقطه $P(x_0, y_0, z_0)$ از صفحه به معادله $ax + by + cz + d = 0$ برابر است با:

$$D = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|10 + 22 - 6 - 30|}{\sqrt{25 + 121 + 9}} = \frac{|-4|}{\sqrt{150}} = \frac{4}{\sqrt{150}}$$

۶-۲) با توجه به تلاقی خط با محور z ‌ها خواهیم داشت $x = 0$ و $y = 0$ و بنابراین:

$$\frac{2z-1}{4} = 0 \Rightarrow 2z = 1 \Rightarrow z = \frac{1}{2} \Rightarrow \left(0, 0, \frac{1}{2}\right)$$

۷-۱) در نقطه گفته شده $z = 0$ خواهد بود و بنابراین:

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{0-2}{1} \Rightarrow x-2 = -4 \Rightarrow x = -2, y-1 = -6 \Rightarrow y = -5$$

۸-۱)

بردار هادی خط مزبور به صورت $u = (2, 3, 1)$ است. بردار نرمال صفحه مطلوب، موازی هادی خط داده شده است. پس معادله صفحه موردنظر برابر است با:

$$2(x-1) + 3(y-1) + 1(z-2) = 0 \Rightarrow 2x + 3y + z = 7$$

۹-۴)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ k & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (1+0+3k) - (3+2k+0) = 0 \Rightarrow k = 2$$

پاسخ تشریحی تست‌های آزمون کارشناسی ارشد

«توابع چندمتغیره»

۱-۱) با توجه به خطی بودن تابع z و اینکه به ازای همه مقادیر $x \in \mathbb{R}$ و $y \in \mathbb{R}$ تابع z تعریف شده است، لذا برد آن $\mathbb{R}$ است.

۲-۱)

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2ye^{x^2+y^2} + \frac{1}{y} \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = (2x)(2y)e^{x^2+y^2} \xrightarrow{x=y=1} \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 4e^2$$

۳-۴)

$$z = (\rho \cos \theta)^2 + (\rho \sin \theta)^2 = \rho^2 \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \theta = \rho^2 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) \Rightarrow$$

$$z = \rho^2, \frac{\partial z}{\partial \theta} = 0$$

راه حل دیگر:

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \theta} = 2x(-\rho \sin \theta) + 2y(\rho \cos \theta)$$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = (2\rho \cos \theta)(-\rho \sin \theta) + 2(\rho \sin \theta)(\rho \cos \theta) = -2\rho^2 \sin \theta \cos \theta + 2\rho^2 \sin \theta \cos \theta = 0$$

۴-۲)

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = (2x+y)dx + (2y+x)dy$$

$$d^2 z = 2dx^2 + dx dy + 2dy^2 + dy dx = 2dx^2 + 2dx dy + 2dy^2$$

$$d^2 z = 2(0, 1) + 2(0, 1)(0, 2) + 2(0, 2) = 0, 2 + 0, 4 + 0, 8 = 0, 14$$

۵-۳) با تبدیل x به λx و y به λy خواهیم داشت:

$$z \rightarrow \frac{(\lambda x)(\lambda y)}{(\lambda x)^2 + (\lambda y)^2} = \frac{\lambda^2 xy}{\lambda^2(x^2 + y^2)} = \lambda^2 \frac{xy}{x^2 + y^2} = \lambda^2 z$$

۶-۲)

$$z_x = 2x \Rightarrow z_{xx} = 2, z_y = 2ay \Rightarrow z_{yy} = 2a, z_{xy} = z_{yx} = 0$$

$$|H_1| = z_{xx} = 2 > 0, |H_2| = \begin{vmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ z_{yx} & z_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2a \end{vmatrix} < 0 \Rightarrow 2a < 0 \Rightarrow a < 0$$

۷-۴)

$$\begin{cases} z_x = 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1 \\ z_y = 2y + 6 = 0 \Rightarrow y = -3 \end{cases} \Rightarrow \text{نقطه بحرانی } (1, -3)$$

$$z_{xx} = 2, z_{yy} = 2, z_{xy} = z_{yx} = 0 \Rightarrow |H_1| = 2 > 0, |H_2| = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0$$

۸-۴)

$$\begin{cases} z_x = y + 2x = 0 \\ z_y = x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow (0, 0) \text{ نقطه بحرانی}$$

۹-۱۱)

$$L = 5x^2 + 9y^2 - xy + \lambda(24 - x - 2y)$$

$$L_x = 10x - y - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 10x - y$$

$$L_y = 12y - x - 2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{12y - x}{2} \Rightarrow 10x - y = \frac{12y - x}{2} \Rightarrow 20x - 2y = 12y - x \Rightarrow y = \frac{3}{4}x$$

$$L_\lambda = 24 - x - 2y = 0 \Rightarrow 24 - x - 3x = 0 \Rightarrow x = 6 \Rightarrow y = 9$$

راه حل دیگر:

$$f(x, y) = 5x^2 + 9y^2 - xy, g(x, y) = x + 2y - 24$$

$$\frac{f_x}{g_x} = \frac{f_y}{g_y} \Rightarrow \frac{10x - y}{1} = \frac{12y - x}{2} \Rightarrow 21x = 14y \Rightarrow y = \frac{3}{4}x$$

$$g(x, y) \text{ در } (x, y) \text{ جاگذاری: } x + 2x - 24 = 0 \Rightarrow x = 6 \Rightarrow y = 9$$

۱۰-۴)

$$9 - x^2 - y^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 \leq 9$$

از طرفی همواره $x^2 + y^2 \geq 0$ است و بنابراین:

$$0 \leq 9 - x^2 - y^2 \leq 9 \Rightarrow 0 \leq z \leq 9 \equiv [0, 9]$$

۱۱-۲) شرط اول، مقدار تابع در نقطه $(0, 0)$ وجود دارد و برابر است با $F(0, 0) = 0$

شرط دوم، حد تابع در نقطه $(0, 0)$ را بررسی می‌کنیم. فرض کنید حد F از جهت $y = mx$ به سمت $(0, 0)$ میل کند.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx^2}{x^2 + m^2 x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx^2}{x^2(1+m^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} x \left(\frac{m}{1+m^2} \right)$$

به‌ازای مقادیر مختلف m حد تابع برابر صفر می‌شود. شرط سوم، چون مقدار تابع در نقطه $(0, 0)$ برابر حد تابع است بنابراین تابع $F(x, y)$ در نقطه $(0, 0)$ پیوسته است.

(۴)-۱۲

$$z = f(g(x, y)) \Rightarrow z_x = g'(x, y) \cdot f'(g(x, y))$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z_x = -\frac{y}{x^2} f' \left(\frac{y}{x} \right) \xrightarrow{x=y=1} \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{1} f' \left(\frac{1}{1} \right) = -\frac{1}{1} f'(1)$$

(۱)-۱۳

$$z = u^2 + v^2 = (e^{x^2+y^2})^2 + \left(\frac{x}{y} \right)^2 \Rightarrow z = e^{2(x^2+y^2)} + \frac{x^2}{y^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2(e^{2(x^2+y^2)})e^{2(x^2+y^2)} + \frac{2x}{y^2} \xrightarrow{x=y=1} \frac{\partial z}{\partial x} = 2e^2 + 2$$

$$|H_1| = z_{xx} = 2 > 0 \text{ و } |H_1| = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 4 = 2 < 0 \text{ زیرا } (1)-14$$

(۲)-۱۵

$$\begin{aligned} F(\lambda x, \lambda y, \lambda z) &= \frac{\lambda x + \lambda y + \lambda z}{\sqrt{\lambda^2 x^2 + \lambda^2 y^2 + \lambda^2 z^2}} = \frac{\lambda(x+y+z)}{\sqrt{\lambda^2(x^2+y^2+z^2)}} \\ &= \frac{\lambda(x+y+z)}{\lambda \sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \lambda^{-1} F(x, y, z) \end{aligned}$$

(۳)-۱۶

$$4 - x^2 - y^2 > 0 \Rightarrow x^2 + y^2 < 4$$

نقاط مذکور نقاط داخل دایره $x^2 + y^2 = 4$ است.

(۲)-۱۷

$$z^2 = xy - x^2 - y^2 \Rightarrow z = \sqrt{xy - x^2 - y^2} = (xy - x^2 - y^2)^{1/2}$$

$$2x - y = 1 \Rightarrow y - 2x = -1$$

$$z'_x = \frac{1}{2}(y - 2x)(xy - x^2 - y^2)^{-1/2} = \frac{1}{2}(-1)(xy - x^2 - y^2)^{-1/2} = -\frac{1}{2z}$$

(۳)-۱۸

$$z = (\rho \cos \theta)^2 + (\rho \sin \theta)^2 \Rightarrow z = \rho^2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \Rightarrow z = \rho^2 = x^2 + y^2$$

$$\frac{\partial z}{\partial \rho} = 2\rho, \frac{\partial z}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial z}{\partial \rho} \right)^2 + \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial z}{\partial \theta} \right)^2 = 4\rho^2 + \frac{1}{\rho^2}(0) = 4\rho^2 = 4(x^2 + y^2)$$

۱۹-۲) حد تابع در نقطه $(0, 0)$ را بررسی می‌کنیم. فرض کنید حد f در امتداد خط $y = mx$ به سمت $(0, 0)$ میل کند:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2 (x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 m^2 x^2 (x^2 - m^2 x^2)}{x^2 + m^2 x^2} = \frac{0}{1 + m^2} = 0$$

به‌ازای مقادیر مختلف m حد تابع برابر صفر می‌شود.

۲۰-۴) K و L را برابر می‌کنیم:

$$z \rightarrow a \lambda^{1/2} K^{1/2} \lambda^{1/2} L^{1/2} = \lambda^{1/2} a K^{1/2} L^{1/2} = \lambda^{1/2} z$$

۱-۲) (۲)

$$z_x = 2ax + y \Rightarrow z_{xx} = 2a, z_y = x + 2y \Rightarrow z_{yy} = 2, z_{xy} = z_{yx} = 1$$

$$|H| = 2a, |H| = \begin{vmatrix} 2a & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2a - 1 < 0 \Rightarrow a < \frac{1}{2}$$

۲۲-۳) (۳)

$$f(x, y) = -x^2 - 2y + xy, g(x, y) = x + y - 4$$

$$\frac{f_x}{g_x} = \frac{f_y}{g_y} \Rightarrow \frac{-2x + y}{1} = \frac{-2 + x}{1} \Rightarrow 3x - y = 2 \Rightarrow y = 3x - 2$$

$$x + 3x - 2 - 4 = 0 \Rightarrow 4x = 6 \Rightarrow x = \frac{3}{2}, \frac{3}{2} + y = 2 \Rightarrow y = \frac{5}{2}$$

راه حل دیگر:

$$z = -x^2 - 2y + xy, x + y = 4 \Rightarrow y = 4 - x$$

$$z = -x^2 - 2(4 - x) + x(4 - x) \Rightarrow z = -2x^2 + 6x - 8$$

$$z_x = -4x + 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}, y = 4 - \frac{3}{2} \Rightarrow y = \frac{5}{2}$$

۲۳-۱) شرط اول، مقدار تابع در نقطه $(0, 0)$ وجود دارد و برابر با صفر است یعنی $f(0, 0) = 0$.

شرط دوم، فرض کنید حد f در امتداد خط $y = mx$ به سمت $(0, 0)$ میل کند:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 m^2}{x^2 + m^2 x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \left(\frac{m^2}{1 + m^2} \right)$$

به‌ازای مقادیر مختلف m حد تابع برابر صفر می‌شود. شرط سوم، چون مقدار تابع در نقطه $(0, 0)$ برابر حد تابع است بنابراین تابع $f(x, y)$ در نقطه $(0, 0)$ پیوسته است.

۲۴-۳) (۳)

$$z = \text{Arc tan } \frac{x - y}{x + y} \Rightarrow \tan z = \frac{x - y}{x + y} \Rightarrow x \tan z + y \tan z = x - y \Rightarrow$$

$$x \tan z + y \tan z - x + y = 0$$

از طرفین معادله فوق به‌طور ضمنی مشتق y را نسبت به x به‌دست می‌آوریم:

$$\tan z + y' \tan z - 1 + y' = 0 \Rightarrow y'(1 + \tan z) = 1 - \tan z \Rightarrow y' = \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1 - \tan z}{1 + \tan z}$$

۲۵- (۲) به جواب تست شماره ۱۲ مراجعه کنید.

(۱۱)-۲۶

$$۲۵ - x^2 - y^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 \leq ۲۵$$

می‌دانیم $x^2 + y^2 \geq 0$ بنابراین $۲۵ - x^2 - y^2 \leq ۲۵$ یا $۰ \leq x^2 + y^2 \leq ۲۵$ یا $۰ \leq -x^2 - y^2 \leq ۲۵ - x^2 - y^2$

$$۰ \leq f(x, y) \leq ۵ \text{ یا } ۰ \leq \sqrt{۲۵ - x^2 - y^2} \leq \sqrt{۲۵}$$

(۱۱)-۲۷

(۱۱)-۲۸

$$dz = z_{xx}dx^2 + ۲z_{xy}dxdy + z_{yy}dy^2$$

$$z_x = \frac{۲xy^2}{x^2y^2} = \frac{۲}{x} \Rightarrow z_{xx} = -\frac{۲}{x^2}, z_y = \frac{۲x^2y}{x^2y^2} = \frac{۲}{y} \Rightarrow z_{yy} = -\frac{۲}{y^2}, z_{xy} = 0$$

$$dz = -\frac{۲dx^2}{x^2} - \frac{۲dy^2}{y^2} \xrightarrow{x=y=۱} dz = -۲dx^2 - ۲dy^2 = -۲(dx^2 + dy^2)$$

(۲)-۲۹

$$z_x = ۲ax + y \Rightarrow z_{xx} = ۲a, z_y = ۲by + x \Rightarrow z_{yy} = ۲b, z_{xy} = z_{yx} = ۱$$

در صورتی که دترمینان هسین تابع $z = f(x, y)$ منفی باشد، نقطه بحرانی زینی است.

$$|H_1| = \begin{vmatrix} ۲a & ۱ \\ ۱ & ۲b \end{vmatrix} = ۲ab - ۱ < 0 \Rightarrow ۲ab < ۱ \Rightarrow ab < \frac{1}{۲}$$

(۴)-۳۰

$$z_x = ۸ - ۴x + ۱۲y \Rightarrow z_{xx} = -۴, z_y = ۱۲x - ۲۴y + ۶ \Rightarrow z_{yy} = -۲۴, z_{xy} = z_{yx} = ۱۲$$

$$|H_1| = -۴ < 0, |H_2| = \begin{vmatrix} -۴ & ۱۲ \\ ۱۲ & -۲۴ \end{vmatrix} = ۹۶ - ۱۴۴ = -۴۸ < 0 \Rightarrow \text{نوع نقطه بحرانی زینی است}$$

(۳)-۳۱

$$x + y = ۴ \Rightarrow y = ۴ - x \Rightarrow z = x(۴ - x) = ۴x - x^2 \Rightarrow z'_x = ۴ - ۲x = 0 \Rightarrow$$

$$x = ۲, ۲ + y = ۴ \Rightarrow y = ۲, z = ۲ \times ۲ = ۴ \Rightarrow \text{نقطه بحرانی } (۲, ۲, ۴)$$

x	$-\infty$	۲	$+\infty$
z_x		$+$	$-$
		$\max$	

(۱)-۳۲

$$۳۲- (۱) \text{ از طرفین معادله } \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \ln \sqrt{x^2 + y^2} \text{ دیفرانسیل می‌گیریم:}$$

$$\frac{1/x}{1 + y^2/x^2} dy + \frac{-y/x^2}{1 + y^2/x^2} dx = \frac{۲x/۲\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx + \frac{۲y/۲\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} dy$$

$$\left(\frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y}{x^2 + y^2}\right) dy = \left(\frac{x}{x^2 + y^2} + \frac{y}{x^2 + y^2}\right) dx \Rightarrow (x - y)dy = (x + y)dx$$

$$dy = \frac{x + y}{x - y} dx \xrightarrow{x=1} dy = \frac{1 + y}{1 - y} dx$$

۳۴- (۲) عبارت $(x^y + 1)/(y^x + 1)$ به‌ازای همه مقادیر x و y مثبت است، بنابراین گزینه‌های ۱ و ۳ غلط هستند و از طرفی $(x^y + 1)/(y^x + 1)$ به‌ازاء هیچ مقدار x و y صفر نخواهد شد، بنابراین گزینه ۴ غلط است.

۳۵- (۱)

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \ln\left(1 + \frac{y}{x}\right) + x \cdot \frac{-y/x^2}{1 + y/x} + y \cdot \frac{1/y}{1 + x/y} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \ln\left(1 + \frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x+y} + \frac{y}{x+y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x \cdot \frac{1/x}{1 + y/x} + \ln\left(1 + \frac{x}{y}\right) + y \cdot \frac{-x/y^2}{1 + x/y} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{x+y} + \ln\left(1 + \frac{x}{y}\right) - \frac{x}{x+y}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = \ln\left(1 + \frac{y}{x}\right) \\ \frac{\partial z}{\partial y} = \ln\left(1 + \frac{x}{y}\right) \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = \ln\left(1 + \frac{y}{x}\right) + \ln\left(1 + \frac{x}{y}\right) = \ln \frac{(x+y)^2}{xy}$$

۳۶- (۱)

$$z_x = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial z} = -\frac{F_1 + 2xF_2}{F_1 + 2zF_2}$$

۳۷- (۳) x و y را به λx و λy تبدیل می‌کنیم.

$$\begin{aligned} z &\longrightarrow e^{\lambda x/\lambda y} + e^{\lambda y/\lambda x} + \log(\lambda x) - \log(\lambda y) = e^{x/y} + e^{y/x} + \log \lambda + \log x - \log \lambda - \log y \\ &= e^{x/y} + e^{y/x} + \log x - \log y = \lambda^* z \end{aligned}$$

۳۸- (۴) معادله $e^x dy + ye^x dx + x^y dy + 2xy dx = 0$ به‌اینکه تابع از نقطه $A(0, 1)$ می‌گذرد، داریم:

$$e^1 + 0 + c = 0 \Rightarrow c = -1$$

پس تابع اصلی به‌صورت $ye^x + x^y - 1 = 0$ است.

$$x = 1 \Rightarrow ye^1 + (1)^y - 1 = 0 \Rightarrow y(e + 1) = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{e+1}$$

۳۹- (۱)

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 2(x-1)e^{(x-1)^2+y^2+xy} = 0 \Rightarrow x-1=0 \Rightarrow x=1 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = (2y+2)e^{(x-1)^2+y^2+xy} = 0 \Rightarrow 2y+2=0 \Rightarrow y=-1 \end{cases} \Rightarrow z = e^{-2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2(x-1)^2 e^{(x-1)^2+y^2+xy} + 2e^{(x-1)^2+y^2+xy} \frac{x=1}{y=2} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2e^{-2} > 0$$

۴۰- (۲)

$$z = f(K, L), K = g(x, y), L = h(x, y)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial K} \cdot \frac{\partial K}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial L} \cdot \frac{\partial L}{\partial x} \Rightarrow z_x = z_K \cdot K_x + z_L \cdot L_x$$

۴۱- (۱) x و y را به λx و λy تبدیل می‌کنیم.

تابع z همگن از درجه صفر است ($n = 0$) $\Rightarrow \lambda^0 z = z \Rightarrow (n = 0)$

قضیه اولر: $x \cdot z_x + y \cdot z_y = n z = (0)(z) = 0$

۴۲- (۲)

$$\begin{cases} z_x = 2x - y - 3 = 0 \\ z_y = -x + 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y = 3 \\ -x + 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y = 3 \\ -2x + 4y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 2, y = 1$$

$z = (2)^2 - (2)(1) + (1)^2 - 3(2)$ بنابراین نقطه بحرانی تابع f به صورت $(2, 1, -3)$ است.

۴۳- (۴)

$$z_{xx} = 2, z_{yy} = 2, z_{xy} = z_{yx} = -1$$

$$|H_1| = 2 > 0, |H_2| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 > 0 \Rightarrow \text{نوع نقطه می‌نیم است}$$

۴۴- (۴) $x^2 + 2y^2 \leq 10$ یا $10 - x^2 - 2y^2 \geq 0$ بنابراین برد این تابع را با توجه به اینکه ماکزیم مقدار زیر رادیکال ۱۰ و حداقل آن صفر است، تعیین می‌کنیم:

$$R_f = \{z | 0 \leq z \leq \sqrt{10}, z \in \mathbb{R}\} = [0, \sqrt{10}]$$

۴۵- (۳)

$$z_x = 2x + 2y \Rightarrow z_{xx} = 2, z_{xy} = 2$$

$$z_y = 2x + 2y \Rightarrow z_{yy} = 2$$

$$d^2z = z_{xx}dx^2 + 2z_{xy}dxdy + z_{yy}dy^2 = 2dx^2 + 4dxdy + 2dy^2$$

$$dx = dy = 0, 1 \Rightarrow d^2z = 2(0, 1) + 4(0, 1) + 2(0, 1) = 0, 14$$

۴۶- (۱)

$$\begin{aligned} f(\lambda x, \lambda y) &= \frac{\lambda x}{\lambda^2 x^2 + \lambda^2 y^2} + \frac{\lambda x \lambda y}{\lambda^2 x^2 + \lambda^2 y^2} = \frac{\lambda x}{\lambda^2(x^2 + y^2)} + \frac{\lambda^2 xy}{\lambda^2(x^2 + y^2)} \\ &= \frac{x}{\lambda(x^2 + y^2)} + \frac{xy}{\lambda(x^2 + y^2)} = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{xy}{x^2 + y^2} \right) = \lambda^{-1} z \end{aligned}$$

۴۷- (۴)

$$z = f(u, v)$$

$$z'_x = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = f'_1(2x) + \frac{1}{y} f'_2$$

۴۸- (۲)

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ 2x + 4y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x - 2y = 0 \\ 2x + 4y = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{2y = 0 \Rightarrow y = 0, x = 0 \Rightarrow z = 10}{2y = 0 \Rightarrow y = 0, x = 0 \Rightarrow z = 10}$$

(۴)-۴۹

$$z_x = 2x + 2y \Rightarrow z_{xx} = 2, z_{xy} = 2$$

$$z_y = 2x + 4y \Rightarrow z_{yy} = 4, z_{yx} = 2$$

$$|H_1| = 2 > 0, |H_2| = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 > 0 \Rightarrow \text{نوع نقطه می‌نیم است.}$$

(۴)-۵۰

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{y} + \frac{y}{x^2} \Rightarrow x \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \\ \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} - \frac{1}{x} \Rightarrow y \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x}{y} - \frac{y}{x} \end{cases} \Rightarrow x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

راه حل دیگر:

$$z \rightarrow \frac{\lambda x}{\lambda y} - \frac{\lambda y}{\lambda x} = \lambda \left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x} \right) = \lambda' z \Rightarrow n = 0$$

$$\text{قضیه اولر: } x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = n z = (0)(z) = 0$$

(۲)-۵۱

$$\begin{cases} z_x = 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1 \\ z_y = 2y - 4 = 0 \Rightarrow y = 2 \end{cases} \Rightarrow z = 1 - 2 + 4 - 8 + 10 = 5 \Rightarrow (1, 2, 5)$$

(۱)-۵۲

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y e^{xy} + y \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = x y e^{xy} + e^{xy} + 1 \xrightarrow{x=y=0} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2$$

(۲)-۵۳

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = (2x + 2y)dx + (2y + 2x)dy \xrightarrow{x=y=1} dz = 4dx + 4dy$$

(۱)-۵۴

$$\begin{cases} z_x = 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1 \\ z_y = 2y - 2 = 0 \Rightarrow y = 1 \end{cases} \Rightarrow z = 10 \Rightarrow \text{نقطه بحرانی } (1, 1, 10)$$

$$z_{xx} = 2, z_{yy} = 2, z_{xy} = z_{yx} = 0$$

$$|H_1| = 2 > 0, |H_2| = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0 \Rightarrow \text{نقطه می‌نیم است } (1, 1, 10)$$

(۱)-۵۵

$$x + y = 2 \Rightarrow y = 2 - x \Rightarrow z = x^2 + 4 - 4x + x^2 = 2x^2 - 4x + 4$$

$$z_x = 4x - 4 = 0 \Rightarrow x = 1, 1 + y = 2 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow (1, 1, 2)$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
z_x		$-$	$+$
min			

راه دیگر تعیین نقطه $(1, 1, 2)$ اگر مجموع دو متغیر مقداری ثابت باشد مجموع مربعات آن‌ها، مجموع عکس آن‌ها و مجموع مکعبات آن‌ها وقتی $\min$ است که متغیرها با هم برابر باشند. پس:

$$x = y = 1 \Rightarrow z = 2$$

(۱)-۵۶

$$z \rightarrow \frac{1}{\lambda x} + \frac{1}{\lambda y} = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) = \lambda^{-1} z \Rightarrow n = -1$$

$$x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = nz = -z$$

(۳)-۵۷ اگر $F(x, y, z) = -xyz + x^2 + y^2 + z^2 = 0$ داریم:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial F / \partial x}{\partial F / \partial z} = \frac{-yz - 2x}{-xyz + 2z} \xrightarrow{x=y=z=1} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-3-2}{-3+2} = -1$$

(۴)-۵۸

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{y} + \frac{y}{x^2} \Rightarrow x \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \\ \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} - \frac{1}{x} \Rightarrow y \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x}{y} - \frac{y}{x} \end{cases} \Rightarrow x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

(۳)-۵۹

$$2x + y = 8 \Rightarrow y = 8 - 2x \Rightarrow z = x(8 - 2x) = 8x - 2x^2$$

$$z_x = 8 - 4x = 0 \Rightarrow x = 2, 2(2) + y = 8 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow z = 2 \times 4 = 8$$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
z_x		$+$	$-$
min			

(۲)-۶۰

$$\begin{cases} z_x = -2x + 2 = 0 \Rightarrow x = 1 \\ z_y = -2y + 4 = 0 \Rightarrow y = 2 \end{cases} \Rightarrow z = 8 - 1 + 2 - 2 + 4 = 11$$

$$z_{xx} = -2, z_{yy} = -2, z_{xy} = z_{yx} = 0$$

$$|H_1| = -2 < 0, |H_2| = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4 > 0 \Rightarrow (1, 2) \text{ ماکزیمم نسبی دارد}$$

(۲)-۶۱

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{2x/2\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{x^2+y^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{(x^2+y^2) - 2x^2}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} \xrightarrow{x=1, y=2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{4-1}{(1+4)^2} = \frac{3}{25} \end{aligned}$$

۶۲- (۳) اگر $L(x, y, z) = e^{x+y+z} - xyz - 1$ داریم:

$$z_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-\partial F / \partial x}{\partial F / \partial z} = \frac{yz - 1e^{x+y+z}}{1e^{x+y+z} - xy} \xrightarrow{x=y=z=0} z_x = \frac{0 - 1e^0}{1e^0} = -\frac{1}{1}$$

(۲)-۶۳

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = (1x - y)dx + (1y - x)dy$$

$$x = y = 1, dx = dy = 0, 1 \Rightarrow dz = (1 - 1)(0, 1) + (1 - 1)(0, 1) = 0, 2$$

(۳)-۶۴

$$\begin{cases} z_x = -1x = 0 \Rightarrow x = 0 \\ z_y = -1y = 0 \Rightarrow y = 0 \end{cases} \Rightarrow z = 0 - 0 + 6 = 6$$

(۱)-۶۵

$$z_x = 1x - 1y + 5 \Rightarrow z_{xx} = 1, z_y = -1x + 1y - 3 \Rightarrow z_{yy} = 1, z_{xy} = z_{yx} = -1$$

$$|H_1| = z_{xx} = 1 > 0, |H_1| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 1 = 0 > 0 \Rightarrow \text{نقطه بحرانی می‌نیم است}$$

(۳)-۶۶

$$4 - 2x^2 - y^2 \geq 0 \Rightarrow 2x^2 + y^2 \leq 4$$

می‌دانیم حداقل $2x^2 + y^2$ برابر صفر است، بنابراین $0 \leq 2x^2 + y^2 \leq 4$ یا $-4 \leq -2x^2 - y^2 \leq 0$ لذا $0 \leq 4 - 2x^2 - y^2 \leq \sqrt{4 - 2x^2 - y^2} \leq \sqrt{4}$ یا $0 \leq z \leq 2$

(۲)-۶۷

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1(x-a)/1\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}} = \frac{x-a}{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{(x-a)^2 + (y-b)^2 - 2(x-a)^2}{[(x-a)^2 + (y-b)^2]^2} = \frac{(y-b)^2 - (x-a)^2}{[(x-a)^2 + (y-b)^2]^2}$$

به‌طور مشابه خواهیم داشت:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{(x-a)^2 - (y-b)^2}{[(x-a)^2 + (y-b)^2]^2}$$

در نتیجه:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

(۴)-۶۸

$$\begin{cases} z_x = -1x = 0 \Rightarrow x = 0 \\ z_y = -1y = 0 \Rightarrow y = 0 \end{cases} \Rightarrow z = 4 - 0 - 0 \Rightarrow z = 4 \Rightarrow \text{نقطه بحرانی } (0, 0, 4)$$

$$z_{xx} = -1, z_{yy} = -1, z_{xy} = z_{yx} = 0$$

$$|H_1| = -1 < 0, |H_1| = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 > 0 \Rightarrow \text{نقطه } (0, 0, 4) \text{ ماکزیم نسبی است}$$

(۱)-۶۹

$$x - y = 0 \Rightarrow y = x, z = -x^2 - x^2 + 1 \Rightarrow z = -2x^2 + 1$$

$$z_x = -4x = 0 \Rightarrow x = 0, 0 - y = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow z = -0 - 0 + 1 = 1$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
z_x	$+$	0	$-$

max

(۳)-۷۰

$$x + y = 2 \Rightarrow y = 2 - x, z = 4 - x^2 - (2 - x)^2 = -2x^2 + 4x$$

$$z_x = -4x + 4 = 0 \Rightarrow x = 1$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
z_x	$+$	0	$-$

max

(۳)-۷۱

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = e^y + ye^x \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = ye^x \\ \frac{\partial z}{\partial y} = xe^y + e^x \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = xe^y \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = ye^x + xe^y = z$$

(۳)-۷۲

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = ydx + xdy \xrightarrow{x=y=1} dz = dx + dy$$

(۴)-۷۳

$$\begin{cases} z_x = -2x + 2 = 0 \Rightarrow x = 1 \\ z_y = -2y + 2 = 0 \Rightarrow y = 1 \end{cases} \Rightarrow z = 2 \cdot 0 - 1 - 1 + 2 + 2 = 2$$

(۳)-۷۴ اگر مجموع دو متغیر مقداری ثابت باشد، حاصل ضرب آنها وقتی ماکزیمم است که متغیرها با هم برابر باشند.

$$x = y = 1 \Rightarrow z = 1 \times 1 = 1$$

(۳)-۷۵

$$z = (r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2 - 2r^2 \sin \theta \cos \theta = r^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) - r^2 \sin 2\theta$$

$$z = r^2 - r^2 \sin 2\theta, \frac{\partial z}{\partial \theta} = -2r^2 \cos 2\theta$$

(۲)-۷۶

$$z \rightarrow \frac{\lambda^2 x^2}{2\lambda^2 y^2} + \frac{\lambda^2 y^2}{2\lambda^2 x^2} = \lambda^2 \left(\frac{x^2}{2y^2} + \frac{y^2}{2x^2} \right) = \lambda^2 z \Rightarrow n = 0$$

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = nz = (0)(z) = 0 \quad \text{قضیه اولر:}$$

(۱)-۷۷

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial z} = -\frac{2x + yz - y}{xy} \xrightarrow{(1,1,1)} \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2+1-1}{1} = -2$$

(۴)-۷۸

$$\begin{cases} z_x = 2x + 2 = 0 \Rightarrow x = -1 \\ z_y = 4y - 4 = 0 \Rightarrow y = 1 \end{cases} \Rightarrow z = -3 \Rightarrow \text{نقطه بحرانی } (-1, 1, 3)$$

(۱)-۷۹

$$z = x^t - y^t = (t \cos t)^t - (t \sin t)^t = t^t \cos^t t - t^t \sin^t t = t^t (\cos^t t - \sin^t t) \Rightarrow z = t^t \cos 2t$$

$$\frac{dz}{dt} = (2t)(\cos 2t) + (-2 \sin 2t)(t^t) \xrightarrow{t=\pi/4} \frac{dz}{dt} = 0 - 2 \times \frac{\pi^{\pi}}{16} = \frac{-\pi^{\pi}}{8}$$

از فرمول $dz/dt = \partial z/\partial x \cdot dx/dt + \partial z/\partial y \cdot dy/dx$ هم قابل حل است. اما راه حل بالا آسان‌تر می‌باشد.

(۴)-۸۰

$$z_x = 2x + 4y \Rightarrow z_{xx} = 2, z_{xy} = 4$$

$$z_y = 4x + 4y \Rightarrow z_{yy} = 4$$

$$d^2z = z_{xx}dx^2 + 2z_{xy}dxdy + z_{yy}dy^2$$

$$d^2z = 2dx^2 + 8dxdy + 4dy^2$$

(۳)-۸۱

$$x^t + y^t \geq x^t \geq 0 \Rightarrow \frac{x^t + y^t}{x^t + y^t} \geq \frac{x^t}{x^t + y^t} \geq \frac{0}{x^t + y^t} \Rightarrow$$

$$1 \geq \frac{x^t}{x^t + y^t} \geq 0 \Rightarrow 0 \leq z \leq 1$$

(۴)-۸۲

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x - y = 0 \\ -x + 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x - y = 0 \\ -4x + 4y = 0 \end{cases}$$

$$\frac{4y = 0 \Rightarrow y = 0, x = 0 \Rightarrow z = 10$$

(۳)-۸۳

$$x + 2y = 10 \Rightarrow x = 10 - 2y, z = (10 - 2y)^t + y^t$$

$$z_y = -2^t(10 - 2y) + y^{t-1} = 0 \Rightarrow 10^t y = 4^t \Rightarrow y = 4, x = 2$$

$$z = (2)^t + (4)^t = 4 + 16 = 20$$

y	-∞	4	+∞
z _y		-	+
		min	

(۱)-۸۴

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{x} + e^y \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{1}{x} + e^y \xrightarrow{x=1, y=0} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 1 + e = 2$$

(۲)-۸۵

$$z \longrightarrow e^{\lambda y / \lambda x} = \lambda' e^{y/x} \Rightarrow n = 0, x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = nz = 0$$

(۴)-۸۶

$$\begin{cases} z_x = 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1 \\ z_y = 2y + 4 = 0 \Rightarrow y = -2 \end{cases} \Rightarrow z = -3 \Rightarrow \text{نقطه بحرانی } (1, -2, -3)$$

$$z_{xx} = 2, z_{yy} = 2, z_{xy} = z_{yx} = 0$$

$$|H_1| = 2 > 0, |H_2| = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0 \Rightarrow \text{نقطه بحرانی می نیمم است}$$

(۲)-۸۷

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = \left(\ln y - \frac{1}{x^2} e^{1/x} \right) dx + \left(\frac{x}{y} \right) dy \xrightarrow{x=y=1} = -e dx + dy = dy - e dx$$

(۲)-۸۸ مشتق ضمنی:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial F / \partial x}{\partial F / \partial z} = -\frac{yz + 2xy^2 z^2}{xy + 2x^2 y^2 z} \xrightarrow{x=y=z=1} \frac{\partial z}{\partial x} = -1$$

(۲)-۸۹

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x/2\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{x^2+y^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} \xrightarrow{x=y=1} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{2}$$

(۱)-۹۰

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{x^2+y^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2(x^2+y^2) - 4x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{x^2+y^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2(x^2+y^2) - 4y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2(y^2-x^2) + 2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} = 0$$

(۴)-۹۱

$$z \longrightarrow \frac{\lambda x}{\lambda y} - \frac{\lambda y}{\lambda x} = \lambda' \left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x} \right) = \lambda' z \Rightarrow n = 0, x \cdot z'_x + y \cdot z'_y = nz = 0$$

(۳)-۹۲

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = 2x dx + 2y dy \xrightarrow[x=dy=1]{x=y=1} z = 0, 2 + 0, 2 = 0, 4$$

(۴)-۹۳

$$\begin{cases} z_x = -2x + 2 = 0 \Rightarrow x = 1 \\ z_y = -2y + 4 = 0 \Rightarrow y = 2 \end{cases} \Rightarrow z = -(1)^2 + 2(1) - (2)^2 + 4(2) + 2^0 = 25$$

$$z_{xx} = -2, z_{yy} = -2, z_{xy} = z_{yx} = 0$$

$$|H_1| = -2 < 0, |H_2| = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4 > 0 \Rightarrow \text{نقطه بحرانی ماکزیمم است}$$

(۳)-۹۴

$$x + y = 4 \Rightarrow y = 4 - x, z = x^2 + (16 - 8x + x^2) \Rightarrow z_x = 4x - 8 = 0$$

$$\Rightarrow x = 2, 2 + y = 4 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow z = 4 + 4 = 8 \Rightarrow (2, 2, 8)$$

(۳)-۹۵

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial z} = -\frac{6x + yz}{-10z + xy} \xrightarrow{x=y=z=1} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{7}{9}$$

(۲)-۹۶

$$z \longrightarrow \lambda^T x^T + \lambda^T y^T = \lambda^T (x^T + y^T) = \lambda^T z \Rightarrow n = 2, x \cdot z'_x + y \cdot z'_y = nz = 2z$$

(۱)-۹۷

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z'_x = \frac{x - y - (x + y)}{(x - y)^2} = \frac{-2y}{(x - y)^2} \xrightarrow{x=2, y=1} z'_x = -2$$

(۴)-۹۸

$$\begin{cases} z_x = y - 1 = 0 \Rightarrow y = 1 \\ z_y = x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \end{cases} \Rightarrow z = 1 - 1 - 1 = -1 \Rightarrow (1, 1, -1) \text{ نقطه بحرانی}$$

(۴)-۹۹

$$z_x = y - 1 \Rightarrow z_{xx} = 0, z_y = x - 1 \Rightarrow z_{yy} = 0, z_{xy} = z_{yx} = 1$$

$$|H_1| = 0, |H_2| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0 \Rightarrow \text{نقطه بحرانی زینی است}$$

(۳)-۱۰۰

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = 2x dx + 2y dy \xrightarrow{x=y=1, dx=dy=1} dz = 0/2 + 0/2 = 0/2$$

(۱)-۱۰۱

$$x + y = 2 \Rightarrow y = 2 - x \Rightarrow z = 2x - x^2 \Rightarrow z_x = 2 - 2x = 0 \Rightarrow$$

$$x = 1 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow z = 1 \times 1 = 1$$

 ۱۰۲- (۴) z_x را در سؤال قبل تعیین علامت می‌کنیم و نوع نقطه بحرانی را مشخص می‌کنیم:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
z_x		$+$	$-$
		max	

(۴)-۱۰۳

$$4 - x^2 - y^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 \leq 4$$

(۱)-۱۰۴

$$9 - x^2 - 2y^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + 2y^2 \leq 9$$

می‌دانیم $x^2 + 2y^2 \geq 0$ بنابراین $9 - x^2 - 2y^2 \leq 9$ یا $-9 \leq -x^2 - 2y^2 \leq 0$ یا $0 \leq x^2 + 2y^2 \leq 9$ و در نتیجه $0 \leq \sqrt{9 - x^2 - 2y^2} \leq \sqrt{9}$

(۲)-۱۰۵

$$dz = z_{xx}dx^2 + 2z_{xy}dxdy + z_{yy}dy^2$$

$$z_x = 2x \Rightarrow z_{xx} = 2, z_y = 2y \Rightarrow z_{yy} = 2, z_{xy} = 0$$

$$dz = 2dx^2 + 2dy^2$$

(۲)-۱۰۶

$$\begin{cases} z_x = 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1 \\ z_y = 2y = 0 \Rightarrow y = 0 \end{cases} \Rightarrow z = 1 + 0 - 2 = -1 \Rightarrow \text{نقطه بحرانی } (1, 0, -1)$$

(۱)-۱۰۷

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x(2xy) - 2y(x^2 + y^2)}{2x^2y^2} \xrightarrow{x=y=1} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{4(4) - 2(4+1)}{16} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

(۱)-۱۰۸

$$z \longrightarrow \frac{\lambda x}{2\lambda y} + \frac{2\lambda y}{\lambda x} = \lambda \cdot \left(\frac{x}{2y} + \frac{y}{x} \right) = \lambda \cdot z \Rightarrow n = 0, x \cdot z'_x + y \cdot z'_y = nz = 0$$

(۲)-۱۰۹

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = (2x + y)dx + (2y + x)dy \xrightarrow{x=y=1} dz = 3dx + 3dy$$

(۲)-۱۱۰

$$x + y = 2 \Rightarrow y = 2 - x, z = x^2 + (2 - x)^2 \Rightarrow z_x = 2x - 2(2 - x) = 0$$

$$\Rightarrow x = 2, 2 + y = 2 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow z = 2^2 + 0^2 = 4$$

(۳)-۱۱۱

$$z = (r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2 - 2(r \cos \theta)(r \sin \theta) = r^2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) - 2r^2 \sin \theta \cos \theta$$

$$z = r^2 - r^2 \sin 2\theta \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial r} = 2r - 2r \sin 2\theta = 2r - 2r \sin \theta \cos \theta$$

(۱)-۱۱۲

$$z \rightarrow \frac{\lambda^T x^T}{2\lambda^T y^T} + \frac{2\lambda^T y^T}{\lambda^T x^T} = \lambda^T \left(\frac{x^T}{2y^T} + \frac{2y^T}{x^T} \right) = \lambda^T z \Rightarrow n = 0$$

$$\text{قضیه اولر: } x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = n z = 0$$

۱۱۳-(۳) مشتق ضمنی:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial F / \partial x}{\partial F / \partial z} = -\frac{2x - 5y + 3}{2z - 2y} \stackrel{(1,1,2)}{=} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{0}{2} = 0$$

(۴)-۱۱۴

$$9 - x^T - y^T \geq 0 \Rightarrow x^T + y^T \leq 9$$

می‌دانیم $x^T + y^T \geq 0$ بنابراین $0 \leq x^T + y^T \leq 9$ یا $-9 \leq -x^T - y^T \leq 0$ یا $0 \leq 9 - x^T - y^T \leq 9$ و در نتیجه $0 \leq z \leq \sqrt{9 - x^T - y^T} \leq \sqrt{9}$.

(۱)-۱۱۵

$$x + 2y = 5 \Rightarrow x = 5 - 2y, z = (5 - 2y)^T + y^T$$

$$z_x = -2(5 - 2y) + 2y = 0 \Rightarrow -20 + 4y + 2y = 0 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow x = 1$$

$$\Rightarrow z = 4 + 1 = 5 \Rightarrow \text{نقطه بحرانی } (1, 2, 5)$$

۱۱۶-(۱) z_x را در سؤال قبل تعیین علامت می‌کنیم تا نوع نقطه بحرانی مشخص گردد.

y	$-\infty$	2	$+\infty$
z_y		$-$	$+$

min

(۲)-۱۱۷

$$z = f(u, v)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = f'_1(2x) + f'_2(\lambda xy)$$

$$x = 2, y = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = 2f'_1 + \lambda f'_2$$

(۳)-۱۱۸

$$z'_x = -\frac{\partial F}{\partial F} = -\frac{4x - 2yz}{-2z - 2xy} \stackrel{x=y=z=1}{=} z'_x = -\frac{4-2}{-2-2} = \frac{1}{2}$$

(۴)-۱۱۹

$$4q_1 + \lambda q_2 = 160 \Rightarrow q_1 = 40 - 2q_2 \Rightarrow U = (40 - 2q_2)q_2 \Rightarrow$$

$$U = 40q_2 - 2q_2^2 \Rightarrow U_{q_2} = 40 - 4q_2 = 0 \Rightarrow q_2 = 10, q_1 = 20$$

$$U = 20 \times 10 = 200$$

پاسخ تشریحی تست‌های آزمون کارشناسی ارشد

«سری‌ها»

۱-۴) می‌دانیم بسط سری e^x با استفاده از سری مک‌لورن به صورت زیر است:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

و در نتیجه:

$$e^1 = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$$

بنابراین حاصل سری e می‌باشد که بین ۲ و ۳ قرار دارد، لذا $2 < e < 3$.

۲-۲)

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)x}{1!} + \frac{f''(0)x^2}{2!} + \dots + \frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!} + \dots$$

$$f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x \Rightarrow f''(x) = e^x \Rightarrow f'''(x) = e^x \Rightarrow \dots$$

$$f(0) = 1, f'(0) = 1, f''(0) = 1, f'''(0) = 1, \dots$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

۳-۱) جمله عمومی سری $1 + \frac{5^2}{2!} + \frac{5^3}{3!} + \dots$ به صورت $u_n = \frac{5^n}{n!}$ است. با استفاده از آزمون دالامبر داریم:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5^{n+1}/(n+1)!}{5^n/n!} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5^{n+1}n!}{5^n(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5}{n+1} = 0 < 1 \Rightarrow \text{همگرا}$$

۴-۳)

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)x}{1!} + \frac{f''(0)x^2}{2!} + \dots + \frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!} + \dots$$

$$f(x) = \ln(1+x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x} \Rightarrow f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} \Rightarrow f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3} \Rightarrow \dots$$

$$f(0) = 0, f'(0) = 1, f''(0) = -1, f'''(0) = 2, \dots$$

$$f(x) = \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{x^n}{n}$$

۵-۴)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{x^{n+1}/(n+2)}{x^n/(n+1)} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{(n+1)x}{n+2} \right| = |x| \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n+2} = |x|$$

فاصله همگرایی $|x| < 1 \Rightarrow -1 < x < 1$ شعاع همگرایی $R = 1$ $\Rightarrow R = 1/n+2 = 1/3 \Rightarrow R = 1$

۶-۳)

$$S_n = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots$$

$$S_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - 0 = 1$$

۷-(۳) داریم:

$$S_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

$$u_1 = 1 - \frac{1}{2}, u_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}, u_3 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}, \dots, u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \Rightarrow$$

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

پاسخ تشریحی تست‌های آزمون کارشناسی ارشد

«معادلات دیفرانسیل»

۱-(۴)

$$y'' + 4y = 0 \Rightarrow k^2 + 4 = 0 \Rightarrow k^2 = -4 \Rightarrow k = \pm 2i \Rightarrow a = 0, b = 2$$

$$y = e^{ax}(c_1 \cos bx + c_2 \sin bx) \Rightarrow y = e^{0 \cdot x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x) \Rightarrow$$

$$y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$$

۲-(۴)

$$(y+1)dx - \tan x dy = 0 \Rightarrow (y+1)dx = \tan x dy \Rightarrow \frac{dx}{\tan x} = \frac{dy}{y+1} \Rightarrow$$

$$\frac{dx}{\tan x} - \frac{dy}{y+1} = 0 \Rightarrow \int \frac{dx}{\tan x} - \int \frac{dy}{y+1} = 0 \Rightarrow \int \frac{\cos x}{\sin x} dx - \ln(y+1) = 0$$

$$\Rightarrow \ln \sin x - \ln(y+1) = c \Rightarrow \ln \frac{\sin x}{y+1} = c \Rightarrow \frac{\sin x}{y+1} = e^c = c \Rightarrow$$

$$cy + c = \sin x \Rightarrow y = \frac{1}{c} \sin x - 1 \Rightarrow y = c \sin x - 1$$

۳-(۳)

$$y'' - 3y' + 2y = e^{rx}, k^2 - 3k + 2 = 0 \Rightarrow k_1 = 1, k_2 = 2$$

$$\Delta > 0 \Rightarrow y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x} + G(x) \Rightarrow y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + G(x) \xrightarrow{c_1 = c_2 = 0} y = G(x)$$

$$G(x) = ae^{rx} \Rightarrow G'(x) = 2ae^{rx} \Rightarrow G''(x) = 4ae^{rx}$$

$$y'' - 3y' + 2y = e^{rx} \Rightarrow 4ae^{rx} - 3ae^{rx} + 2ae^{rx} = e^{rx} \Rightarrow 2ae^{rx} = e^{rx} \Rightarrow a = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$G(x) = \frac{1}{2} e^{rx} \Rightarrow y = \frac{1}{2} e^{rx}$$

۴-(۴)

$$(y+3)dx + \tan x dy = 0 \Rightarrow (y+3)dx = -\tan x dy \Rightarrow \frac{dx}{\tan x} = -\frac{dy}{y+3} \Rightarrow$$

$$\frac{dx}{\tan x} + \frac{dy}{y+3} = 0 \Rightarrow \int \frac{dx}{\tan x} + \int \frac{dy}{y+3} = 0 \Rightarrow \int \frac{\cos x}{\sin x} dx + \ln(y+3) = 0$$

$$\Rightarrow \ln |\sin x| + \ln(y+3) = c \Rightarrow \ln |\sin x|(y+3) = c \Rightarrow |\sin x|(y+3) = e^c = c$$

$$\Rightarrow y+3 = \frac{c}{|\sin x|} \Rightarrow y = \frac{c}{|\sin x|} - 3$$

پاسخ تشریحی تست‌های آزمون کارشناسی ارشد

«معادلات تفاضلی»

۱- (۴) معادله به صورت کلی $y_{x+1} = Ay_x + B$ است، که $A = 1$ بنابراین:

$$y_x = y_0 + Bx \Rightarrow y_x = 1 - x$$

(۱)-۲

$$y_{x+2} - y_x = 0 \Rightarrow k^2 - 1 = 0 \Rightarrow k^2 = 1 \Rightarrow k = \pm 1$$

$$\Delta > 0 \Rightarrow y_x = c_1 k_1^x + c_2 k_2^x \Rightarrow y_x = c_1 (1)^x + c_2 (-1)^x \xrightarrow{c_1=c_2=1}$$

$$y_x = (1)^x + (-1)^x = 1 + (-1)^x$$

۲- (۱) می‌دانیم جواب هر معادله در خود آن معادله صدق می‌کند:

$$y_{x+1} - y_x = \frac{(x+1)(x+1-1)}{2} + c - \left(\frac{x(x-1)}{2} + c \right) = \frac{x^2+x}{2} - \frac{x^2-x}{2} = x$$

پاسخ تشریحی تست‌های آزمون کارشناسی ارشد

«مختصات قطبی و اعداد مختلط»

(۳)-۱

$$z = -1 + \sqrt{3}i \Rightarrow x = -1, y = \sqrt{3} \Rightarrow r = \sqrt{1+3} = 2, \tan \theta = \frac{\sqrt{3}}{-1} \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{3}$$

$$z = 2 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right) \Rightarrow z^{12} = 2^{12} \left(\cos \left(-\frac{12\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{12\pi}{3} \right) \right) \Rightarrow$$

$$z^{12} = 2^{12} (\cos(-4\pi) + i \sin(-4\pi)) = 2^{12} (1 + 0) = 2^{12}$$

(۱)-۲

$$z = 2 + 3i \Rightarrow \bar{z} = 2 - 3i$$

(۴)-۳

$$z = 1 - i \Rightarrow x = 1, y = -1 \Rightarrow r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}, \tan \theta = \frac{-1}{1} \Rightarrow \theta = \frac{5\pi}{4}$$

$$z^4 = (\sqrt{2})^4 \left(\cos 4 \left(\frac{5\pi}{4} \right) + i \sin 4 \left(\frac{5\pi}{4} \right) \right) = 16 (\cos(5\pi) + i \sin(5\pi))$$

$$z^4 = 16 (\cos 0 + i \sin 0)$$

(۲)-۴

$$z = 1 - i \Rightarrow x = 1, y = -1 \Rightarrow r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}, \tan \theta = \frac{-1}{1} \Rightarrow \theta = \frac{5\pi}{4}$$

$$z^{100} = (\sqrt{2})^{100} \left(\cos \left(\frac{500}{4} \right) + i \sin \left(\frac{500}{4} \right) \right) = 2^{50} (\cos(125\pi) + i \sin(125\pi))$$

$$z^{100} = 2^{50} (\cos \pi + i \sin \pi) \Rightarrow \rho = 2^{50}, \theta = \pi$$

$$\text{۵- (۲)} \quad \text{می‌دانیم } |z| = \sqrt{x^2 + y^2}, z = x - iy, \bar{z} = x + iy \text{ بنابراین:}$$

$$\begin{aligned} x + iy + x - iy &= (\sqrt{x^2 + y^2})^2 \Rightarrow 2x = x^2 + y^2 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 - 1 + y^2 = 0 \\ &\Rightarrow (x - 1)^2 - 1 + y^2 \Rightarrow (x - 1)^2 + y^2 = 1 \end{aligned}$$

(۴)-۶

$$\begin{aligned} |z - 1| &= 1 \Rightarrow |x + iy - 1| = 1 \Rightarrow |(x - 1) + iy| = 1 \Rightarrow \\ &\sqrt{(x - 1)^2 + y^2} = 1 \Rightarrow (x - 1)^2 + y^2 = 1 \end{aligned}$$

(۴)-۷

$$\begin{aligned} i^{22} &= n = 22 \Rightarrow n = 4(\lambda) \Rightarrow i^{22} = 1 \\ i^{52} &= n = 52 \Rightarrow n = 4(13) + 0 \Rightarrow i^{52} = 1 \\ i^{24} &\Rightarrow n = 24 \Rightarrow n = 4(6) + 0 \Rightarrow i^{24} = 1 \\ \frac{i^{22} - i^{52}}{i^{24}} &= \frac{1 - 1}{1} = 0 = \frac{0}{1} = 0 \end{aligned}$$

(۲)-۸

$$\begin{aligned} |z| &= 2 \Rightarrow |x + iy| = 2 \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4 \\ (3, 0) &\Rightarrow 9 > 4, (1, 1) \Rightarrow 2 < 4 \\ (1, 2) &\Rightarrow 5 > 4, (0, 3) \Rightarrow 9 > 4 \end{aligned}$$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود تنها نقطه $(1, 1)$ در درون معادله فوق که معادله دایره‌ای به شعاع ۲ است، قرار دارد.

(۴)-۹

$$\begin{aligned} z &= \sqrt[5]{i} = i^{1/5} \Rightarrow x = 1, y = 1 \\ r &= \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}, \tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} \\ k = 0, z_1 &= \sqrt[5]{1} \left(\cos \frac{\pi/4}{5} + i \sin \frac{\pi/4}{5} \right) = \cos \frac{\pi}{20} + i \sin \frac{\pi}{20} \\ k = 1, z_2 &= \sqrt[5]{1} \left(\cos \frac{2\pi + \pi/4}{5} + i \sin \frac{2\pi + \pi/4}{5} \right) = \cos \frac{9\pi}{20} + i \sin \frac{9\pi}{20} \\ k = 2, z_3 &= \sqrt[5]{1} \left(\cos \frac{4\pi + \pi/4}{5} + i \sin \frac{4\pi + \pi/4}{5} \right) = \cos \frac{17\pi}{20} + i \sin \frac{17\pi}{20} \end{aligned}$$

(۲)-۱۰

$$z = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - 4ac}}{a} = \frac{1 \pm \sqrt{-1}}{1} = 1 \pm i$$

ضمیمه ۱

سؤالات ریاضیات آزمون‌های کارشناسی ارشد

سال‌های ۷۹ و ۸۰

«دستور دو جمله‌ای»

- ۱- مجموع همه ضرایب در بسط دو جمله‌ای $(x+y)^n$ برابر کدام است؟
 (۱) 2^n (۲) 2^n (۳) 3^n (۴) 3^n (اقتصاد-۷۹)
- ۲- ضریب x^2 در بسط دو جمله‌ای $\left(2x^2 - \frac{1}{3\sqrt{x}}\right)^{12}$ کدام است؟
 (۱) $C_{12}^6 \left(\frac{2}{3}\right)^6$ (۲) $C_{12}^2 \left(\frac{2}{3}\right)^2$ (۳) $C_{12}^2 \frac{2^2}{3^2}$ (۴) $C_{12}^9 \frac{2^9}{3^9}$ (حسابداری-۷۹)
- ۳- در بسط $\left(x + \frac{1}{x}\right)^n$ ضریب جمله مستقل از x کدام است؟ ($x \neq 0$)
 (۱) ۳۵ (۲) ۴۰ (۳) ۶۰ (۴) ۷۰ (اقتصاد-۸۰)
- ۴- در بسط عبارت $\left(x + \frac{1}{x}\right)^n$ ضریب x^2 برابر است با:
 (۱) ۴۸ (۲) ۵۶ (۳) ۶۰ (۴) ۷۰ (مدیریت-۸۰)

«مجموعه‌ها»

- ۵- اگر $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$ باشد، می‌توان نوشت:
 $A \Delta B = (A' \cup B') - (A \cup B)$ (۲)
 $A \Delta B = (A \cap B)' - (A \cup B)$ (۱)
 $A \Delta B = (A' \cup B) - (B' \cup A)$ (۴)
 $A \Delta B = (A \cap B') \cup (B \cap A')$ (۳)
- ۶- اگر A و B و C سه مجموعه باشند، به طوری که $A \subset B \subset C$ آن‌گاه $[(A \cap B) \cup C] \cap (A \cup B)$ کدام است؟
 (۱) $A \cap B$ (۲) $A \cup B$ (۳) B (۴) C (مدیریت-۷۹)
- ۷- اگر A و B و C سه مجموعه و $A \subset B$ باشد، حاصل $[(B' \cap A) \cap C] \cup C'$ کدام است؟ (حسابداری-۷۹)
 (۱) B' (۲) A (۳) C' (۴) B
- ۸- اگر A و B دو مجموعه باشند، حاصل عبارت $(A - B) \cap (A \cap B)$ کدام است؟ (اقتصاد-۸۰)
 (۱) A (۲) B (۳) $A \cap B$ (۴) ϕ
- ۹- اگر A و B دو مجموعه باشند، حاصل عبارت $A - [(A \cap B) \cup A]$ کدام است؟ (مدیریت-۸۰)
 (۱) A (۲) B (۳) $A - B$ (۴) ϕ

۱۰- مجموعه‌های A و B و C مفروضند، به‌طوری که $A \subset B \subset C$ است، حاصل $C' \cap (A' \cap B')$

(حسابداری-۸۰)

کدام است؟

- (۱) A' (۲) B' (۳) C' (۴) ϕ

«تابع»

۱۱- دامنه تابع $y = \frac{1}{\sqrt{[x]-1}}$ کدام است؟ $\{x\}$ به مفهوم جزء صحیح است (اقتصاد-۷۹)

- (۱) $(2, +\infty)$ (۲) $(2, +\infty)$ (۳) $[-1, 1]$ (۴) $R - [-1, 1]$

۱۲- در تابع با ضابطه $f(x) = \frac{e^x + 2e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ مقدار $f\left(\frac{2}{3}\right)$ $f^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$ کدام است؟ (اقتصاد-۷۹)

- (۱) ۱ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) صفر

۱۳- اگر $f(x) = e^x + 4$ و $g(x) = \ln(x+1)$ ، آنگاه $f \circ g(2)$ کدام است؟ (مدیریت-۷۹)

- (۱) $e^{\ln 2}$ (۲) $\ln 2 + 4$ (۳) $e^2 + 4$ (۴) ۷

۱۴- دامنه تابع $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x-|x|}}$ کدام است؟ (مدیریت-۷۹)

- (۱) ϕ (۲) R^+ (۳) R (۴) R^-

۱۵- دامنه تابع $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{\delta x - 1}$ کدام است؟ (مدیریت-۷۹)

- (۱) $(-1, +\infty)$ (۲) $R - \{-1, 0\}$ (۳) R^+ (۴) $(-1, +\infty) - \{0\}$

۱۶- $f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$ ، برای معکوس تابع، $f^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$ کدام است؟ (مدیریت-۷۹)

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{\sqrt{e}+1}{2}$

۱۷- در فاصله $[1, 3]$ کدام یک از توابع زیر زوج‌اند؟ (مدیریت-۷۹)

- (۱) $y = \cos x$ (۲) $y = x^2 - 1$ (۳) $y = x^2 + 1$ (۴) هیچکدام

۱۸- برد تابع $y = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ کدام است؟

- (۱) $(1, -1)$ (۲) $[1, -1]$ (۳) R (۴) R^+

۱۹- دامنه تابع $y = \frac{x + \ln x}{[x] - x}$ کدام است؟ $[x]$ تابع جزء صحیح است (حسابداری-۷۹)

- (۱) R^+ (۲) $R - \{0\}$ (۳) $R - Z$ (۴) $R^+ - N$

۲۰- اگر $f(x) = \frac{\delta^x - 1}{\delta^x + 1}$ ، آنگاه $f^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$ کدام است؟ (حسابداری-۷۹)

- (۱) ۰ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) ۱

۲۱- اگر f و g و h توابع حقیقی به معادلات $f(x) = \frac{1}{x}$ و $g(x) = x^2$ و $h(x) = \sqrt{x}$ باشد، در این صورت $(h \circ g \circ f)(x)$ برابر است با: (اقتصاد-۸۰)

- (۱) $\frac{1}{|x|}$ (۲) $|x|$ (۳) $\frac{1}{x}$ (۴) x

(۱) شکل صحیح گزینه‌های ۱ و ۲ به صورت $(-1, 1)$ و $(-1, 1]$ می‌باشد.

- ۲۲- اگر f تابعی حقیقی به معادله $y = 4 + e^{x-1}$ باشد، برد (Range) این تابع برابر است با: (اقتصاد-۸۰)
- (۱) $\mathbb{R}$ (۲) $\mathbb{R}^+$ (۳) $(-4, 2)$ (۴) $(4, +\infty)$
- ۲۳- اگر f تابعی حقیقی به معادله $y = 2 - e^{-x+1}$ باشد، آن‌گاه برد (Range) این تابع برابر است با: (مدیریت-۸۰)
- (۱) $\mathbb{R}$ (۲) $\mathbb{R}^+$ (۳) $(-\infty, 1)$ (۴) $(-\infty, 2)$
- ۲۴- اگر $f(x) = e^{x-1}$ و $g(x) = \ln(x+1)$ باشد، آن‌گاه ضابطه $f \circ g(x)$ برابر است با: (مدیریت-۸۰)
- (۱) $\frac{1}{e}x$ (۲) $\ln(e^{x-1} + 1)$ (۳) $\frac{1}{e}(x+1)$ (۴) $\ln(e^x + 1)$
- ۲۵- کدام موارد برای تابع حقیقی f به معادله $f(x) = 2|x| + 1$ نادرست است؟ (مدیریت-۸۰)
- (۱) یک به یک (۲) همواره پیوسته (۳) زوج (۴) دارای حد در صفر
- ۲۶- برد تابع حقیقی f به معادله $y = 2 + e^{-x+1}$ برابر است با: (حسابداری-۸۰)
- (۱) $\mathbb{R}$ (۲) $(-\infty, 2]$ (۳) $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ (۴) $(2, +\infty)$

«حد و پیوستگی»

- ۲۷- در فاصله $[0, 2]$ تابع $f(x) = [x](x-1) + 1$ چند نقطه گسستگی دارد؟ (اقتصاد-۷۹)
- (۱) هیچ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳
- ۲۸- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^{x^x})$ کدام است؟ (اقتصاد-۷۹)
- (۱) e^{-1} (۲) ۰ (۳) ۱ (۴) e
- ۲۹- حاصل $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{2x+3} \right)^{x+1}$ کدام است؟ (اقتصاد-۷۹)
- (۱) $e^{1/2}$ (۲) ۰ (۳) e^2 (۴) بی‌نهایت
- ۳۰- حد چپ تابع با ضابطه $F(x) = \frac{x - [x]}{x+1}$ در $x=1$ کدام است؟ (مدیریت-۷۹)
- (۱) $-\frac{1}{2}$ (۲) ۰ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) ۱
- ۳۱- طول نقطه گسستگی تابع $y = \frac{x^2}{e^{x^2} - e^{ix}}$ کدام است؟ (مدیریت-۷۹)
- (۱) ۱، ۲ (۲) ۰، ۲ (۳) ۰، ۲ (۴) ۰، ۱، ۲
- ۳۲- حد عبارت $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2^x - x^2}{x-2}$ کدام است؟ (مدیریت-۷۹)
- (۱) ۰ (۲) ۱ (۳) $4 \ln 2$ (۴) $4(\ln 2 - 1)$
- ۳۳- نقطه گسستگی تابع $y = \frac{3^x - 1}{4^x - 8}$ کدام است؟ (حسابداری-۷۹)
- (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) $\ln 2$ (۳) $3 \ln 2$ (۴) ۰
- ۳۴- مقدار $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\Delta e^{\frac{1}{x}} - 2e^{-\frac{1}{x}}}{\frac{1}{2e^x} + \Delta e^{-\frac{1}{x}}}$ برابر است با: (اقتصاد-۸۰)
- (۱) $-\frac{3}{5}$ (۲) ۰ (۳) $\frac{5}{2}$ (۴) $+\infty$

۳۵- حد عبارت $\frac{(n+2)!n!}{4[(n+1)!]^2}$ وقتی $n \rightarrow \infty$ کدام است؟ (حسابداری-۸۰)

۱) صفر ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) ۱ ۴) $+\infty$

۳۶- حد عبارت $\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-2x}$ برابر است با: (حسابداری-۸۰)

۱) ∞ ۲) ۱ ۳) صفر ۴) -2

«مشتق»

۳۷- با محاسبه مشتق مرتبه m تابع $f(x) = \frac{x}{x-1}$ مقدار $f_{(-1)}^{(n)}$ کدام است؟ (اقتصاد-۷۹)

۱) $\frac{n!}{2^{n+1}}$ ۲) $\frac{(n-1)!}{2^n}$ ۳) $\frac{-n!}{2^{n+1}}$ ۴) $-\frac{(n-1)!}{2^n}$

۳۸- در تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} 2-x^2 & 0 \leq x < 1 \\ \frac{3}{2} & x = 1 \\ 1+x & 1 < x \leq 2 \end{cases}$ روی بازه $[0, 2]$ مقادیر ماکسیم و می نیم کدام اند؟ (اقتصاد-۷۹)

۱) ۱, ۲ ۲) ۳, ۲ ۳) ۳, ۲ ۴) ۳, ۲

۳۹- اگر f روی $\mathbb{R}$ دو بار مشتق پذیر باشد و x_1 و x_2 هر دو نقاط می نیم نسبی f باشند، کدام گزاره درست است؟ (اقتصاد-۷۹)

۱) $f'(x_1)f(x_2) = 0$ ۲) $f''(x_1)f''(x_2) < 0$

۳) $f(x_1)f(x_2) = 0$ ۴) $f''(x_2)f(x_1) > 0$

۴۰- اگر $\ln \frac{x-y}{x+y} = 6$ باشد، حاصل $\lim_{y \rightarrow -\infty} \frac{\Delta x}{\Delta y}$ کدام است؟ (اقتصاد-۷۹)

۱) $-\frac{x}{y}$ ۲) $-\frac{y}{x}$ ۳) $\frac{y}{x}$ ۴) $\frac{x}{y}$

۴۱- معادله خط مماس بر منحنی $y = e^{x-1}$ در نقطه $x = 2$ کدام است؟ (اقتصاد-۷۹)

۱) $y = e(x-1)$ ۲) $y = e^{-1}(x-1)$

۳) $y = e(x+1)$ ۴) $y = e^{-1}(x+1)$

۴۲- اگر $y = x e^{2x}$ باشد، مشتق مرتبه m این تابع به ازای $x = 0$ کدام است؟ (مدیریت-۷۹)

۱) 2^n ۲) $n \cdot 2^{n-1}$ ۳) $n \cdot 2^n$ ۴) صفر

۴۳- طول نقطه ماکزیم یا می نیم تابع $y = \frac{e^{2x}}{x}$ کدام است؟ (مدیریت-۷۹)

۱) $x = 3$ ۲) $x = 2$ ۳) $x = \frac{1}{2}$ ۴) $x = \frac{1}{3}$

۴۴- مشتق تابع $y = x^{(-x^x)}$ عبارت است از: (مدیریت-۷۹)

۱) $y' = -x^{-x^x+1}(1 + \ln x^x)$ ۲) $y' = x^{-x^x-1}(-2x)$

۳) $y' = -x(x \ln x + 1)$ ۴) $y' = x^{-x^x-1}$

۴۵- از رابطه $x^2 + xy + 5y^2 - 4x - 3y = 0$ مقدار x'_y در نقطه $(1, 1)$ کدام است؟ (حسابداری-۷۹)

- (۱) ۸ (۲) -۵ (۳) ۱ (۴) -۱

۴۶- اگر داشته باشیم $x^2 - 5xy + y^2 - 7x + y = -9$ مقدار دفرانسیل y در نقطه $(1, 1)$ به کدام صورت است؟ (حسابداری-۷۹)

- (۱) $dy = -\frac{1}{4}dx$ (۲) $dy = -5dx$ (۳) $dy = -\frac{1}{5}dx$ (۴) $dy = -2dx$

۴۷- طول نقطه ماکزیم تابع با ضابطه $f(x) = x^3 - 3x$ کدام است؟ (حسابداری-۷۹)

- (۱) -۲ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) ۲

۴۸- عرض نقطه عطف تابع با ضابطه $f(x) = xe^{-x}$ کدام است؟ (حسابداری-۷۹)

- (۱) $-2e^2$ (۲) $-e$ (۳) e^{-1} (۴) $2e^{-2}$

۴۹- کدام مورد برای تابع با ضابطه $f(x) = x^3 - 9x$ در فاصله $[0, 2]$ درست است؟ (حسابداری-۷۹)

- (۱) صعودی (۲) مقعر (۳) محدب (۴) نزولی

۵۰- از رابطه $(x+1)^y - y^{x+1} = 0$ مقدار $\frac{dy}{dx}$ در نقطه $(0, 1)$ برابر است با: (اقتصاد-۸۰)

- (۱) -۲ (۲) صفر (۳) ۱ (۴) ۲

۵۱- اگر f تابعی حقیقی و مشتق پذیر باشد و داشته باشیم $g(x) = f(x.f(x))$ ، آنگاه $g'(0)$ برابر است با: (اقتصاد-۸۰)

- (۱) $f'(0) + f(0)$ (۲) $f'(0).f(0)$ (۳) $f''(0)$ (۴) صفر

۵۲- مشتق مرتبه n ام تابع حقیقی به معادله $y = \frac{x}{x+1}$ در نقطه $x = 0$ برابر است با: (اقتصاد-۸۰)

- (۱) $(-1)^n.n$ (۲) $(-1)^{n-1}.n$ (۳) $(-1)^n.n!$ (۴) $(-1)^{n-1}.n!$

۵۳- اگر سری تفرع منحنی نمایش تابع حقیقی به معادله $y = x^3 + 2ax^2 + a$ در نقطه $x = 1$ عوض شود، مقدار a کدام است؟ (اقتصاد-۸۰)

- (۱) $-\frac{3}{4}$ (۲) -۱ (۳) $-\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{3}{4}$

۵۴- اگر تابع هزینه کل $TC = x^3 + 9x + 4$ باشد، می نیم هزینه متوسط کدام است؟ (اقتصاد-۸۰)

- (۱) ۱۰ (۲) ۱۲ (۳) ۱۳ (۴) ۱۴

۵۵- در تابع به معادله $y = (x^2 + 1)^x$ مقدار dy در نقطه $x = 1$ با شرط $dx = \frac{1}{4}$ برابر است با: (اقتصاد-۸۰)

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) $\ln 2$ (۴) $1 + \ln 2$

۵۶- مشتق مرتبه دهم تابع $f(x) = \ln(1+x)$ در $x = 0$ کدام است؟ (مدیریت-۸۰)

- (۱) $-10!$ (۲) $-9!$ (۳) $9!$ (۴) $10!$

۵۷- مشتق تابع $f(x) = |x| + 5$ در $x = 0$ کدام است؟ (مدیریت-۸۰)

- (۱) -۱ (۲) صفر (۳) ۱ (۴) فاقد مشتق است

۵۸- دینامیک مرتبه دوم تابع y با ضابطه $y = xe^{x^2}$ در نقطه $x = 1$ در صورت $\Delta x = 0.1$ برابر است با:

(مدیریت-۸۰)

(۱) $0.02e$ (۲) $0.01e$ (۳) $0.03e$ (۴) $0.1e$

۵۹- تابع با ضابطه $y = x^2 e^{x^2}$ در فاصله $[-2, 2]$ چگونه است؟

(مدیریت-۸۰)

(۱) اکیناً محدب (۲) اکیناً مقعر
(۳) ابتدا محدب، سپس مقعر (۴) ابتدا مقعر، سپس محدب

۶۰- طول نقطه عطف تابع $y = xe^{x^2}$ کدام است؟

(مدیریت-۸۰)

(۱) -2 (۲) -1 (۳) 1 (۴) 2

۶۱- اگر داشته باشیم $x^2 + y^2 - 5xy + 4x - 1 = 0$ مقدار y'_x در نقطه $(1, 1)$ کدام است؟ (حسابداری-۸۰)

(۱) $-\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) 1 (۴) 2

۶۲- اگر تابع f به معادله $y = x^2 + x$ باشد، حاصل $(dy - \Delta y)$ در نقطه $x = 1$ و $\Delta x = 0.1$ برابر است با:

(حسابداری-۸۰)

(۱) -0.02 (۲) -0.01 (۳) 0.02 (۴) 0.03

۶۳- تابع f به معادله $y = xe^{x^2}$ مفروض است. بین تابع در چه فاصله‌ای اکیناً صعودی است؟ (حسابداری-۸۰)

(۱) $\mathbb{R}$ (۲) $(1, +\infty)$ (۳) $(-1, +\infty)$ (۴) $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

۶۴- در تابع سول قبل، تابع در چه فاصله‌ای اکیناً مقعر است؟ (حسابداری-۸۰)

(۱) $(-\infty, -2)$ (۲) $(-2, +\infty)$ (۳) $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ (۴) $\mathbb{R}$

۶۵- طول مثبت نقطه عطف تابع $y = \ln(1 + x^2)$ کدام است؟ (حسابداری-۸۰)

(۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) 2 (۴) 1

«انتگرال»

۶۶- اگر $y = \ln(1 + x^2) + \int_0^x \sin(e^x) dx$ باشد، آنگاه $y'(1)$ برابر کدام است؟ (اقتصاد-۷۹)

(۱) 1 (۲) 1 (۳) $\ln 2$ (۴) $1 + \sin e$

۶۷- اگر $I(x) = \int_0^x \frac{e^{2x} - 2}{e^x} dx$ باشد، مقدار $I(1) - I(0)$ کدام است؟ (اقتصاد-۷۹)

(۱) $e^2 + e^{-1} - 2$ (۲) $e^2 - e^{-1} - 2$ (۳) $e^2 + e^{-1} - 1$ (۴) $e^2 + 2e^{-1} - 3$

۶۸- اگر تابع عرضه x^2 و تابع تقاضا $y = -x + 2$ باشد و در آن y قیمت و x مقدار، مازاد مصرف‌کننده کدام است؟ (اقتصاد-۷۹)

(۱) 2 (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) 1 (۴) $\frac{1}{2}$

۶۹- مقدار انتگرال $I = \int_0^1 |1 - x| dx$ کدام است؟ (اقتصاد-۷۹)

(۱) 1 (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) 2

۷۰- اگر $I(x) = \int e^{\ln \sqrt{x+1}} dx$ باشد، $I(1) - I(0)$ کدام است؟ (اقتصاد-۷۹)

$\frac{1}{2} e^{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} (1)$
 $e^{\ln \sqrt{2}} - 1 (3)$
 $\sqrt{2} - \frac{1}{2} (2)$
 $\ln 2 (1)$

۷۱- $\int_0^1 x e^{2x} dx$ برابر کدام است؟ (اقتصاد-۷۹)

$\frac{1}{5} (1 - 4e^5) (4)$
 $\frac{1}{5} (2 - e^5) (3)$
 $\frac{1}{25} (4 - e^5) (2)$
 $\frac{1}{25} (1 + 4e^5) (1)$

۷۲- اگر $I = \int_0^1 \frac{x}{x^2 + 1} dx$ مقدار I برابر است با: (مدیریت-۷۹)

$\frac{1}{2} \ln 2 (4)$
 $\frac{1}{2} \text{Arc tan } 1 (3)$
 $\frac{\pi}{2} (2)$
 $\frac{1}{2} (1)$

۷۳- اگر $I(x) = \int \ln x dx$ مقدار $I(2) - I(1)$ برابر است با: (مدیریت-۷۹)

$\frac{1}{2} \ln 2 - 2 (4)$
 $2 \ln 2 - 1 (3)$
 $\ln 2 + 1 (2)$
 $\frac{1}{2} \ln 2 + 2 (1)$

۷۴- سطح محصور بین منحنی $y = x^2$ و خط $y = x$ برابر است با: (مدیریت-۷۹)

$\frac{1}{6} (1)$
 $\frac{1}{3} (2)$
 $\frac{1}{3} (3)$
 $\frac{1}{2} (4)$

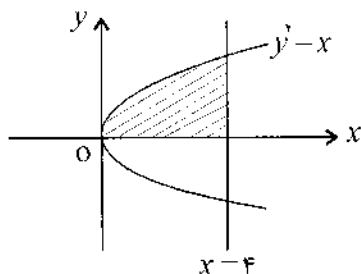
۷۵- مقدار انتگرال $I = \int_1^2 \frac{2 \ln x}{x} dx$ برابر کدام است؟ (حسابداری-۷۹)

$2 \ln 2 (1)$
 $(\ln 2)^2 (2)$
 $\ln 4 (3)$
 $\frac{1}{2} \ln 2 (4)$

۷۶- اگر $I(x) = \int e^{\sqrt{x}} dx$ آن گاه $I(1) - I(0)$ برابر کدام است؟ (حسابداری-۷۹)

$1 (1)$
 $2(e-1) (2)$
 $e-1 (3)$
 $2 (4)$

۷۷- در شکل مقابل سطح سایه زده کدام است؟ (حسابداری-۷۹)



$\frac{16}{3} (1)$

$4 (2)$

$\frac{8}{3} (3)$

$6 (4)$

۷۸- ضریب زاویه مماس بر منحنی تابع $y = f(x)$ در هر نقطه $M(x, y)$ واقع بر آن برابر جذر طول آن نقطه است. اگر نمودار آن تابع از مبدأ مختصات بگذرد، از کدام نقطه دیگر می گذرد؟ (حسابداری-۷۹)

$(6, 9) (1)$
 $(4, 8) (2)$
 $(9, 18) (3)$
 $(2, 4) (4)$

۷۹- انتگرال $\int \frac{dx}{x^2 + x}$ کدام است؟ (حسابداری-۷۹)

$\frac{1}{2} \ln \frac{x^2}{x^2 + 1} + c (2)$
 $\text{Arc tan } x - \ln x + c (1)$

$\text{Arc tan } x + \ln x + c (4)$
 $\frac{1}{2} \ln \frac{x^2 + 1}{x^2} + c (3)$

(اقتصاد-۸۰)

۸۰- مقدار انتگرال $I = \int_{\frac{1}{2}}^1 \ln(2x) dx$ برابر است با:

$\ln 2 - \frac{3}{4}$ (۴)

$\ln 2 - \frac{5}{4}$ (۳)

$2 \ln 2 - \frac{1}{4}$ (۲)

$(\ln 2)^2 - \frac{1}{4}$ (۱)

(اقتصاد-۸۰)

۸۱- حاصل $I = \int_1^2 \frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$ کدام است؟

$\sqrt{2}$ (۴)

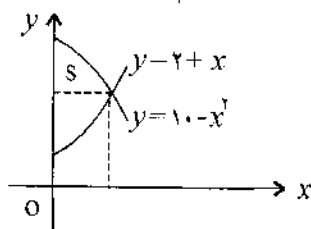
$1 + \sqrt{2}$ (۳)

۱ (۲)

$1 - \sqrt{2}$ (۱)

(اقتصاد-۸۰)

۸۲- در شکل زیر تابع تقاضا و عرضه داده شده است. مقدار مازاد مصرفکننده کدام است؟



$\frac{5}{4}$ (۱)

$\frac{16}{3}$ (۲)

۶ (۳)

۷ (۴)

(اقتصاد-۸۰)

۸۳- مقدار انتگرال $\int_1^2 \frac{x dx}{x+1}$ کدام است؟

$(\ln 2) - 1$ (۴)

$1 + \ln 2$ (۳)

$-\ln 2$ (۲)

$1 - \ln 2$ (۱)

(مدیریت-۸۰)

۸۴- مقدار انتگرال $I = \int_1^2 \frac{x}{1+x} dx$ کدام است؟

$\frac{1}{2}$ (۴)

$\frac{3}{2}$ (۳)

$1 - \ln 2$ (۲)

$\ln 2$ (۱)

(مدیریت-۸۰)

۸۵- مقدار انتگرال $I = \int_0^1 2xe^{2x} dx$ برابر است با:

e^2 (۴)

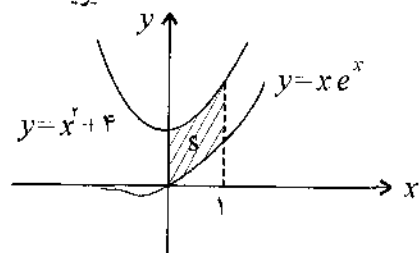
$\frac{1}{2}e^2$ (۳)

$\frac{1}{2}(e^2 - 1)$ (۲)

$\frac{1}{2}(e^2 + 1)$ (۱)

(مدیریت-۸۰)

۸۶- در شکل مقابل مقدار مساحت S کدام است؟



$2e$ (۱)

$4e$ (۲)

$\frac{1}{3} + e$ (۳)

$\frac{10}{3}$ (۴)

(حسابداری-۸۰)

۸۷- مقدار انتگرال $I = \int_1^2 \frac{3x+4}{x^2+3x+2} dx$ برابر است با:

$2 \ln \frac{2}{3}$ (۴)

$\ln \frac{5}{2}$ (۳)

$2 \ln \frac{5}{2}$ (۲)

$\ln \frac{9}{2}$ (۱)

۸۸- سطح محصور بین منحنی $y = \frac{\sqrt{x-1}}{x}$ و محور x ها در فاصله $x = 1$ تا $x = 2$ برابر است با: (حسابداری-۸۰)

(۱) $\frac{\pi}{4} + 1$ (۲) $2 - \frac{\pi}{4}$ (۳) ۲ (۴) ۱

۸۹- مقدار انتگرال $I = \int_1^x \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx$ برابر است با: (حسابداری-۸۰)

(۱) $\frac{4 - 2\sqrt{2}}{3}$ (۲) $\frac{-4 + 2\sqrt{2}}{3}$ (۳) $\frac{1 - \sqrt{2}}{3}$ (۴) $\frac{-1 + \sqrt{2}}{3}$

«ماتریس»

۹۰- مقدار دترمینان $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ کدام است؟ (اقتصاد-۷۹)

(۱) ۸ (۲) ۱۰ (۳) ۱۴ (۴) ۱۶

۹۱- مرتبه (Rank) هر ماتریس به صورت $A = [a_{ij}]_{5 \times 6}$ کدام است؟ (اقتصاد-۷۹)

(۱) ۵ (۲) ۶ (۳) کمتر یا مساوی ۵ (۴) کمتر یا مساوی ۶

۹۲- دستگاه همگن خطی $\vec{O} = A_{n \times n} \cdot X_{n \times 1}$ مفروض است. این دستگاه در چه صورت بی‌نهایت جواب دارد؟ (اقتصاد-۷۹)

(۱) $|A| = 0$ (۲) $|A| \neq 0$ (۳) $A = A'$ (۴) $A = A^{-1}$

۹۳- بازاری کدام مقدار m دستگاه $\begin{cases} mx + y - z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ 2x - 2y + z = 0 \end{cases}$ جواب غیر صفر دارد؟ (مدیریت-۷۹)

(۱) -۲ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) ۲

۹۴- در ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ می‌دانیم $|A| = 3$ است. مجموع عناصر روی قطر ماتریس A^{-1} کدام است؟

(مدیریت-۷۹)

(۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{4}{3}$ (۴) $\frac{5}{3}$

۹۵- مقادیر ویژه ماتریس تبدیل $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ کدام است؟ (مدیریت-۷۹)

(۱) ۱، -۴ (۲) ۱، ۴ (۳) -۱، ۴ (۴) -۱، -۴

۹۶- اگر داشته باشیم $\begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$ ، مقدار a کدام است؟ (حسابداری-۷۹)

(۱) $\frac{3}{4}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $-\frac{5}{4}$ (۴) $\frac{3}{4}$

۹۷- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ و $1 =$ مجموع عناصر روی قطر متریس A^2 کدام است؟ (حسابداری-۷۹)

- ۳۳ (۱) ۲۹ (۲) ۹ (۳) ۱۸ (۴)

۹۸- می‌دانیم دترمینان متریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ برابر -1 است. مجموع عناصر سطر اول متریس معکوس آن کدام است؟ (حسابداری-۷۹)

- ۲ (۱) -1 (۲) 0 (۳) -3 (۴)

۹۹- مقدار دترمینان $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix}$ برابر است با: (اقتصاد-۸۰)

- ۱۰ (۱) ۱۲ (۲) ۱۶ (۳) ۲۴ (۴)

۱۰۰- اگر A و B دو متریس مربع $\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 7 & 9 \\ 0 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ و $A \cdot B = 5$ باشد، آن‌گاه $|B|$ چقدر است؟ (اقتصاد-۸۰)

- -15 (۱) 3 (۲) 5 (۳) 10 (۴)

۱۰۱- اگر $1 \times \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، متریس A کدام است؟ (اقتصاد-۸۰)

- (۱) $A = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ (۲) $A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$
(۳) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$ (۴) $A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

۱۰۲- مرتبهٔ متریس $A = \begin{bmatrix} 2 & 7 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & 13 & -2 \end{bmatrix}$ برابر است با: (اقتصاد-۸۰)

- $r = 0$ (۱) $r = 1$ (۲) $r = 2$ (۳) $r = 3$ (۴)

۱۰۳- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ باشد، در متریس A^2 مجموع عناصر روی قطر کدام است؟ (مدیریت-۸۰)

- ۸ (۱) صفر (۲) ۸ (۳) ۱۶ (۴)

۱۰۴- در سؤال شمارهٔ ۱۰۳، مقدار دترمینان A کدام است؟ (مدیریت-۸۰)

- ۴ (۱) 6 (۲) 8 (۳) 10 (۴)

۱۰۵- ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ مفروض است. مجموع عناصر روی قطر A^{-1} برابر است با: (مدیریت-۸۰)

$$\frac{7}{5} (1) \quad \frac{6}{5} (2) \quad \frac{5}{4} (3) \quad \frac{3}{4} (4)$$

۱۰۶- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، مقدار دترمینان $|A|$ برابر است با: (حسابداری-۸۰)

$$-8 (1) \quad -6 (2) \quad -4 (3) \quad -2 (4)$$

۱۰۷- در ماتریس A از مسأله قبل مجموع عناصر قطری ماتریس A^{-1} کدام است؟ (حسابداری-۸۰)

$$-\frac{1}{4} (1) \quad -\frac{1}{4} (2) \quad \frac{1}{4} (3) \quad \frac{1}{4} (4)$$

۱۰۸- مقدار x از معادله $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$ برابر است با: (حسابداری-۸۰)

$$-1 (1) \quad 0 (2) \quad 1 (3) \quad 2 (4)$$

۱۰۹- دستگاه همگن $A_{n \times n} \cdot X_{n \times 1} = 0$ در کدام حالت بی‌شمار جواب دارد؟ (حسابداری-۸۰)

$$|A| \neq 0 (1) \quad A = A' (2) \quad |A| = 0 (3) \quad A = A^{-1} (4)$$

«خط، بردار، صفحه»

۱۱۰- اگر سه بردار $\vec{A}(1, 2, 3)$ و $\vec{B}(2, 4, 6)$ و $\vec{C}(0, 1, a)$ وابسته خطی باشند، مجموعه مقادیر a کدام است؟

(اقتصاد-۷۹)

$$\{0\} (1) \quad \{1\} (2) \quad \mathbb{R} (3) \quad \mathbb{R}^+ (4)$$

۱۱۱- بردارهای $\vec{a}(1, 2, 3)$ و $\vec{b}(2, 1, 4)$ و $\vec{c}(m, 3, 7)$ بازای کدام مقدار m وابسته خطی است؟ (اقتصاد-۸۰)

$$1 (1) \quad 2 (2) \quad 3 (3) \quad 4 (4)$$

«توابع چند متغیره»

۱۱۲- مجموع طول و عرض مختصات نقطه بحرانی تابع $z = 18x^2 - 32y^2 - 36x - 128y + 110$ کدام است؟

(اقتصاد-۷۹)

$$-3 (1) \quad -1 (2) \quad 1 (3) \quad 2 (4)$$

۱۱۳- اگر داشته باشیم $F(x + yz, xy + z^2) = 0$ ، آنگاه z'_x کدام است؟ (اقتصاد-۷۹)

$$-\frac{F'_1}{F'_1} (1) \quad -\frac{x F'_1}{z F'_1} (2) \quad -\frac{F'_1 + F'_2}{F'_1 + 2z F'_2} (3) \quad -\frac{F'_1 + y F'_2}{y F'_1 + 2z F'_2} (4)$$

۱۱۴- اگر $z = f(x - y, y - x)$ ، آنگاه $\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial x}$ برابر کدام است؟ (اقتصاد-۷۹)

$$-1 (1) \quad 0 (2) \quad 1 (3) \quad 2 (4)$$

۱۱۵- در تابع دومتغیره $f(x, y) = x^2 + y^2 - 4xy - 11y$ نقطه بحرانی $(-2, -1)$ چگونه است؟ (اقتصاد-۷۹)

(۱) اکسترم (۲) می‌نیم (۳) ماکسیم (۴) زینی

۱۱۶- اگر مطلوبیت مصرف‌کننده $U = 2q_1q_2 - q_1^2$ و خط بودجه $90 = 3q_1 + 6q_2$ باشد، به‌ازای چه مقدار خرید از q_1 مطلوبیت ماکزیم است؟ (اقتصاد-۷۹)

(۱) ۶/۵ (۲) ۷/۵ (۳) ۱۳ (۴) ۱۵

۱۱۷- در تابع f به معادله $z = \frac{xy-1}{\ln(x+y)-1}$ ، دامنه تابع کدام است؟ (مدیریت-۷۹)

(۱) $D_f = \mathbb{R}^{+*}$

(۲) $D_f = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}, x + y \neq e\}$

(۳) $D_f = \{(x, y) | y + x > 0, x + y \neq e\}$

(۴) $D_f = \mathbb{R}^2 - \{0, 0\}$

۱۱۸- اگر داشته باشیم $Z = U^2 + V^2 - 2UV$ و $U = \frac{x}{y}$ و $V = y^2 - x^2$ ، مقدار $\frac{\partial z}{\partial x}$ اگر $z = y = 1$ باشد، کدام است؟ (مدیریت-۷۹)

(۱) ۰ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) ۶

۱۱۹- اگر $z = \frac{x+2y}{x-y+3}$ باشد، مجموع طول و عرض نقطه بحرانی کدام است؟ (مدیریت-۷۹)

(۱) -۲ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) ۲

۱۲۰- برد تابع دومتغیری $z = \sqrt{9 - 2x^2 - y}$ کدام است؟ (حسابداری-۷۹)

(۱) $[-3, 3]$ (۲) $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ (۳) $\mathbb{R}$ (۴) $[0, 3]$

۱۲۱- اگر داشته باشیم $z = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \ln \frac{x}{y}$ ، مقدار $xz'_x + yz'_y$ کدام است؟ (حسابداری-۷۹)

(۱) صفر (۲) z (۳) $\frac{1}{z}$ (۴) $z - 1$

۱۲۲- در تابع دو متغیری $z = \frac{2x+y-1}{x+2y}$ ، مجموع طول و عرض نقطه اکسترم آن کدام است؟ (حسابداری-۷۹)

(۱) ۲ (۲) $-\frac{1}{3}$ (۳) ۳ (۴) $\frac{1}{3}$

۱۲۳- اگر داشته باشیم $z = 10 - x^2 + 2x - 2y^2 + 8y$ ، مقدار z در نقطه اکسترم این تابع کدام است؟ (حسابداری-۷۹)

(۱) ۱۹ (۲) ۱۰ (۳) ۱۷ (۴) ۲۱

۱۲۴- در مسأله شماره ۱۲۳ نوع نقطه اکسترم چیست؟ (حسابداری-۷۹)

(۱) مکرر (۲) زینی (۳) ماکزیم (۴) می‌نیم

۱۲۵- اگر می‌نیم تابع $z = x^2 + y^2$ به قید $x + 2y = 5$ را با استفاده از روش لاگرانژ تعیین کنیم، مقدار λ کدام است؟ (حسابداری-۷۹)

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۲۶- دامنهٔ تابع به معادلهٔ $U = \frac{1}{\ln(1 - x^2 - y^2 - z^2)}$ کدام است؟ (اقتصاد-۸۰)

(۱) تمام نقاط داخل کرهٔ $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ به جز مبدا

(۲) تمام نقاط داخل کرهٔ $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

(۳) تمام نقاط داخل و روی کرهٔ $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

(۴) $\mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\}$

۱۲۷- اگر برای تابع مرکب $U = \frac{zy}{x}$ داشته باشیم $x = 3r^2 - 2s$ ، $y = 4r - 2s^2$ و $z = 2r^2 - 3s^2$ مقدار $\frac{\partial U}{\partial s}$ به ازای $r = s = 1$ برابر است با: (اقتصاد-۸۰)

(۱) -۱۱ (۲) -۱۰ (۳) -۹ (۴) -۸

۱۲۸- طول و عرض نقطهٔ بحرانی تابع f به معادلهٔ $z = xy + 2x - \ln(x^2y)$ کدام است؟ (اقتصاد-۸۰)

(۱) $(\frac{1}{2}, 1)$ (۲) $(3, \frac{1}{2})$ (۳) $(2, \frac{1}{2})$ (۴) $(1, 1)$

۱۲۹- اگر f تابعی حقیقی به معادلهٔ $z = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 + 1}$ باشد، دامنهٔ (Domain) این تابع برابر است با: (مدیریت-۸۰)

(۱) $\mathbb{R}^2$ (۲) $\mathbb{R}$ (۳) $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ (۴) $\mathbb{R} - \{0\}$

۱۳۰- در تابع f به معادلهٔ $x^2 + ye^{xy} - xy + z - xyz = 0$ مقدار $\frac{\partial z}{\partial x}$ در نقطهٔ $(1, 0, -1)$ برابر است با:

(مدیریت-۸۰)

(۱) -۳ (۲) -۲ (۳) -۱ (۴) صفر

۱۳۱- اگر f تابعی حقیقی به معادلهٔ $z = x^2 + xy + 4y^2$ فرض شود، مقدار dz در نقطهٔ $(1, 1)$ به ازای $dx = dy = 0.1$

(مدیریت-۸۰)

برابر است با:

(۱) 0.8 (۲) 0.9 (۳) 1.2 (۴) 2.2

۱۳۲- نقطهٔ بحرانی تابع حقیقی f با ضابطهٔ $z = xy - x^2 - 2y^2 + 7y$ کدام است؟ (مدیریت-۸۰)

(۱) $(1, 2, 7)$ (۲) $(0, 1, 1)$ (۳) $(-1, -2, 1)$ (۴) $(-1, 1, 3)$

۱۳۳- در سؤال شمارهٔ ۱۳۲، نوع نقطهٔ بحرانی کدام است؟ (مدیریت-۸۰)

(۱) زینی (۲) می نیم مطلق (۳) می نیم نسبی (۴) ماکزیمم مطلق

۱۳۴- برد تابع دومتغیرهٔ $z = \sqrt{100 - 2x^2 - y^2}$ کدام است؟ (حسابداری-۸۰)

(۱) $\mathbb{R}$ (۲) $\mathbb{R}^+$ (۳) $[0, 10]$ (۴) $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

۱۳۵- اگر $Z = U^2 + 2UV$ و $U = \frac{x}{y}$ و $V = x^2 - y^2$ باشد، مقدار $\frac{\partial Z}{\partial x}$ در نقطهٔ $x = y = 1$ کدام است؟ (حسابداری-۸۰)

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) ۶

۱۳۶- مختصات نقطهٔ بحرانی تابع $z = x^2 + 2xy - y^2 - 12x$ کدام است؟ (حسابداری-۸۰)

(۱) $(-1, -1, 14)$ (۲) $(3, 3, -18)$ (۳) $(0, 0, 0)$ (۴) $(1, 1, -10)$

۱۳۷- نوع نقطه بحرانی در سؤال قبل، کدام است؟

(حسابداری - ۸۰)

- (۱) ماکزیمم نسبی (۲) زینی (۳) ماکزیمم مطلق (۴) می‌نیمم مطلق

۱۳۸- در تابع مقید xy $\max Z = xy$ نسبت به $x + 2y = 100$ با استفاده از روش لاگرانژ، مقدار λ ضریب لاگرانژ برابر است با:

(حسابداری - ۸۰)

- (۱) ۱۰ (۲) ۱۲ (۳) ۲۰ (۴) ۲۵

۱۳۹- در سؤال قبل، مقدار ماکزیمم z کدام است؟

(حسابداری - ۸۰)

- (۱) ۱۳۵۰ (۲) ۱۳۰۰ (۳) ۱۲۵۰ (۴) ۱۰۰۰

«سری‌ها»

۱۴۰- دنباله $U_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{2n+1}$ مفروض است. این دنباله به کدام یک از اعداد زیر همگراست؟ (اقتصاد - ۸۰)

- (۱) e (۲) e^2 (۳) c^2 (۴) $1 + e^2$

۱۴۱- حاصل $\sum_{n=1}^{21} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ کدام است؟ (اقتصاد - ۸۰)

- (۱) $1 + \ln 15$ (۲) $\ln 30$ (۳) $\ln 29$ (۴) ۱

«معادلات دیفرانسیل»

۱۴۲- اگر داشته باشیم $xy' + y = e^x$ ، مقدار y کدام است؟ (مدیریت - ۷۹)

- (۱) $y = xe^x + cx$ (۲) $y = \frac{1}{x}e^x + \frac{c}{x}$ (۳) $y = xe^x + c$ (۴) $y = e^x - x + c$

«مختصات قطبی، اعداد مختلط»

۱۴۳- اگر $z = a + ib$ و $u = x + iy$ باشد و داشته باشیم $z = \frac{1}{u+1}$ ، مقدار y بر حسب a و b کدام است؟ (اقتصاد - ۷۹)

- (۱) $\frac{a-b}{a^2+b^2}$ (۲) $\frac{a+b}{a^2+b^2}$ (۳) $\frac{-b}{a^2+b^2}$ (۴) $\frac{-ab}{a^2+b^2}$

۱۴۴- اگر $z = \left(\frac{2i}{1+i}\right)^{10}$ باشد، مقدار $\bar{z}$ برابر است با: (اقتصاد - ۸۰)

- (۱) ۳۲ (۲) $32i$ (۳) 2^{10} (۴) $2^{10}i$

ضمیمه ۲

پاسخ تشریحی

سؤالات ریاضیات آزمون‌های کارشناسی ارشد

سال‌های ۷۹ و ۸۰

«پاسخ تشریحی تست‌های دستور دوجمله‌ای»

۱-۲) به ویژگی ۸ مطلب (۲-۱) صفحه ۱۰ و تست شماره ۳ صفحه ۱۱ مراجعه کنید.

$$2^7 = (1+1)^7 = \text{مجموع ضرایب}$$

۲-۱۱) به ویژگی ۹ مطلب (۲-۱) صفحه ۱۰ و تست شماره ۱۱ صفحه ۱۲ مراجعه کنید.

$$C_{12}^r (2x^7)^{12-r} \left(-\frac{1}{3\sqrt{x^7}}\right)^r = C_{12}^r (2)^{12-r} (x^7)^{12-r} \left(-\frac{1}{3}\right)^r \left(x^{-\frac{7}{3}}\right)^r$$

r را طوری تعیین می‌کنیم که توان x برابر ۳ باشد.

$$x^{7(12-r)-\frac{7}{3}r} = x^3 \Rightarrow 7r + \frac{3}{4}r = 21 \Rightarrow r = 6$$

بنابراین ضریب x^3 برابر است با:

$$C_{12}^6 (2)^{12-6} \left(-\frac{1}{3}\right)^6 = C_{12}^6 \left(\frac{2}{3}\right)^6$$

۳-۴) به ویژگی ۹ مطلب (۲-۱) صفحه ۱۰ و تست شماره ۲ صفحه ۱۳ مراجعه کنید.

$$C_8^r (x)^{8-r} \left(\frac{1}{x}\right)^r = C_8^r (x)^{8-r} (x)^{-r}$$

r را طوری تعیین می‌کنیم که توان x برابر صفر باشد:

$$x^{8-r} = x^0 \Rightarrow 8 - 2r = 0 \Rightarrow r = 4$$

بنابراین ضریب جمله مستقل از x برابر است با:

$$C_8^4 = \frac{8!}{4!4!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4!4!} = 70$$

۴-۲) به ویژگی ۹ مطلب (۲-۱) صفحه ۱۰ و تست شماره ۲ صفحه ۱۳ مراجعه کنید.

$$C_8^r (x)^{8-r} \left(\frac{1}{x}\right)^r = C_8^r (x)^{8-r} (x)^{-r}$$

r را طوری تعیین می‌کنیم که توان x برابر ۲ باشد.

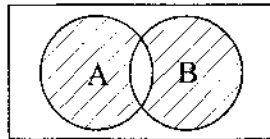
$$x^{8-2r} = x^7 \Rightarrow 8 - 2r = 7 \Rightarrow r = \frac{1}{2}$$

بنابراین ضریب x^7 برابر است با:

$$C_8^{\frac{7}{2}} = \frac{8!}{\frac{7}{2}! \frac{1}{2}!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5!}{3 \times 2 \times 5!} = 56$$

«پاسخ تشریحی تست‌های مجموعه‌ها»

۵- (۳) به مطلب (۱۷-۲) صفحه ۱۸ مراجعه کنید. ب استفاده از نمودارون به سادگی می‌توان به این سؤال پاسخ داد. نمودار ون برای $(A \cup B) - (A \cap B)$ به صورت زیر است.



نمودارون برای گزینه ۳ یعنی $(A \cap B') \cup (B \cap A')$ نیز به صورت فوق می‌بایست.

۶- (۳) به ویژگی ۷ مطلب (۱۵-۲) صفحه ۱۷ و ویژگی ۷ مطلب (۱۶-۲) صفحه ۱۸ و تست شماره ۲۸ صفحه ۳۰ مراجعه کنید.

$$A \subset B \subset C \Rightarrow \begin{cases} A \subset B \Rightarrow A \cap B = A, A \cup B = B \\ B \subset C \Rightarrow B \cap C = B, B \cup C = C \\ A \subset C \Rightarrow A \cap C = A, A \cup C = C \end{cases}$$

بنابراین:

$$[(\underbrace{A \cap B}_A) \cup C] \cap (\underbrace{A \cup B}_B) = (\underbrace{A \cup C}_C) \cap B = C \cap B = B$$

۷- (۳) به نمودار و مطلب (۱۷-۲) صفحه ۱۸ و ویژگی ۲ مطلب (۱۶-۲) و ویژگی ۲ مطلب (۵-۲) در صفحات ۱۷ و ۱۸ مراجعه کنید.

$$B' \cap A = A \cap B' = A - B \stackrel{A \subset B}{=} A - B = \phi$$

$$[(B' \cap A) \cap C] \cup C' = (\phi \cap C) \cup C' = \phi \cup C' = C'$$

۸- (۴) به مطالب (۱۶-۲) و (۱۷-۲) و (۱۸-۲) در صفحه ۱۸ و تست شماره ۲۴ صفحه ۳۰ مراجعه کنید.

$$(A - B) \cap (A \cap B) = (A \cap B') \cap (A \cap B) = (A \cap A) \cap (B \cap B') = A \cap \phi = \phi$$

۹- (۴) به قانون جذب صفحه ۱۹ مراجعه کنید.

$$A - [(A \cap B) \cup A] = A - A = \phi$$

۱۰- (۳)

$$A \subset B \subset C \Rightarrow \begin{cases} A \subset B \Rightarrow B' \subset A' \Rightarrow A' \cap B' = B' \\ B \subset C \Rightarrow C' \subset B' \Rightarrow B' \cap C' = C' \end{cases}$$

بنابرین:

$$C' \cap \underbrace{(A' \cap B')}_{B'} = C' \cap B' = C'$$

روش دیگر: به قنون دمورگن صفحه ۱۹ و ویژگی ۲ مطلب (۵-۲) صفحه ۱۷ مراجعه کنید.

$$C' \cap (A' \cap B') = C' \cap \underbrace{(A \cup B)'}_B = C' \cap B' = \underbrace{(C \cup B)'}_C = C'$$

«پاسخ تشریحی تست‌های تابع»

۱۱- (۱) به مطالب (۲-۷-۳) و (۳-۷-۳) در صفحات ۲۲ و ۳۳ و تست شماره ۶ صفحه ۴۸ مراجعه کنید.

$$[x] - 1 > 0 \Rightarrow [x] > 1 \Rightarrow D_f = \{x | x \geq 2\} = [2, +\infty)$$

۱۲- (۴) به مطلب (۲۰-۳) صفحه ۳۷ و تست شماره ۸۲ صفحه ۷۰ مراجعه کنید.

$$\frac{c^x + 2e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{3}{4} \Rightarrow 3c^x + 2e^{-x} = 2e^x + 4e^{-x} \Rightarrow c^x = e^{-x} \\ \Rightarrow x = -x \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

۱۳- (۴) به مطالب (۲-۷-۳) و (۳-۷-۳) در صفحه ۳۵ و تست شماره ۵۸ صفحه ۶۸ مراجعه کنید.

$$g(2) = \ln(2+1) = \ln 3$$

$$fog(2) = f(g(2)) = f(\ln 3) = e^{\ln 3} + 4 = 3 + 4 = 7$$

۱۴- (۱) به مطالب (۲-۷-۳) و (۳-۷-۳) در صفحات ۲۲ و ۳۳ و تست شماره ۲ صفحه ۶۴ مراجعه کنید.

$$x - |x| > 0 \Rightarrow x > |x| \Rightarrow D_f = \emptyset$$

 زیرا به ازای هیچ مقداری از x تساوی فوق برقرار نمی‌باشد.

۱۵- (۴) به مطالب (۲-۷-۳) و (۳-۷-۳) در صفحه ۳۳ و مطلب (۱۱-۳) صفحه ۳۵ و تست شماره ۶۱ صفحه ۶۹ مراجعه کنید.

$$\begin{cases} x+1 > 0 \\ \Delta^x - 1 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow D_f = (-1, +\infty) - \{0\}$$

۱۶- (۱) به مطلب (۲۰-۳) صفحه ۳۷ و تست شماره ۸۲ صفحه ۷۰ مراجعه کنید.

$$\frac{e^x}{e^x + 1} = \frac{1}{4} \Rightarrow 2e^x = e^x + 1 \Rightarrow e^x = 1 \Rightarrow x = 0$$

۱۷- (۱) به مطلب (۲۲-۳) صفحه ۳۸ و تست شماره ۶۳ صفحه ۶۹ مراجعه کنید.

$$f(x) = \cos x \Rightarrow f(-x) = \cos(-x) = \cos x \Rightarrow f(-x) = f(x)$$

۱۸- (۱) به مطلب (۵-۸-۳) صفحه ۳۴ و تست شماره ۵۷ صفحه ۶۸ مراجعه کنید.

$$y = \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \Rightarrow yc^x + y = e^x - 1 \Rightarrow e^x(1 - y) = 1 + y \Rightarrow \\ e^x = \frac{1+y}{1-y} \Rightarrow x = \ln \frac{1+y}{1-y}, \frac{1+y}{1-y} > 0 \Rightarrow D_f = (-1, 1)$$

y	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$1+y$		$-$	0	$+$
$1-y$		$+$	$+$	0
$\frac{1+y}{1-y}$		$-$	0	$+$
$\frac{1-y}{1+y}$		$+$	0	$-$

۱۹- (۴) به مطالب (۳-۷-۴) و (۳-۷-۲) در صفحات ۳۳ و ۳۲ و مطلب (۳-۱۱) صفحه ۳۵ و تست شماره ۶۱ صفحه ۶۹ مراجعه کنید.

$$\begin{cases} x > 0 \\ [x] - x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \notin \mathbb{N} \end{cases} \Rightarrow D_f = \mathbb{R}^+ - \mathbb{N}$$

۲۰- (۴) به مطلب (۳-۲۰) صفحه ۳۷ و تست شماره ۸۲ صفحه ۷۰ مراجعه کنید.

$$\frac{\delta^x - 1}{\delta^x + 1} = \frac{2}{3} \Rightarrow 3(\delta^x) - 3 = 2(\delta^x) + 2 \Rightarrow \delta^x = 5 \Rightarrow x = 1$$

۲۱- (۱) به نکته ۲ مطلب (۳-۱۲) صفحه ۳۵ و تست شماره ۸۵ صفحه ۵۵ مراجعه کنید.

$$(hogof)(x) = ho(gof)(x)$$

$$(gof)(x) = \frac{1}{x^2} \Rightarrow ho(gof)(x) = h\left(\frac{1}{x^2}\right) = \sqrt{\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{|x|}$$

۲۲- (۴) به مطلب (۳-۸-۴) صفحه ۳۴ و تست شماره ۵۷ صفحه ۶۸ مراجعه کنید.

$$y = 4 + e^{x-2} \Rightarrow e^{x-2} = y - 4 \Rightarrow \ln e^{x-2} = \ln(y - 4) \Rightarrow$$

$$x - 2 = \ln(y - 4) \Rightarrow x = \ln(y - 4) + 2 \Rightarrow y - 4 > 0 \Rightarrow y > 4$$

$$R_f = \{y | y > 4\} = (4, +\infty)$$

۲۳- (۴) به مطلب (۳-۸-۴) صفحه ۳۴ و تست شماره ۵۷ صفحه ۶۸ مراجعه کنید.

$$y = 2 - e^{-x+1} \Rightarrow e^{-x+1} = 2 - y \Rightarrow \ln e^{-x+1} = \ln(2 - y) \Rightarrow$$

$$-x + 1 = \ln(2 - y) \Rightarrow x = 1 - \ln(2 - y) \Rightarrow 2 - y > 0 \Rightarrow y < 2$$

$$R_f = \{y | y < 2\} = (-\infty, 2)$$

۲۴- (۳) به مطلب (۳-۱۲) صفحه ۳۵ و تست شماره ۶۶ صفحه ۵۳ مراجعه کنید.

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = e^{\ln(x+1)-1} = e^{\ln(x+1)} \cdot e^{-1} \Rightarrow$$

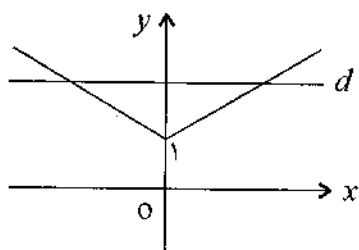
$$f \circ g(x) = (x+1)e^{-1} = \frac{1}{e}(x+1)$$

۲۵- (۱) به مطالب (۳-۱۴) و (۳-۱۵-۲) در صفحه ۳۶ و تست شماره ۱۷۲ صفحه ۶۴ مراجعه کنید.

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2|x_1| + 1 = 2|x_2| + 1 \Rightarrow |x_1| = |x_2|$$

$$\Rightarrow x_1 = \pm x_2 \Rightarrow \text{تابع یک به یک نیست.}$$

روش دیگر، نمودار تابع $y = 2|x| + 1$ به صورت زیر است و چون خط d نمودار تابع را در بیش از یک نقطه قطع می‌کند، پس تابع یک به یک نیست.



۲۶- (۴) به مطلب (۳-۸-۴) صفحه ۲۴ و تست شماره ۵۷ صفحه ۶۷ مراجعه کنید.

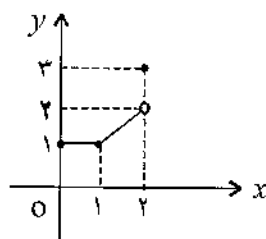
$$y = 2 + e^{-x+1} \Rightarrow e^{-x+1} = y - 2 \Rightarrow \ln e^{-x+1} = \ln(y - 2)$$

$$\Rightarrow -x + 1 = \ln(y - 2) \Rightarrow x = 1 - \ln(y - 2) \Rightarrow y - 2 > 0 \Rightarrow y > 2$$

$$R_f = \{y | y > 2\} = (2, +\infty)$$

«پاسخ تشریحی تست‌های حد و پیوستگی»

۲۷- (۲) به تست‌های ۲۱ و ۴۳ در صفحات ۹۹ و ۱۰۱ مراجعه کنید.



$$0 \leq x < 1 \Rightarrow [x] = 0 \Rightarrow y = 1$$

$$1 \leq x < 2 \Rightarrow [x] = 1 \Rightarrow y = x$$

$$x = 2 \Rightarrow [x] = 2 \Rightarrow y = 2x - 1$$

۲۸- (۳) به مطلب (۳-۱۶-۴) صفحه ۷۲ و تست شماره ۴۷ صفحه ۸۹ مراجعه کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^{x^x}) = 0^0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^{x^x}) = \exp \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^x}} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x^x}{\frac{1}{x^x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x^x}{x^x} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^{x^x}) = e^0 = 1$$

۲۹- (۱) به مطلب (۳-۱۶-۴) صفحه ۷۶ و تست شماره ۷۶ صفحه ۹۱ مراجعه کنید.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{yx + 1}{yx + 3} \right)^{yx+1} = 1^\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{yx + 1}{yx + 3} \right)^{yx+1} = \exp \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{yx+1}{yx+3}}{\frac{1}{yx+1}} = \frac{0}{0}$$

$$\xrightarrow{\text{هسپیتال}} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{yx+3 - yx-1}{(yx+3)^2}}{\frac{-1}{(yx+1)^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{f(yx+3)}{(yx+1)(yx+3)^2}}{\frac{-1}{(yx+1)^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(yx+1)^2}{-3(yx+1)(yx+3)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3yx^2 + \dots}{-12x^2 + \dots} = \frac{36}{-12} = -3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{yx + 1}{yx + 3} \right)^{yx+1} = e^{-3}$$

۳۰- (۳) به مطلب (۲-۴) صفحه ۷۱ و تست شماره ۱۷ صفحه ۹۹ مراجعه کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x - [x]}{x + 1} = \frac{1^- - [1^-]}{1^- + 1} = \frac{1^- - 0}{2} = \frac{1}{2}$$

۳۱- (۲) به قضیه ۳ مطلب (۱۹-۴) صفحه ۷۷ و تست شماره ۱۰۱ صفحه ۹۳ مراجعه کنید.

$$e^{x^2} - e^{2x} = 0 \Rightarrow e^{x^2} = e^{2x} \Rightarrow x^2 = 2x \Rightarrow x(x - 2) = 0 \Rightarrow x = 0, 2$$

۳۲- (۴) به مطلب (۱-۱۶-۴) صفحه ۷۶ و تست شماره ۴۱ صفحه ۸۸ مراجعه کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2^x - x^2}{x - 2} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{هسپتال}} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2^x \ln 2 - 2x}{1} = 4 \ln 2 - 4$$

۳۳- (۱) به قضیه ۳ مطلب (۱۹-۴) صفحه ۷۷ و تست شماره ۱۰۱ صفحه ۹۳ مراجعه کنید.

$$2^x - 8 = 0 \Rightarrow 2^x = 8 \Rightarrow 2^x = 2^3 \Rightarrow 2x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

۳۴- (۳) به مطلب (۹-۴) صفحه ۷۴ و تست شماره ۱۲ صفحه ۸۶ مراجعه کنید.

با فرض $t \rightarrow +\infty$ و $\frac{1}{x} = t$ داریم:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\Delta e^t - 3e^{-t}}{2e^t + \Delta e^{-t}} &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\Delta e^t - \frac{3}{e^t}}{2e^t + \frac{\Delta}{e^t}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\Delta e^{2t} - 3}{2e^{2t} + \Delta} \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\Delta e^{2t}}{2e^{2t}} = \frac{\Delta}{2} \end{aligned}$$

۳۵- (۲) به مطلب (۹-۴) صفحه ۷۴ و تست شماره ۴۲ صفحه ۱۰۱ مراجعه کنید.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)n!}{4[(n+1)!]^2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)(n+1)n!}{4(n+1)!(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)n!}{4(n+1)n!} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)n!}{4(n+1)n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{4n+4} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

۳۶- (۳) به مطلب (۱۰-۴) و (۱۶-۴) در صفحات ۷۵ و ۷۶ و تست شماره ۴۴ صفحه ۸۸ مراجعه کنید.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^{2x}} = \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{\text{هسپتال}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2e^{2x}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

«پاسخ تشریحی تست‌های مشتق»

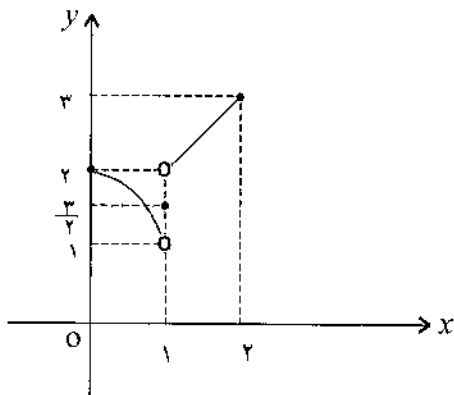
۳۷- (۳) به نکته ۱ صفحه ۱۰۶ و تست شماره ۱۱۷ صفحه ۱۴۹ مراجعه کنید.

$$\begin{aligned} f_{(x)}^{(n)} &= \frac{(-c)^{n-1} n! (ad - bc)}{(cx + d)^{n+1}} \Rightarrow f_{(x)}^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1} n! (-1)}{(x-1)^{n+1}} \Rightarrow f_{(-1)}^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(-2)^{n+1}} \\ \Rightarrow f_{(-1)}^{(n)} &= \frac{(-1)^n n!}{(-1)^{n+1} (2)^{n+1}} = \frac{-n!}{2^{n+1}} \end{aligned}$$

راه ساده‌تر: مشتق تابع $f(x) = \frac{x}{x-1}$ را در نقطه $x = -1$ به دست می‌آوریم:

$$f'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2} \Rightarrow f'(-1) = \frac{-1}{4}$$

اکنون نگاه می‌کنیم در کدام گزینه به‌ازای $n = 1$ حاصل مشتق برابر $\frac{1}{4}$ می‌شود که گزینه (۳) صحیح است.
 ۳۸- (۴) به مطلب (۵-۱۳-۵) مراجعه کنید. همان‌طور که در شکل زیر ملاحظه می‌کنید تابع دئرای مکسیمم ۳ است ولی می‌نیم ندارد.



۳۹- (۱) به قضیه مطلب (۴-۱۳-۵) صفحه ۱۱۰ مراجعه کنید.

$$f'(x_1) = 0 \Rightarrow f'(x_1)f(x_1) = 0$$

۴۰- (۴) به مطلب (۸-۵) صفحه ۱۰۷ و تست شماره ۲۴ صفحه ۱۲۵ مراجعه کنید.

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{dx}{dy} = -\frac{f'_y}{f'_x} = -\frac{\frac{x-y-x+y}{(x+y)^2}}{\frac{x+y-x+y}{(x+y)^2}} = -\frac{-2x}{2y} = \frac{x}{y}$$

در بالا از تابع ضمنی $\frac{x-y}{x+y} = e^x$ مشتق گرفته‌ایم.

۴۱- (۱) به مطلب (۱-۱۳-۵) صفحه ۱۰۸ و تست شماره ۹۶ صفحه ۱۴۷ مراجعه کنید.

$$x = 2 \Rightarrow y = c^{x-1} = e \Rightarrow A(2, c)$$

$$y'_x = c^{x-1} \Rightarrow m = y'_x(2) = e^{x-1} \Rightarrow m = c$$

$$y - y_A = m(x - x_A) \Rightarrow y - e = c(x - 2) \Rightarrow y = cx - 2c + e \Rightarrow y = e(x - 1)$$

۴۲- (۲) به مطلب (۷-۵) صفحه ۱۰۶ و تست شماره ۶۲ صفحه ۱۴۴ مراجعه کنید.

$$y' = e^{yx} + yx e^{yx} = e^{yx}(1 + yx)$$

$$y'' = 2e^{yx}(1 + yx) + 2e^{yx} = 2e^{yx}(2 + yx)$$

$$y''' = 2e^{yx}(2 + yx) + 2e^{yx} = 2e^{yx}(3 + yx)$$

$\vdots$

$$y_{(x)}^{(n)} = 2^{n-1} e^{yx}(n + yx) \Rightarrow y_{(x)}^{(n)} = 2^{n-1} e^{yx}(n + 0) = n \cdot 2^{n-1}$$

راه ساده‌تر، مشتق تابع $y = x e^{yx}$ را در نقطه $x = 0$ به‌دست می‌آوریم:

$$y'_x = e^{yx} + yx e^{yx} \Rightarrow y'_{(0)} = e^0 + 0 \Rightarrow y'_{(0)} = 1$$

اکنون نگاه می‌کنیم در کدام گزینه به ازای $n = 1$ حاصل مشتق برابر ۱ می‌شود که گزینه (۲) صحیح است.
۴۳- (۳) به نتیجه ۳ صفحه ۱۱۰ و تست شماره ۹۹ صفحه ۱۳۲ مراجعه کنید.

$$y' = \frac{2xe^{2x} - e^{2x}}{x^2} \Rightarrow y' = \frac{e^{2x}(2x - 1)}{x^2}$$

$$y' = 0 \Rightarrow e^{2x}(2x - 1) = 0 \Rightarrow e^{2x} > 0 : 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

۴۴- (۱) به مطلب (۷-۶-۵) صفحه ۱۰۶ مسئله شماره ۸ صفحه ۱۱۸ مراجعه کنید.

$$y' = x^{(-x^x)} \left[-2x \ln x + (-x^x) \frac{1}{x} \right] = x^{(-x^x)} (-2x \ln x - x)$$

$$y' = -x^{(-x^x)} \cdot x(2 \ln x + 1) = -x^{-x^x+1} (\ln x^2 + 1)$$

۴۵- (۱) به مطلب (۸-۵) صفحه ۱۰۷ و تست شماره ۳۹ صفحه ۱۲۷ مراجعه کنید.

$$x'_y = -\frac{f'_y}{f'_x} = -\frac{x + 10y - 3}{2x + y - 4} \xrightarrow{(1,1)} x'_y = -\frac{1 + 10 - 3}{2 + 1 - 4} = 8$$

۴۶- (۲) به مطلب (۲۲-۵) صفحه ۱۱۶ و مسئله شماره ۳۳ صفحه ۱۱۹ مراجعه کنید.

$$dy = -\frac{2x - 5y - 7}{-5x + 2y + 1} dx \xrightarrow{(1,1)} dy = -\frac{-10}{-2} dx \Rightarrow dy = -5dx$$

۴۷- (۲) به نتیجه ۳ صفحه ۱۱۰ و تست شماره ۷۰ صفحه ۱۴۵ مراجعه کنید.

$$y' = 3x^2 - 3, y' = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$y'' = 6x \Rightarrow y''_{(-1)} = -6 < 0 \Rightarrow x = -1 \text{ طول نقطه ماکزیم}$$

۴۸- (۴) به مطلب (۶-۱۳-۵) صفحه ۱۱۱ و تست شماره ۴۵ صفحه ۱۴۳ مراجعه کنید.

$$y' = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1 - x) \Rightarrow y'' = -e^{-x}(1 - x) - e^{-x}$$

$$y'' = -e^{-x}(1 - x + 1) = -e^{-x}(2 - x), y'' = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$y = 2e^{-2} \quad \text{عرض نقطه عطف}$$

۴۹- (۳) به قضیه مطلب (۳-۱۳-۵) صفحه ۱۰۹ و مطلب (۷-۱۳-۵) صفحه ۱۱۲ و مسائل ۱۹ و ۲۴ صفحه ۱۱۹ مراجعه کنید.

$$y' = 3x^2 - 9, y' = 0 \Rightarrow 3x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$+\infty$
y'		+	-	+

بنابراین در فاصله $[0, 2]$ ابتدا نزولی و سپس صعودی است.

$$y'' = 6x, y'' = 0 \Rightarrow 6x = 0 \Rightarrow x = 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y''		-	+

بنابراین در فاصله $[0, 2]$ محدب است.

۵۰- (۳) به مطالب (۵-۶-۵) و (۵-۶-۵) در صفحات ۱۰۴ و ۱۰۶ و تست شماره ۱۴۶ صفحه ۱۳۶ مراجعه کنید.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{y(x+1)^{y-1} - y^{x+1} \ln y}{(x+1)^y \ln(x+1) - (x+1)y^x} \xrightarrow{(0,1)} \frac{dy}{dx} = -\frac{1-0}{0-1} = 1$$

۵۱- (۲) به مطلب (۹-۶-۵) و تست شماره ۷ صفحه ۱۴۴ مراجعه کنید.

$$g'(x) = (f(x) + xf'(x))f'(x.f(x))$$

$$g'(0) = (f(0) + 0)f'(0 \times f(0)) = f(0)f'(0)$$

۵۲- (۴) به نکته ۱ صفحه ۱۰۶ و تست شماره ۱۱۷ صفحه ۱۴۹ مراجعه کنید.

$$y^{(n)} = \frac{(-c)^{n-1}n!(ad-bc)}{(cx+d)^{n+1}} = \frac{(-1)^{n-1}n!(1-0)}{(x+1)^{n+1}} \Rightarrow$$

$$y^{(n)}_{(0)} = \frac{(-1)^{n-1}n!}{(1)^{n+1}} = (-1)^{n-1}.n!$$

۵۳- (۱) به مطلب (۶-۱۳-۵) صفحه ۱۱۱ و تست های شماره ۱۳۵ و ۲۴ صفحات ۱۳۵ و ۱۴۲ مراجعه کنید.

$$y' = 3x^2 + 4ax \Rightarrow y'' = 6x + 4a$$

$$y''_{(1)} = 0 \Rightarrow 6 + 4a = 0 \Rightarrow a = -\frac{3}{2}$$

۵۴- (۴) به تست شماره ۴۰ صفحه ۱۴۳ مراجعه کنید.

$$AC = \frac{TC}{x} \Rightarrow AC = x + 9 + \frac{4}{x}$$

$$\frac{dAC}{dx} = 0 \Rightarrow 1 - \frac{4}{x^2} = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow AC = 1 + 9 + 2 = 12$$

۵۵- (۴) به مطالب (۷-۶-۵) و (۲۲-۵) در صفحات ۱۰۶ و ۱۱۶ و تست شماره ۱۱۸ صفحه ۱۴۹ مراجعه کنید.

$$dy = (x^2 + 1)^x \left[\ln(x^2 + 1) + x \frac{2x}{x^2 + 1} \right] dx$$

$$dy = 2(\ln 2 + 1) \frac{1}{2} = 1 + \ln 2$$

۵۶- (۲) به نکته ۱ صفحه ۱۰۶ مراجعه کنید.

$$y' = \frac{1}{1+x}$$

بنابراین اگر از تابع فوق مشتق مرتبه نهم بگیریم، می شود مشتق مرتبه دهم تابع $y = \ln(1+x)$ پس $n = 9$:

$$y^{(9)}_x = \frac{(-1)^4 n! (0-1)}{(1+x)^{10}} \Rightarrow y^{(9)}_{(1)} = \frac{-9!}{1} = -9!$$

۵۷- (۴) به مطلب (۴-۵) صفحه ۱۰۴ و تست شماره ۹ صفحه ۱۲۴ مراجعه کنید.

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x| + 5 - 5}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x| + 5 - 5}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$

چون مشتق‌های راست و چپ در نقطه $x = 0$ با هم برابر نیستند بنابراین تابع f در این نقطه مشتق‌پذیر نیست.
۵۸- (۳) به مطلب (۵-۲۵) صفحه ۱۱۷ مراجعه کنید.

$$dy = (e^x + xe^x)dx \Rightarrow d^2y = (e^x + e^x + xe^x)dx^2$$

$$x = 1, dx \approx \Delta x = 0.1 \Rightarrow d^2y = (e + e + e)(0.1)^2 \Rightarrow d^2y = 0.1^2 3e$$

۵۹- (۴) به مطلب (۵-۱۳-۷) صفحه ۱۱۲ و تست شماره ۷۳ صفحه ۱۴۵ مراجعه کنید.

$$y' = e^x + xe^x \Rightarrow y'' = e^x + e^x + xe^x = e^x(x+2)$$

$$y'' = 0 \Rightarrow e^x(x+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} e^x > 0 \\ x = -2 \end{cases}$$

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
y''		$-$ مقعر	$+$ محدب

با توجه به جدول مقابل f در فاصله $[-3, 3]$ ابتدا مقعر و سپس محدب است.

۶۰- (۱) به مطلب (۵-۱۳-۶) صفحه ۱۱۱ و تست شماره ۵ صفحه ۱۴۱ مراجعه کنید.

$$y' = e^x + xe^x \Rightarrow y'' = e^x(x+2)$$

$$y'' = 0 \Rightarrow e^x(x+2) = 0 \Rightarrow x = -2$$

۶۱- (۲) به مطلب (۵-۸) صفحه ۱۰۷ و تست شماره ۵۰ صفحه ۱۴۴ مراجعه کنید.

$$y'_x = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{2x - 5y + 4}{2y - 5x} \xrightarrow{(1,1)} y' = -\frac{1}{-3} = \frac{1}{3}$$

۶۲- (۲) به مطالب (۵-۲۲) و (۵-۲۶) در صفحات ۱۱۶ و ۱۱۸ و تست شماره ۱۸۲ صفحه ۱۳۹ مراجعه کنید.

$$dy = f'(x)dx = (2x+1)dx \Rightarrow dy = 3 \times 0.1 = 0.3$$

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = (x+\Delta x)^2 + (x+\Delta x) - x^2 - x$$

$$= x^2 + 2x(\Delta x) + (\Delta x)^2 + x + \Delta x - x^2 - x = \Delta x(2x + \Delta x + 1)$$

$$= 0.1(2 + 0.1 + 1) = 0.31$$

$$dy - \Delta y = 0.3 - 0.31 = -0.01$$

۶۳- (۳) به مطلب (۵-۱۳-۳) صفحه ۱۰۹ و تست شماره ۶۸ صفحه ۱۴۵ مراجعه کنید.

$$y' = e^x + xe^x = e^x(1+x)$$

$$y' = 0 \Rightarrow e^x(x+1) = 0 \Rightarrow x = -1$$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'		$-$	$+$

بنابراین تابع در فاصله $(-1, +\infty)$ اکیداً صعودی است.

۶۴-(۱) به مطلب (۵-۱۳-۷) صفحه ۱۱۲ و تست شماره ۷۳ صفحه ۱۴۵ مراجعه کنید.

$$y' = e^x + xe^x \Rightarrow y'' = e^x + e^x + xe^x = e^x(x+2)$$

$$y'' = 0 \Rightarrow e^x(x+2) = 0 \Rightarrow x = -2$$

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
y''		$-$	$+$
		مقعر	محدب

۶۵-(۴) به مطلب (۵-۱۳-۶) صفحه ۱۱۱ و تست شماره ۱۳۶ صفحه ۱۳۵ مراجعه کنید.

$$y' = \frac{2x}{1+x^2} \Rightarrow y'' = \frac{2(1+x^2) - 2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2}$$

$$y'' = 0 \Rightarrow 2-2x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

«پاسخ تشریحی تست‌های انتگرال»

۶۶-(۲) می‌دانیم حاصل انتگرال $\int_{-\infty}^1 \sin(e^x) dx$ یک عدد ثابت مانند a است. پس:

$$y = \ln(1+x^2) + a$$

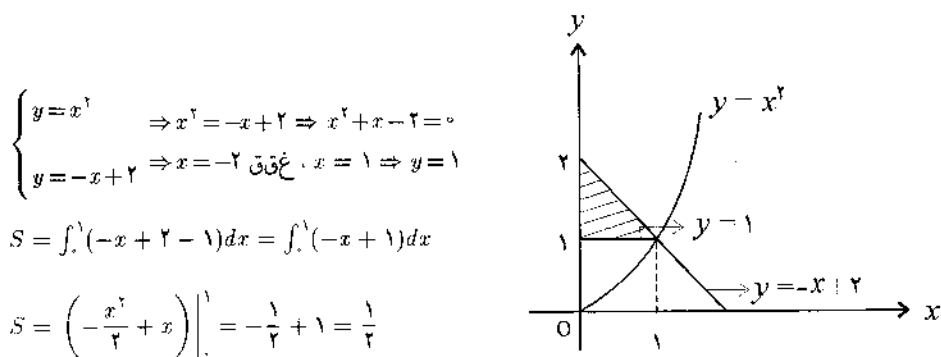
$$y'_x = \frac{2x}{1+x^2} + 0 \Rightarrow y'(1) = \frac{2}{1+1} = 1$$

۶۷-(۴) به فرمول شماره ۹ مطلب (۶-۴-۱) صفحه ۱۵۱ مراجعه کنید.

$$I(x) = \int \frac{e^{2x} - 2}{e^x} dx = \int \left(\frac{e^{2x}}{e^x} - \frac{2}{e^x} \right) dx = \int (e^x - 2e^{-x}) dx$$

$$I(x) = e^x + 2e^{-x}, \quad I(1) - I(0) = (e + 2e^{-1}) - (1 + 2) = e + 2e^{-1} - 3$$

۶۸-(۴) به مطلب (۶-۱۱-۲) صفحه ۱۵۷ و تست شماره ۲۶ صفحه ۱۸۱ مراجعه کنید.



روش دیگر، مساحت مثلث هاشور خورده را حساب می‌کنیم:

$$S = \frac{1 \times 1}{2} = \frac{1}{2}$$

۶۹-(۱) به مطلب (۶-۷) صفحه ۱۵۵ و تست شماره ۳۹ صفحه ۱۷۱ مراجعه کنید.

$$1-x=0 \Rightarrow x=1 \quad \begin{array}{c|ccc} x & -\infty & 1 & +\infty \\ \hline 1-x & + & 0 & - \end{array}$$

$$I = \int_1^2 |1-x| dx = \int_1^1 (1-x) dx + \int_1^2 (-1+x) dx$$

$$I = \left(x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_1^1 + \left(-x + \frac{x^2}{2} \right) \Big|_1^2 = \left(1 - \frac{1}{2} \right) + (-2+2) - \left(-1 + \frac{1}{2} \right) = 1$$

۷۰-(۲) به فرمول شماره ۵ مطلب (۶-۴-۱) صفحه ۱۵۱ و تست شماره ۷۴ صفحه ۱۸۴ مراجعه کنید.

$$I(x) = \int e^{\ln \sqrt{2x+1}} dx = \int \sqrt{2x+1} dx = \int (2x+1)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{(2x+1)^{\frac{1}{2}+1}}{2(\frac{1}{2}+1)} + c$$

$$I(x) = \frac{1}{3} \sqrt{(2x+1)^3}, \quad I(1) - I(0) = \sqrt{3} - \frac{1}{3}$$

۷۱-(۱) به مطلب (۶-۴-۳) صفحه ۱۵۲ و تست شماره ۳۸ صفحه ۱۸۲ مراجعه کنید.

$$u = x \Rightarrow du = dx, \quad dv = e^{\delta x} dx \Rightarrow v = \frac{1}{\delta} e^{\delta x}$$

$$\int x e^{\delta x} dx = \frac{1}{\delta} x e^{\delta x} - \frac{1}{\delta} \int e^{\delta x} dx = \frac{1}{\delta} x e^{\delta x} - \frac{1}{\delta^2} e^{\delta x} + c$$

$$\int_0^1 x e^{\delta x} dx = \left(\frac{1}{\delta} x e^{\delta x} - \frac{1}{\delta^2} e^{\delta x} \right) \Big|_0^1 = \left(\frac{e^{\delta}}{\delta} - \frac{1}{\delta^2} e^{\delta} \right) - \left(0 - \frac{1}{\delta^2} \right) = \frac{1}{\delta^2} (e^{\delta} - 1)$$

۷۲-(۳) به فرمول شماره ۲۴ مطلب (۶-۴-۱) صفحه ۱۵۱ مراجعه کنید.

$$I = \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} (\text{Arctan } x^2) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \text{Arc tan } 1$$

۷۳-(۳) به مطلب (۶-۴-۳) صفحه ۱۵۲ و تست شماره ۵۲ صفحه ۱۸۳ مراجعه کنید.

$$u = \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x}, \quad dv = dx \Rightarrow v = x$$

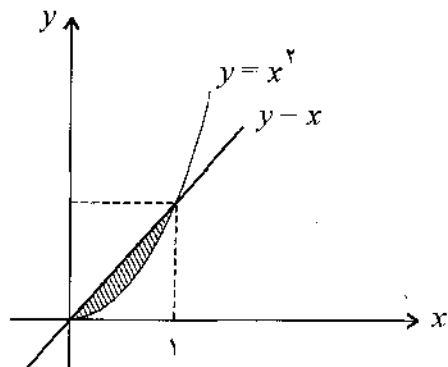
$$I(x) = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + c$$

$$I(2) - I(1) = (2 \ln 2 - 2) - (\ln 1 - 1) = 2 \ln 2 - 1$$

۷۴-(۱) به مطلب (۶-۱۱-۲) صفحه ۱۵۷ و تست شماره ۷۸ صفحه ۱۸۵ مراجعه کنید.

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow x^2 = x \Rightarrow x^2 - x = 0 \Rightarrow x = 0, 1$$

$$S = \int_0^1 (x - x^2) dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$



۷۵- (۲) به مطلب (۶-۹) صفحه ۱۵۶ و تست شماره ۶۸ صفحه ۱۷۳ مراجعه کنید.

$$u = \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x}, \quad x = 1 \Rightarrow u = 0, \quad x = 2 \Rightarrow u = \ln 2$$

$$I = 2 \int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx = 2 \int_0^{\ln 2} u du = 2 \left(\frac{u^2}{2} \right) \Big|_0^{\ln 2} = (\ln 2)^2$$

۷۶- (۴) به مطلب (۶-۲) و (۶-۳) صفحه ۱۵۲ و تست شماره ۱۲ صفحه ۱۶۸ مراجعه کنید.

$$\sqrt{x} = t \Rightarrow \frac{dx}{2\sqrt{x}} = dt \Rightarrow dx = 2\sqrt{x} dt \Rightarrow I(x) = \int (2t e^t) dt$$

$$u = t \Rightarrow du = dt, \quad dv = e^t dt \Rightarrow v = e^t$$

$$I(x) = 2(te^t - \int e^t dt) = 2te^t - 2e^t + c = 2e^t(t - 1) + c$$

$$I(x) = 2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x} - 1) + c$$

$$I(1) - I(0) = 2e(1 - 1) - 2e^0(0 - 1) = 2$$

۷۷- (۱) به مطلب (۶-۱۱) صفحه ۱۵۶ مراجعه کنید.

$$y^{\frac{1}{2}} = x \Rightarrow y = \sqrt{x}$$

$$S = \int_0^1 \sqrt{x} dx = \int_0^1 x^{\frac{1}{2}} dx = \left(\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right) \Big|_0^1 = \frac{2}{3} \left(\frac{4}{3} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{16}{3}$$

۷۸- (۳) به مطلب (۶-۲) صفحه ۱۵۰ و تست شماره ۸۷ صفحه ۱۷۴ مراجعه کنید.

$$y' = m = \sqrt{x}, \quad \frac{dy}{dx} = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow y = \int x^{\frac{1}{2}} dx \Rightarrow$$

$$y = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + c \Rightarrow y = \frac{2}{3} \sqrt{x^3} + c \xrightarrow{(1,1)} c = 0$$

$$y = \frac{2}{3} \sqrt{x^3} \text{ --- نمودار تابع از نقطه } (1, 1) \text{ می‌گذرد}$$

۷۹- (۲) به مطلب (۶-۵) صفحه ۱۵۳ و مسئله ۱۳ صفحه ۱۶۱ مراجعه کنید.

$$\frac{1}{x^{\frac{1}{2}} + x} = \frac{1}{x(x^{\frac{1}{2}} + 1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^{\frac{1}{2}} + 1} \Rightarrow$$

$$\frac{Ax^{\frac{1}{2}} + A + Bx^{\frac{3}{2}} + Cx}{x(x^{\frac{1}{2}} + 1)} = \frac{1}{x(x^{\frac{1}{2}} + 1)} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ A + B = 0 \Rightarrow B = -1 \\ C = 0 \end{cases}$$

$$\int \frac{1}{x} dx - \int \frac{x}{x^{\frac{1}{2}} + 1} dx = \ln x - \frac{1}{\frac{1}{2}} \int \frac{\frac{1}{2} x}{x^{\frac{1}{2}} + 1} dx = \ln x - \frac{1}{\frac{1}{2}} \ln(x^{\frac{1}{2}} + 1) + c =$$

$$\frac{1}{\frac{1}{2}} \ln x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{\frac{1}{2}} \ln(x^{\frac{1}{2}} + 1) = \frac{1}{\frac{1}{2}} \ln \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}} + 1} + c$$

۸۰- (۴) به مطلب (۳-۴-۶) صفحه ۱۵۲ و تست شماره ۵۲ صفحه ۱۸۳ مراجعه کنید.

$$u = \ln(x) \Rightarrow du = \frac{dx}{x}, \quad dv = dx \Rightarrow v = x$$

$$I = x \ln(x) - \int dx = x \ln(x) - x$$

$$I = \int_{\frac{1}{4}}^1 \ln(x) dx = (x \ln(x) - x) \Big|_{\frac{1}{4}}^1 = (\ln(4) - 1) - \left(\frac{1}{4} \ln \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right) = \ln 4 - \frac{7}{4}$$

۸۱- (۴) به فرمول ۵ مطلب (۱-۴-۶) صفحه ۱۵۱ و تست شماره ۵۴ صفحه ۱۸۳ مراجعه کنید.

$$I = \int_0^1 \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + 1 \right) dx = \int_0^1 \left(x(x^2+1)^{-\frac{1}{2}} + 1 \right) dx$$

$$I = \frac{1}{2} \int_0^1 2x(x^2+1)^{-\frac{1}{2}} dx + \int_0^1 dx = \frac{1}{2} \times 2(x^2+1)^{\frac{1}{2}} \Big|_0^1 + x \Big|_0^1 = \sqrt{x^2+1} \Big|_0^1 + x \Big|_0^1$$

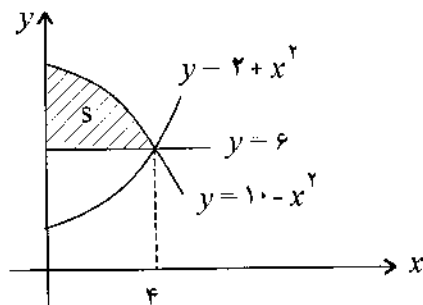
$$I = (\sqrt{2} - 1) + 1 = \sqrt{2}$$

شماره ۲۶ صفحه ۱۸۱ مراجعه کنید.

$$\begin{cases} y = 2 + x^2 & \Rightarrow 2x^2 = 8 \Rightarrow x = 2 \\ y = 10 - x^2 & \Rightarrow y = 6 \end{cases}$$

$$S = \int_0^2 (10 - x^2 - 6) dx = \int_0^2 (4 - x^2) dx$$

$$S = \left(4x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^2 = 16 - \frac{64}{3} = \frac{16}{3}$$



۸۳- (۱) به فرمول ۶ مطلب (۱-۴-۶) صفحه ۱۵۱ و تست شماره ۳۷ صفحه ۱۸۲ مراجعه کنید.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x dx}{x+1} &= \int_0^1 \frac{x+1-1}{x+1} dx = \int_0^1 dx - \int_0^1 \frac{dx}{x+1} \\ &= x \Big|_0^1 - \ln(x+1) \Big|_0^1 = 1 - \ln 2 \end{aligned}$$

۸۴- (۲) به تست ۸۳ مراجعه کنید.

۸۵- (۱) به مطلب (۳-۴-۶) صفحه ۱۵۲ و تست شماره ۳۸ صفحه ۱۸۲ مراجعه کنید.

$$u = 2x \Rightarrow du = 2 dx, \quad dv = e^{2x} dx \Rightarrow v = \frac{1}{2} e^{2x}$$

$$I = x e^{2x} - \int e^{2x} dx = x e^{2x} - \frac{1}{2} e^{2x}$$

$$I = \int_0^1 2x e^{2x} = (x e^{2x} - \frac{1}{2} e^{2x}) \Big|_0^1 = \left(e^2 - \frac{1}{2} e^2 \right) - \left(0 - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} e^2 + \frac{1}{2}$$

۸۶- (۴) به مطلب (۲-۱۱-۶) صفحه ۱۵۷ و تست شماره ۷۸ صفحه ۱۸۵ مراجعه کنید.

$$S = \int_1^1 (x^1 + 2 - xe^x) dx = \left(\frac{x^2}{2} + 2x - xe^x + e^x \right) \Big|_1^1 = \left(\frac{1}{2} + 2 \right) - 1 = \frac{3}{2}$$

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + c$$

۸۷- (۱) به مطلب (۵-۴-۶) صفحه ۱۵۳ و مسأله شماره ۱۳ صفحه ۱۶۱ مراجعه کنید.

$$\frac{2x+2}{x^2+3x+2} = \frac{2x+2}{(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} = \frac{Ax+2A+Bx+B}{(x+1)(x+2)} \Rightarrow$$

$$\frac{2x+2}{(x+1)(x+2)} = \frac{(A+B)x+2A+B}{(x+1)(x+2)} \Rightarrow \begin{cases} A+B=2 \\ 2A+B=2 \end{cases} \Rightarrow A=1, B=1$$

$$I = \int_1^1 \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} \right) dx = (\ln(x+1) + \ln(x+2)) \Big|_1^1$$

$$I = (\ln 2 + \ln 3) - (\ln 1 + \ln 2) = \ln 3 - \ln 2 = \ln \frac{3}{2}$$

۸۸- (۲) به مطلب (۱-۱۱-۶) صفحه ۱۵۶ مراجعه کنید.

$$S = \int_1^1 \frac{\sqrt{x-1}}{x} = \int_1^1 \frac{x-1}{x\sqrt{x-1}} = \int_1^1 \frac{dx}{\sqrt{x-1}} - \int_1^1 \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$$

$$S = 2(x-1)^{\frac{1}{2}} \Big|_1^1 - 2 \operatorname{Arctg} \sqrt{x-1} \Big|_1^1 = 2 - 2 \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) = 2 - \frac{\pi}{2}$$

انتگرال دوم به صورت زیر محاسبه شده است.

$$t = \sqrt{x-1} \Rightarrow \begin{cases} dt = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} \Rightarrow 2dt = \frac{1}{\sqrt{x-1}} \\ t^2 = x-1 \Rightarrow x = t^2 + 1 \end{cases}$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x-1}} = 2 \int \frac{dt}{t^2+1} = 2 \operatorname{Arctg} t = 2 \operatorname{Arctg} \sqrt{x-1}$$

۸۹- (۱) به تست شماره ۵۶ صفحه ۱۸۳ مراجعه کنید.

$$I = \int_1^1 \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx = \int_1^1 \frac{x+1-1}{(x+1)^{\frac{1}{2}}} dx = \int_1^1 (x+1)^{\frac{1}{2}} dx - \int_1^1 (x+1)^{-\frac{1}{2}} dx$$

$$I = \left(\frac{2}{3} \sqrt{(x+1)^3} - 2\sqrt{x+1} \right) \Big|_1^1 = \left(\frac{2}{3} \sqrt{8} - 2\sqrt{2} \right) - \left(\frac{2}{3} - 2 \right) = \frac{4-2\sqrt{2}}{3}$$

«پاسخ تشریحی تست‌های ماتریس»

۹۰- (۳) به مطلب (۳-۳۲-۷) صفحه ۱۹۲ و تست شماره ۲ صفحه ۲۲۵ مراجعه کنید.

$$|A| = (1-1+8) - (-2-2-2) = 8+6=14$$

۹۱- (۳) به نکته ۵ صفحه ۱۹۸ مراجعه کنید.

$$0 \leq r(A) \leq \min(5, 6) \Rightarrow 0 \leq r(A) \leq 5$$

۹۲- (۱) به مطلب (۷-۵۲) صفحه ۱۹۹ مراجعه کنید.

۹۳- (۲) به مطلب (۷-۵۲) صفحه ۱۹۹ و تست شماره ۷۹ صفحه ۲۱۸ مراجعه کنید.

$$\begin{vmatrix} m & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (-m + 2 + 2) - (2 + 1 - 2m) = 0 \Rightarrow m = -1$$

۹۴- (۳) به مطلب (۷-۴۱) صفحه ۱۹۵ و تست شماره ۱۶ صفحه ۲۲۷ مراجعه کنید.

$$A_{11} = (-1)^1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{12} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad A_{13} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

مجموع عناصر قطر اصلی ماتریس A^{-1} با توجه به فرمول $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj} A$ برابر است با:

$$\frac{1}{-1}(-1 + 0 + 3) = \frac{2}{-1}$$

۹۵- (۳) به مطلب (۷-۵۶) صفحه ۲۰۲ و مسئله شماره ۲۸ صفحه ۲۰۵ مراجعه کنید.

$$k^2 - \text{tr} A k + |A| = 0 \Rightarrow k^2 - 3k - 4 = 0 \Rightarrow (k - 4)(k + 1) = 0 \Rightarrow k' = 4, \quad k'' = -1$$

۹۶- (۴) به مطلب (۷-۳۲-۳) صفحه ۱۹۲ و تست شماره ۲۷ صفحه ۲۱۳ مراجعه کنید.

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (6a + 0 + 1) - (4 + 0 - a) = 0 \Rightarrow a = \frac{3}{7}$$

۹۷- (۱) به مطلب (۷-۱۵) صفحه ۱۸۸ و تست شماره ۴۲ صفحه ۲۲۹ مراجعه کنید.

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+6+3 & & \\ & 6+4+3 & \\ & & 3+3+4 \end{bmatrix}$$

کافی است فقط سطر اول را در ستون اول، سطر دوم را در ستون دوم و سطر سوم را در ستون سوم ضرب کنیم تا عناصر قطر ماتریس A^2 به دست آید. پس:

$$A^2 \text{ عناصر قطر ماتریس} = 10 + 13 + 10 = 33$$

۹۸- (۳) به مطلب (۷-۴۱) صفحه ۱۹۵ و تست شماره ۶۲ صفحه ۲۳۱ مراجعه کنید.

$$A_{11} = (-1)^1 \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{12} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 3, \quad A_{13} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{11}^{-1} = \frac{A'_{11}}{|A|} = \frac{-1}{-1} = 1, \quad A_{12}^{-1} = \frac{A'_{12}}{|A|} = \frac{3}{-1} = -3, \quad A_{13}^{-1} = \frac{A'_{13}}{|A|} = \frac{-2}{-1} = 2$$

$$A_{11}^{-1} + A_{12}^{-1} + A_{13}^{-1} = 1 - 3 + 2 = 0$$

۹۹- (۲) به ویژگی ۶ مطلب (۷-۲۳) صفحه ۱۹۳ و مطلب (۷-۳۲-۳) صفحه ۱۹۲ مراجعه کنید.

(۱-) برابر سطر اول را به سطرهای دوم و سوم و چهارم می‌افزاییم. در نتیجه:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 8 & 15 \\ 0 & 7 & 26 & 63 \end{vmatrix}$$

حال نسبت به ستون اول بسط می‌دهیم:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 8 & 15 \\ 7 & 26 & 63 \end{vmatrix} = (504 + 234 + 210) - (168 + 378 + 390) = 12$$

۱۰۰-۲) به ویژگی ۱۰ مطلب (۷-۳۳) صفحه ۱۹۴ مراجعه کنید.

$$|AB| = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 6 & 7 & 9 \\ 0 & 5 & 6 \end{vmatrix} = (210 + 30) - (225) = 15$$

$$|AB| = |A||B| \Rightarrow 15 = 5|B| \Rightarrow |B| = 3$$

۱۰۱-۱) به مطالب (۷-۹) و (۷-۱۵) در صفحات ۱۸۷ و ۱۸۸ و تست شماره ۲۸ صفحه ۲۱۳ مراجعه کنید.

ماتریس A را به صورت $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ در نظر می‌گیریم:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -a & 2a+b \\ -c & 2c+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -a = 2 \\ -c = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ c = 1 \end{cases}, \begin{cases} 2a+b = 1 \\ 2c+d = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4+b = 1 \\ 2+d = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 5 \\ d = -1 \end{cases}$$

البته دیگر نیازی به محاسبه مقادیر b و d نبود، زیرا $a = -2$ و $c = 1$ تنها در گزینه (۱) صدق می‌کرد.

راه حل دیگر: می‌توانستیم با جایگذاری گزینه‌ها به جای A و ضرب آن در $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ جواب درست را بیابیم.

۱۰۲-۳) به مطلب (۷-۴۶) صفحه ۱۹۷ و تست شماره ۷۴ صفحه ۲۱۷ مراجعه کنید.

$$|A| = (-4 + 56 - 56) - (-4 - 56 + 56) = 0 \Rightarrow r(A) < n$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 28 = -26 \neq 0 \Rightarrow r(A) = 2$$

۱۰۳-۴) به مطالب (۷-۲۶) و (۷-۱۵) در صفحات ۱۹۱ و ۱۸۸ مراجعه کنید.

$$AA' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+4+1 & 0+1+4 & 2+2+0 \\ 2+2+0 & 1+2+0 & 0+1+0 \\ 2-1+0 & 1+2+0 & 0-2+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 4 \\ 4 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

برای به دست آورد عناصر قطر اصلی کافی است سطر اول را در ستون اول، سطر دوم را در ستون دوم و سطر سوم را در ستون سوم ضرب کنیم.

$$AA' \text{ قطر} = 6 + 5 + 5 = 16$$

۱۰۴- (۳) به مطلب (۷-۳۲-۳) صفحه ۱۹۲ و تست شماره ۲ صفحه ۲۲۵ مراجعه کنید.

$$|A| = (0 + 0 + 8) - (-2 + 0 + 2) = 8$$

۱۰۵- (۲) به مطلب (۷-۴۱-۱) صفحه ۱۹۶ و تست شماره ۷۹ صفحه ۲۳۳ مراجعه کنید.

$$A^{-1} = \frac{1}{8-3} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}, A^{-1} \text{ مجموع عناصر روی قطر} = \frac{4}{5} + \frac{2}{5} = \frac{6}{5}$$

۱۰۶- (۱) به مطلب (۷-۳۲-۳) صفحه ۱۹۲ و تست شماره ۲ صفحه ۲۲۵ مراجعه کنید.

$$|A| = (1 + 0 - 2) - (3 + 4 + 0) = -1 - 7 = -8$$

۱۰۷- (۴) به مطلب (۷-۴۱) صفحه ۱۹۵ و تست شماره ۱۶ صفحه ۲۲۷ مراجعه کنید.

$$A_{11} = (-1)^1 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{22} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{33} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3$$

مجموع عناصر قطری ماتریس A^{-1} با توجه به فرمول $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj}A$ برابر است با:

$$-\frac{1}{8}(1 - 2 - 3) = \frac{1}{4}$$

۱۰۸- (۱) به مطلب (۷-۱۵) صفحه ۱۸۸ و تست شماره ۳۲ صفحه ۲۲۸ مراجعه کنید.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1+4+3 & 2+2+0 & 3-2+3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 8 & 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow 8x + 4 + 4 = 0 \Rightarrow x = -1$$

۱۰۹- (۳) به مطلب (۷-۵۲) صفحه ۱۹۹ مراجعه کنید.

«پاسخ تشریحی تست‌های خط، بردار، صفحه»

۱۱۰- (۳) به نکته ۱ صفحه ۲۲۴ و تست شماره ۲ صفحه ۲۵۴ مراجعه کنید.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (4a + 6 + 0) - (0 + 4a + 6) = 0 \Rightarrow a \in \mathbb{R}$$

۱۱۱- (۳) به نکته ۱ صفحه ۲۲۴ و تست شماره ۲ صفحه ۲۵۴ مراجعه کنید.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ m & 3 & 7 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (7 + 18 + 8m) - (3m + 14 + 12) = 0$$

$$\Rightarrow 25 + 8m - 3m - 26 = 0 \Rightarrow 5m = 15 \Rightarrow m = 3$$

«پاسخ تشریحی تست‌های توابع چندمتغیره»

۱۱۲- (۲) به مطلب (۹-۱۴) صفحه ۲۶۰ و تست شماره ۱۱۷ صفحه ۲۷۷ مراجعه کنید.

$$\begin{cases} z_x = 0 \\ z_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 36x - 36 = 0 \Rightarrow x = 1 \\ -64y - 128 = 0 \Rightarrow y = -2 \end{cases} \Rightarrow x + y = -1$$

۱۱۳- (۴) به مطلب (۹-۱۱) صفحه ۲۵۹ و تست شماره ۳۶ صفحه ۲۸۱ مراجعه کنید.

$$z'_x = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{F'_1 + yF'_4}{yF'_1 + 2zF'_4}$$

۱۱۴- (۲) به مطلب (۹-۱۰) صفحه ۲۵۸ و تست شماره ۵۰ صفحه ۲۷۱ مراجعه کنید.

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = f'_1 \times 1 + f'_2 \times (-1) + f'_3 \times (-1) + f'_4 \times 1 = 0$$

۱۱۵- (۴) به مطلب (۹-۱۶-۳) صفحه ۲۶۱ و تست شماره ۱۱۳ صفحه ۲۷۶ مراجعه کنید.

$$z_x = 2x - 4y \Rightarrow z_{xx} = 2 \Rightarrow |H_1| = z_{xx} = 2 > 0$$

$$z_{xy} = -4, \quad z_y = 3y^2 - 4x - 11 \Rightarrow z_{yy} = 6y \xrightarrow{(-2, -1)} z_{yy} = -6$$

$$|H_2| = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -4 & -6 \end{vmatrix} = -12 - 16 = -28 < 0$$

بنابراین $|H_1| > 0$ و $|H_2| < 0$ پس نوع نقطه زینی است.

۱۱۶- (۲) به مطلب (۹-۱۷) صفحه ۲۶۱ و تست شماره ۱۳۲ صفحه ۲۷۸ مراجعه کنید.

$$3q_1 + 6q_2 = 90 \Rightarrow q_2 = 15 - \frac{1}{2}q_1$$

$$U = 2q_1 \left(15 - \frac{1}{2}q_1 \right) - q_1^2 \Rightarrow U = 30q_1 - q_1^2 - q_1^2 \Rightarrow U = 30q_1 - 2q_1^2$$

$$U_{q_1} = 30 - 4q_1 = 0 \Rightarrow 4q_1 = 30 \Rightarrow q_1 = 7.5$$

q_1	$-\infty$	7.5	$+\infty$
U_{q_1}		+	-
		max	

۱۱۷- (۳) به باورقی صفحه ۲۵۵ مراجعه کنید.

$$\begin{cases} x+y > 0 \\ \ln(x+y) - 1 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y > 0 \\ \ln(x+y) \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y > 0 \\ x+y \neq e \end{cases}$$

۱۱۸- (۴) به مطلب (۹-۱۰) صفحه ۲۵۸ و تست شماره ۱۳ صفحه ۲۷۹ مراجعه کنید.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = (2U - 2V) \left(\frac{1}{y} \right) + (2V - 2U)(-2x)$$

$$x = y = 1 \Rightarrow U = 1, V = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (2 - 0)(1) + (-2)(-2) = 2 + 4 = 6$$

۱۱۹- (۲) به مطلب (۹-۱۴) صفحه ۲۶۰ و تست شماره ۱۲۳ صفحه ۲۷۷ مراجعه کنید.

$$\begin{cases} z_x = 0 \\ z_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x-y+3-x-2y}{(x-y+3)^2} = 0 \\ \frac{2x-2y+6+x+2y}{(x-y+3)^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2-2y=0 \\ 3x+6=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=1 \\ x=-2 \end{cases} \Rightarrow x+y=-1$$

۱۲۰- (۲) به باورقی صفحه ۲۵۵ و تست شماره ۷ صفحه ۲۶۷ مراجعه کنید.

حداقل مقدار z برابر صفر است و حداکثر تا $+\infty$ می‌تواند باشد بنابراین $R_f = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.

۱۲۱- (۱) به مطلب (۹-۱۲) صفحه ۲۵۹ و تست شماره ۹۱ صفحه ۲۸۵ مراجعه کنید.

$$z \rightarrow \frac{\lambda x}{\lambda y} + \frac{\lambda y}{\lambda x} + \ln \frac{\lambda x}{\lambda y} = \lambda \cdot \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \ln \frac{x}{y} \right) = \lambda \cdot z \Rightarrow n = 0$$

$$x \cdot z'_x + y \cdot z'_y = nz = 0$$

۱۲۲- (۴) به مطلب (۹-۱۴) صفحه ۲۶۰ و تست شماره ۱۲۳ صفحه ۲۷۷ مراجعه کنید.

$$\begin{cases} z_x = 0 \\ z_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2x+2y-2x-y+1}{(x+2y)^2} \\ \frac{x+2y-2x-2y+2}{(x+2y)^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y+1=0 \\ -2x+2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-\frac{1}{2} \\ x=1 \end{cases} \Rightarrow x+y=\frac{1}{2}$$

۱۲۳- (۱) به مطلب (۹-۱۴) صفحه ۲۶۰ و تست شماره ۶۰ صفحه ۲۸۳ مراجعه کنید.

$$\begin{cases} z_x = 0 \\ z_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x+2=0 \\ -2y+2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow z=1^0-1+2-1+16 \Rightarrow z=19$$

۱۲۴- (۳) به مطلب (۹-۱۶-۳) صفحه ۲۶۱ و تست شماره ۱۱۴ صفحه ۲۷۶ مراجعه کنید.

$$z_{xx} = -2, \quad z_{xy} = z_{yx} = 0, \quad z_{yy} = -4$$

$$|H_1| = z_{xx} = -2 < 0, \quad |H_2| = \begin{vmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ z_{yx} & z_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = 8 > 0$$

چون $|H_1| < 0$ و $|H_2| > 0$ پس نوع نقطه اکسترمم ماکزیمم است.

۱۲۵- (۲) به مطلب (۹-۱۷) صفحه ۲۶۱ و مسأله شماره ۲۴ صفحه ۲۶۳ مراجعه کنید.

$$L = x^2 + y^2 + \lambda(\delta - x - 2y)$$

$$\left. \begin{aligned} L_x = 2x - \lambda = 0 &\Rightarrow \lambda = 2x \\ L_y = 2y - 2\lambda = 0 &\Rightarrow \lambda = y \end{aligned} \right\} \Rightarrow y = 2x$$

$$L_\lambda = \delta - x - 2y = 0 \Rightarrow \delta - x - 4x = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow \lambda = 2(1) = 2$$

۱۲۶- (۱) به باورقی صفحه ۲۵۵ مراجعه کنید.

$$\begin{cases} 1 - x^2 - y^2 - z^2 > 0 \\ \ln(1 - x^2 - y^2 - z^2) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 < 1 \\ 1 - x^2 - y^2 - z^2 \neq e^c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 < 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 \neq 0 \end{cases}$$

۱۲۷- (۲) به مطلب (۹-۱۰) صفحه ۲۵۸ و تست شماره ۸۹ صفحه ۲۷۴ مراجعه کنید.

$$r = s = 1 \Rightarrow x = 3 - 2 = 1, \quad y = 4 - 2 = 2, \quad z = 2 - 3 = -1$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial s}$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \left(-\frac{zy}{x^2} \cdot (-2) \right) + \left(\frac{z}{x} \cdot (-6s) \right) + \left(\frac{y}{x} \cdot (-6s) \right) \xrightarrow{r=s=1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \left(-\frac{-2}{1} \cdot (-2) \right) + (-1 \cdot (-6)) + (2 \cdot (-6)) = -4 + 6 - 12 = -10$$

۱۲۸- (۱) به مطلب (۹-۱۴) صفحه ۲۶۰ و تست شماره ۱۳۱ صفحه ۲۷۸ مراجعه کنید.

$$\begin{cases} z_x = y + 2 - \frac{2xy}{x^2y} = 0 \\ z_y = x - \frac{x^2}{x^2y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y - \frac{2}{x} = -2 \\ x - \frac{1}{y} = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{1}{y}, y = 2$$

نیازی به حل دستگاه فوق نیست زیرا تنها گزینه (۱) در آن صدق می‌کند.

۱۲۹- (۱) به باورقی صفحه ۲۵۵ مراجعه کنید.

$$x^2 + y^2 + 1 \neq 0 \Rightarrow D_f = \mathbb{R}^2$$

۱۳۰- (۲) به مطلب (۹-۱۱) صفحه ۲۵۹ و تست شماره ۵۷ صفحه ۲۸۳ مراجعه کنید.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{2x + y^2 e^{xy} - y - yz}{1 - xy} \xrightarrow{(1,1,-1)} \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2}{1} = -2$$

۱۳۱- (۳) به مطلب (۹-۹) صفحه ۲۵۸ و تست شماره ۷۵ صفحه ۲۷۳ مراجعه کنید.

$$dz = (x + y)dx + (x + \lambda y)dy \xrightarrow{(1,1)}_{dx=dy=1} dz = 1 + 1 = 2$$

۱۳۲- (۱) به مطلب (۹-۱۴) صفحه ۲۶۰ و تست شماره ۱۱۶ صفحه ۲۷۶ مراجعه کنید.

$$\begin{cases} z_x = 0 \\ z_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y - 2x = 0 \\ x - 4y + 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y - 2x = 0 \\ -4y + x = -7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4y - 8x = 0 \\ -4y + x = -7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -7x = -7 \\ x = 1, y = 2 \end{cases}$$

$$z = 2 - 1 - 8 + 14 \Rightarrow z = 7 \rightarrow (1, 2, 7)$$

نیازی به یافتن مقادیر y و z نبود زیرا تنها درگزینه (۱) مقدار x برابر ۱ است.

۱۳۳- (۴) به مطلب (۹-۱۶-۳) صفحه ۲۶۱ و تست شماره ۱۱۶ صفحه ۲۷۶ مراجعه کنید.

$$z_{xx} = -2, \quad z_{xy} = z_{yx} = 1, \quad z_{yy} = -4$$

$$|H_1| = z_{xx} = -2, \quad |H_2| = \begin{vmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ z_{yx} & z_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = 8 - 1 = 7$$

چون $|H_1| < 0$ و $|H_2| > 0$ پس نقطه بحرانی، نقطه ماکزیمم مطلق است.

۱۳۴- (۳) به پاورقی صفحه ۲۵۵ و تست شماره ۷ صفحه ۲۶۷ مراجعه کنید.

$$100 - 2x^2 - y^2 \geq 0 \Rightarrow 2x^2 + y^2 \leq 100$$

می‌دانیم $2x^2 + y^2 \geq 0$ بنابراین:

$$0 \leq 2x^2 + y^2 \leq 100 \Rightarrow 0 \geq -2x^2 - y^2 \geq -100 \Rightarrow 100 \geq 100 - 2x^2 - y^2 \geq 0 \Rightarrow$$

$$10 \geq \sqrt{100 - 2x^2 - y^2} \geq 0 \Rightarrow R_f = [0, 10]$$

۱۳۵- (۴) به مطلب (۹-۱۰) صفحه ۲۵۸ و تست شماره ۸۹ صفحه ۲۷۴ مراجعه کنید.

$$x = y = 1 \Rightarrow U = 1, \quad V = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = (2U + 2V) \left(\frac{1}{y} \right) + (2U)(2x)$$

$$\xrightarrow{x=y=1} \frac{\partial z}{\partial x} = (2)(1) + (2)(2) = 6$$

۱۳۶- (۲) به مطلب (۹-۱۴) صفحه ۲۶۰ و تست شماره ۱۱۶ صفحه ۲۷۶ مراجعه کنید.

$$\begin{cases} z_x = 0 \\ z_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 2y - 12 = 0 \\ 2x - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow 4x = 12 \Rightarrow x = 3, y = 3 \Rightarrow z = -18$$

نیازی به محاسبه مقادیر y و z نبود زیرا تنها درگزینه (۲) مقدار x برابر ۳ است.

۱۳۷- (۲) به مطلب (۳-۱۶-۹) صفحه ۲۶۱ و تست شماره ۱۱۶ صفحه ۲۷۶ مراجعه کنید.

$$z_{xx} = 2, \quad z_{xy} = z_{yx} = 2, \quad z_{yy} = -2$$

$$|H_1| = z_{xx} = 2, \quad |H_2| = \begin{vmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ z_{yx} & z_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -8$$

چون $|H_1| > 0$ و $|H_2| < 0$ بنابرین نوع نقطه بحرانی، زینی است.

۱۳۸- (۴) به مطلب (۴-۱۷-۹) صفحه ۲۶۱ و تست شماره ۱۳۸ صفحه ۲۷۸ مراجعه کنید.

$$L = xy + \lambda(100 - x - 2y)$$

$$\left. \begin{aligned} L_x = y - \lambda = 0 &\Rightarrow \lambda = y \\ L_y = x - 2\lambda = 0 &\Rightarrow \lambda = \frac{x}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{x}{2} = y \Rightarrow x = 2y$$

$$L_\lambda = 100 - x - 2y = 0 \Rightarrow 100 - 4y = 0 \Rightarrow y = 25 \Rightarrow \lambda = 25$$

۱۳۹- (۳) به تست شماره ۱۳۸ صفحه ۲۷۸ مراجعه کنید.

$$y = 25 \Rightarrow x = 2(25) = 50 \Rightarrow z = 50 \times 25 = 1250$$

«پاسخ تشریحی تست‌های سری‌ها»

۱۴۰- (۳) به مطلب (۱-۲-۱۰) صفحه ۲۸۷ و تست شماره ۶ صفحه ۲۹۷ مراجعه کنید.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{2n} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right) = e^2$$

۱۴۱- (۲) برای حل می‌توان از فرمول $\ln a + \ln b + \dots = \ln(a \times b \times \dots)$ استفاده کرد.

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{29} \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) &= \ln(2) + \ln\left(\frac{3}{2}\right) + \ln\left(\frac{4}{3}\right) + \ln\left(\frac{5}{4}\right) + \dots + \ln\left(\frac{29}{28}\right) + \ln\left(\frac{30}{29}\right) \\ \sum_{n=1}^{29} \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) &= \ln \left(2 \times \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \dots \times \frac{29}{28} \times \frac{30}{29}\right) = \ln 30 \end{aligned}$$

«پاسخ تشریحی تست‌های دیفرانسیل»

۱۴۲- (۲) به مطلب (۵-۵-۱۱) صفحه ۳۰۵ و تست شماره ۲۹ صفحه ۳۱۲ مراجعه کنید.

$$x \cdot \frac{dy}{dx} + y = e^x \Rightarrow \frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = \frac{e^x}{x}$$

$$A = e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{\ln x} = x$$

$$y = \frac{c}{x} + \frac{1}{x} \int x \cdot \frac{e^x}{x} dx = \frac{c}{x} + \frac{1}{x} \int e^x dx \Rightarrow y = \frac{c}{x} + \frac{e^x}{x}$$

«پاسخ تشریحی تست‌های مختصات قطبی، اعداد مختلط»

۱۴۳-۳) به مطلب (۹-۱۳) صفحه ۳۲۴ و تست شماره ۹ صفحه ۳۲۹ مراجعه کنید.

$$z = \frac{1}{u+1} \Rightarrow \frac{1}{z} = u+1 \Rightarrow u = \frac{1}{z} - 1 \Rightarrow$$

$$x+iy = \frac{1}{a+ib} - 1 \Rightarrow x+iy = \frac{a-ib}{a^2+b^2} - 1 \Rightarrow$$

$$x+iy = \frac{a-ib-a^2-b^2}{a^2+b^2} = \frac{a-a^2-b^2}{a^2+b^2} - i \frac{b}{a^2+b^2} \Rightarrow y = -\frac{b}{a^2+b^2}$$

۱۴۴-۲) به مطلب (۷-۱۳) صفحه ۳۲۴ مراجعه کنید.

$$z = \left(\frac{2i}{1+i} \right)^{1/2} = \left(\left(\frac{2i}{1+i} \right)^2 \right)^{1/4} = \left(\frac{4i^2}{1+2i+i^2} \right)^{1/4} = \left(\frac{4i^2}{1+2i-1} \right)^{1/4} \Rightarrow$$

$$z = (2i)^{1/4} = \sqrt[4]{2} i^{1/4} = \sqrt[4]{2} \cdot i^{1/4} = \sqrt[4]{2} i$$

ضمیمه ۳

سؤالات ریاضیات آزمون‌های کارشناسی ارشد

سال‌های ۸۱ و ۸۲

«دستور دو جمله‌ای»

۱- چند جمله گویا در بسط دو جمله‌ای $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^{100}$ وجود دارد؟

(۴) ۱۸

(۳) ۱۷

(۲) ۱۶

(۱) ۱۵

(اقتصاد - ۸۱)

۲- در بسط دو جمله‌ای $(x^2 + \frac{1}{x^3})^{20}$ ، ضریب جمله‌ای که مستقل از x باشد، کدام است؟

(۴) C_{10}^{20}

(۳) C_{10}^{10}

(۲) C_0^{20}

(۱) C_{10}^{10}

(اقتصاد - ۸۲)

۳- در بسط $(\frac{x^2}{y} - \frac{1}{x})^9$ ، ضریب جمله‌ای که فاقد x است، کدام است؟

(۴) $-\frac{21}{4}$

(۳) $\frac{21}{4}$

(۲) $-\frac{7}{4}$

(۱) $\frac{7}{4}$

(مدیریت - ۸۲)

«مجموعه‌ها»

۴- مجموعه‌ای n عضو دارد و به آن سه عنصر دیگر اضافه شد. در این صورت تعداد زیرمجموعه‌های آن چند

برابر زیرمجموعه‌های مجموعه اولیه است؟

(۴) ۸

(۳) ۶

(۲) ۴

(۱) ۳

(اقتصاد - ۸۱)

۵- مجموعه $[(A \cap B) \cup (A - B)] \cap A'$ برابر کدام است؟

(۴) $A \cup B$

(۳) ϕ

(۲) B

(۱) A

(مدیریت - ۸۱)

۶- در مجموعه جهانی $U = \{x | x \in N, x \leq 15\}$ اگر A مجموعه اعداد فرد و B مجموعه اعداد بخش پذیر

بر ۳ باشد، مجموعه $A \cap B$ چند زیرمجموعه دارد؟

(۴) ۸

(۳) ۶

(۲) ۳

(۱) ۱۲

(حسابداری - ۸۱)

۷- حاصل $[A \cup B' \cup C'] \cap [A \cup (B \cap C)]$ در مجموعه‌ها برابر است با:

(۴) A

(۳) A'

(۲) ϕ

(۱) $A \cup B$

(اقتصاد - ۸۲)

۸- یک مجموعه n عنصر مجزا دارد، به این مجموعه ۳ عنصر متمایز از عناصر مجموعه به آن اضافه شده، تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه جدید، چند برابر زیرمجموعه‌های، مجموعه اولیه است؟

- (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۸ (۴) ۱۶

(مدیریت - ۸۲)

۹- کدام یک از روابط زیر نادرست است؟

- (۱) $A \cup (A - B) = A$ (۲) $(A - B) = A \cap B'$
(۳) $(A \cup B)' \cup A = A \cup B'$ (۴) $B \cap (B - A) = A \cup B$

(حسابداری - ۸۲)

«تابع»

۱۰- اگر $x > 1$ ، $f(x) = x^2 - 2x + 4$ ، آن‌گاه معادله f^{-1} ، کدام است؟

- (۱) $Y = 1 + \sqrt{X - 3}$ (۲) $Y = 1 + \sqrt{X + 3}$
(۳) $Y = 1 \pm \sqrt{X - 3}$ (۴) $Y = -1 + \sqrt{X - 3}$

(مدیریت - ۸۱)

۱۱- دامنه تابع $f(x) = \frac{\sqrt{4 - x^2}}{\ln(x - 1)}$ ، کدام است؟

- (۱) $[1, 2]$ (۲) $[1, 2)$ (۳) $(1, 2]$ (۴) $(1, 2)$

(مدیریت - ۸۱)

۱۲- برد تابع حقیقی f به معادله $y = \ln(x^2 + 1)$ ، کدام است؟

- (۱) $\mathbb{R}$ (۲) $(0, 1)$ (۳) $(\frac{1}{e}, \infty)$ (۴) $[0, \infty)$

(مدیریت - ۸۱)

۱۳- تابع با ضابطه $f(x) = |x - 1| - |x + 1|$ چگونه است؟

- (۱) فرد (۲) زوج (۳) هم فرد و هم زوج (۴) نه فرد و نه زوج

(حسابداری - ۸۱)

۱۴- دامنه تعریف تابع حقیقی f به معادله $y = \sqrt{\log \frac{5x - x^2}{4}}$ ، کدام فاصله است؟

- (۱) $\mathbb{R}^+$ (۲) $[0, 5]$ (۳) $[1, 4]$ (۴) $(-\infty, 0] \cup [5, +\infty)$

(حسابداری - ۸۱)

۱۵- برد تابع $y = \sqrt{1 - x^2}$ ، کدام فاصله است؟

- (۱) $\mathbb{R} - (-1, 1)$ (۲) $\mathbb{R}^+$ (۳) $[0, 1]$ (۴) $[-1, 1]$

(حسابداری - ۸۱)

۱۶- اگر $f(x) = \ln(2x + 1)$ و $g(x) = \frac{1}{e^x - 1}$ ، آن‌گاه $D_{g \circ f}$ ، کدام است؟

- (۱) $\mathbb{R}$ (۲) $\mathbb{R} - \{0\}$

$$\left(-\frac{1}{4}, +\infty\right) \quad (۴) \qquad \left(-\frac{1}{4}, +\infty\right) - \{0\} \quad (۳)$$

(اقتصاد - ۸۲)

۱۷- دامنه تابع f با ضابطه $f(x) = \frac{2}{1 - \ln(x+2)}$ کدام مجموعه است؟

$$\{x|x > -2, x \neq e-2\} \quad (۲) \qquad \{x \in \mathbb{R}, x \neq -2\} \quad (۱)$$

$$\{x|x > -2\} \quad (۴) \qquad \{x \in \mathbb{R}, x \neq e-2\} \quad (۳)$$

(اقتصاد - ۸۲)

۱۸- برد تابع حقیقی با ضابطه $f(x) = 3 \log(\sin x)^2$ کدام است؟

$$(-\infty, 0] \quad (۴) \qquad (-\infty, 0) \quad (۳) \qquad (0, 1) \quad (۲) \qquad [0, 1] \quad (۱)$$

(اقتصاد - ۸۲)

۱۹- دامنه تابع حقیقی f با ضابطه $f(x) = \frac{\ln(2x+1)}{\sqrt{x(x+1)}}$ کدام است؟

$$\left(-\frac{1}{2}, 0\right) \quad (۴) \qquad (-1, +\infty) \quad (۳) \qquad (0, +\infty) \quad (۲) \qquad (-\infty, 0) \quad (۱)$$

(مدیریت - ۸۲)

۲۰- برد تابع حقیقی f با ضابطه $y = \frac{e^{2x} - e^x}{2}$ کدام است؟

$$\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right) \quad (۴) \qquad \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \quad (۳) \qquad \left[-\frac{1}{\lambda}, +\infty\right) \quad (۲) \qquad [0, e] \quad (۱)$$

(مدیریت - ۸۲)

۲۱- دامنه تابع $y = \sqrt{x-|x|} + \sqrt{x - \sin x}$ کدام است؟

$$\mathbb{R} \quad (۴) \qquad -\frac{\pi}{4} \leq x \leq 0 \quad (۳) \qquad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \quad (۲) \qquad x \geq 0 \quad (۱)$$

(حسابداری - ۸۲)

۲۲- اگر $f(x) = \frac{x+1}{2x+1}$ و $g(x+1) = \frac{x}{x+1}$ باشد، ضابطه $f(g(x))$ برابر است با:

$$\frac{x+1}{2x+1} \quad (۴) \qquad \frac{2x+1}{3x+2} \quad (۳) \qquad \frac{2x-1}{3x-2} \quad (۲) \qquad \frac{x-1}{2x-1} \quad (۱)$$

(حسابداری - ۸۲)

۲۳- اگر $F(\arcsin \frac{x-1}{x+1}) = x+2$ باشد، آنگاه $F(x)$ برابر است با:

$$F(x) = \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \quad (۲) \qquad F(x) = \frac{\sin x - 1}{1 + \sin x} \quad (۱)$$

$$F(x) = \frac{3 - \sin x}{1 - \sin x} \quad (۴) \qquad F(x) = \frac{2 + \sin x}{1 - \sin x} \quad (۳)$$

(حسابداری - ۸۲)

«حد و پیوستگی»

۲۴- حاصل $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x$ کدام است؟

$$e^2 \quad (۴) \qquad e^{-1} \quad (۳) \qquad e \quad (۲) \qquad 1 \quad (۱)$$

(اقتصاد - ۸۱)

۲۵- مقدار حد، $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ ، کدام است؟

$$e \quad (۱) \quad \infty \quad (۲) \quad ۱ \quad (۳) \quad e^+ \quad (۴)$$

(مدیریت - ۸۱)

۲۶- حد تابع $y = (1 - \frac{2}{x^2})^x$ هنگامی که x به سمت بی نهایت میل کند، برابر است با:

$$e \quad (۱) \quad ۱ \quad (۲) \quad e^+ \quad (۳) \quad 2e \quad (۴)$$

(حسابداری - ۸۱)

۲۷- مقدار $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\frac{x-3}{x+1})^{x+2}$ ، کدام است؟

$$1 - e^+ \quad (۱) \quad 1 - e \quad (۲) \quad e^{-+} \quad (۳) \quad e^{-2} \quad (۴)$$

(اقتصاد - ۸۲)

۲۸- کدام یک از گزاره‌های زیر نادرست است؟

$$(۱) \text{ اگر } p > 0, \text{ آنگاه } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{p} = 1$$

$$(۲) \text{ اگر } p > 0 \text{ و } \alpha \text{ حقیقی باشد، آنگاه } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^\alpha}{(1+p)^n} = 0$$

$$(۳) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

$$(۴) \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \infty \text{ برای } x \text{ حقیقی}$$

(اقتصاد - ۸۲)

۲۹- مجموعه نقاط پیوستگی تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ کدام است؟

$$\mathbb{R} - \{0\} \quad (۱) \quad \mathbb{R} \quad (۲) \quad \mathbb{R} - \{1\} \quad (۳) \quad \mathbb{R} - \{-1\} \quad (۴)$$

(اقتصاد - ۸۲)

۳۰- حاصل عبارت $\lim_{x \rightarrow \infty} (\frac{x}{1+x})^{x^2}$ برابر است با:

$$0 \quad (۱) \quad ۱ \quad (۲) \quad e \quad (۳) \quad \frac{1}{e} \quad (۴)$$

(مدیریت - ۸۲)

۳۱- اگر $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n}$ برای هر x حقیقی و $n = 1, 2, 3, \dots$ آنگاه $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ کدام است؟

$$0 \quad (۱) \quad ۱ \quad (۲) \quad \infty \quad (۳) \quad \text{موجود نیست} \quad (۴)$$

(مدیریت - ۸۲)

۳۲- مقدار حد عبارت $\lim_{x \rightarrow 6+} \frac{[x] - 6}{x^2 - 36}$ ، برابر است با:

$$0 \quad (۱) \quad \infty \quad (۲) \quad -\infty \quad (۳) \quad \frac{1}{12} \quad (۴)$$

(حسابداری - ۸۲)

۳۳- حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + 3x)^{\frac{1}{x}}$ کدام است؟

$$e \quad (۱) \quad e^+ \quad (۲) \quad e^+ \quad (۳) \quad e^+ \quad (۴)$$

(حسابداری - ۸۲)

«مشتق»

 ۳۴- اگر $y = e^{\ln x}$ باشد، y' برابر است با:

- (۱) ۰ (۲) ۱ (۳) x (۴) $\frac{1}{x}$ (اقتصاد - ۸۱)

 ۳۵- مشتق مرتبه n ام تابع $f(x) = \ln(x+1)$ در نقطه $x=0$ برابر است با:

- (۱) $-(n-1)!$ (۲) $(-1)^{n-1}(n-1)!$ (۳) $(-1)^n(n+1)!$ (۴) $(-1)^n(n-1)!$ (اقتصاد - ۸۱)

 ۳۶- در تابع $y = x^2 - 4x + 2$ به ازای $x=1$ و $\Delta x = 0.1$ مقدار $\Delta y - dy$ کدام است؟

- (۱) 0.01 (۲) 0.02 (۳) -0.03 (۴) -0.04 (اقتصاد - ۸۱)

 ۳۷- در تابع حقیقی f به معادله $y = \sqrt{x} \cdot \ln x$ طول نقطه بحرانی و نوع آن کدام است؟

- (۱) e^{-1} می‌نیم (۲) e^{-2} می‌نیم (۳) e^{-1} ماکزیم (۴) e^{-2} ماکزیم (اقتصاد - ۸۱)

 ۳۸- نقطه بحرانی تابع $y = (x-2)^2 + 3$ کدام است؟

- (۱) $\text{Min}, (2, 3)$ (۲) $\text{Max}, (3, 2)$ (۳) $\text{عطف}, (2, 3)$ (۴) $\text{عطف}, (3, 2)$ (اقتصاد - ۸۱)

 ۳۹- شیب خط مماس بر منحنی $x^5 + y^5 = 2xy$ در نقطه $(1, 1)$ برابر است با:

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۲ (۴) -۲ (مدیریت - ۸۱)

 ۴۰- طول نقطه عطف تابع $y = \ln(x^2 + 1)$ برابر است با:

- (۱) $x=1$ و $x=-1$ (۲) $x=2$ و $x=-2$ (۳) $x=3$ و $x=-3$ (۴) $x=4$ و $x=-4$ (مدیریت - ۸۱)

 ۴۱- اگر داشته باشیم $y = (x+1)^{2x}$ مقدار dy در $x=1$ برابر است با:

- (۱) $e^2 dx$ (۲) $2(\ln 2 + 1)dx$ (۳) $4dx$ (۴) $4(2\ln 2 + 1)dx$ (مدیریت - ۸۱)

 ۴۲- در معادله $x^2 + y^2 = xy + 1$ مقدار $\frac{dx}{dy}$ در نقطه $x=1$ واقع در ناحیه اول، کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $-\frac{1}{3}$ (حسابداری - ۸۱)

 ۴۳- اگر داشته باشیم $y = x^x$ مقدار مشتق این تابع در $x=e$ برابر است با:

- (۱) e (۲) e^{-1} (۳) $2e^e$ (۴) $e \cdot e^{e-1}$ (حسابداری - ۸۱)

 ۴۴- تابع $y = xe^x$ در چه فاصله‌ای محدب است؟

- (۱) $(-\infty, -1)$ (۲) $(2, +\infty)$ (۳) $(1, \infty)$ (۴) $(-\infty, -2)$ (حسابداری - ۸۱)

۴۵- مشتق n ام تابع $f(x) = \frac{1}{x(1-x)}$ در نقطه $x = \frac{1}{2}$ کدام است؟

- (۱) $2^n n! [1 + (-1)^n]$ (۲) $2^{n+1} n! [1 + (-1)^n]$ (۳) $2^n (n+1)! [1 + (-1)^n]$ (۴) $2^{n+1} (n+1)! [1 + (-1)^n]$

(اقتصاد - ۸۲)

۴۶- داده‌های زیر را در مورد مشتق دوم تابع حقیقی f داریم. f کدام یک از توابع زیر می‌تواند باشد؟ (فرض کنید $b > 0$ و بقیه ثابت‌ها می‌توانند مثبت یا منفی باشند.)

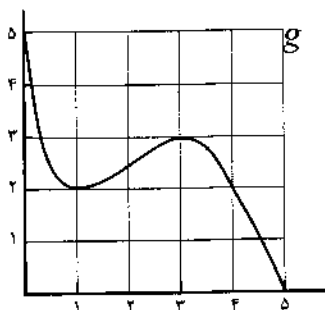
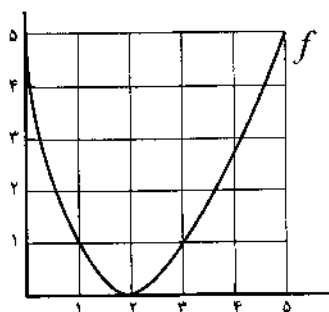
x	۰	۱	۲	۳
$f''(x)$	۱	-۱	-۳	-۵

- (۱) $ax^2 + bx + c$ (درجه دوم) (۲) ae^{bx} (نمایی)
(۳) $ax^2 + bx^2 + cx + d$ (درجه سوم) (۴) $e^{-\frac{x^2}{b}}$ (نمایی)

(اقتصاد - ۸۲)

۴۷- نمودارهای دو تابع f و g در زیر داده شده‌اند. کدام یک از گزاره‌های زیر در مورد تابع $h(x) = f(g(x))$ درست است؟

- (۱) $x = 1$ و $x = 4$ نقاط می‌نیم و $x = 3$ یک نقطه ماکزیمم h است.
(۲) $x = 1$ و $x = 2$ نقاط می‌نیم و $x = 3$ یک نقطه ماکزیمم h است.
(۳) $x = 1$ و $x = 4$ نقاط ماکزیمم و $x = 3$ یک نقطه می‌نیم h است.
(۴) $x = 2$ و $x = 4$ نقاط ماکزیمم و $x = 1$ یک نقطه می‌نیم h است.



(اقتصاد - ۸۲)

۴۸- اگر تابع حقیقی f دارای ضابطه $f(x) = x^2 \cdot e^x$ باشد، طول نقطه عطف این تابع کدام است؟

- (۱) $-2, -1$ (۲) $-2 \pm \sqrt{2}$ (۳) $1, 2$ (۴) $1 \pm \sqrt{2}$

(اقتصاد - ۸۲)

۴۹- وضعیت تابع با ضابطه $y = x \cdot \ln(x+1)$ از نظر تحدب و تقعر در دامنه خود چگونه است؟

- (۱) ابتدا محدب سپس مقعر (۲) ابتدا مقعر سپس محدب

(۴) همواره مقعر

(۳) همواره محدب

(اقتصاد - ۸۲)

۵۰- تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} 3-x & x \leq 2 \\ \frac{1}{3}x^2 - 1 & x > 2 \end{cases}$ در نقطه $x = 2$ چگونه است؟

(۴) مشتق‌ناپذیر

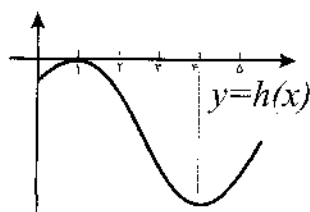
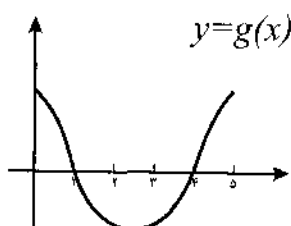
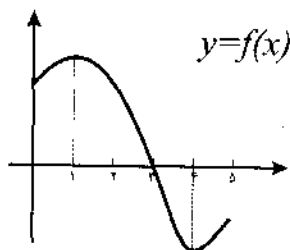
(۳) مشتق‌پذیر

(۲) فاقد حد

(۱) ناپیوسته

(مدیریت - ۸۲)

۵۱- با توجه به نمودارهای زیر، کدام عبارت درست است؟



(۲) h مشتق g است.

(۱) h مشتق f است.

(۴) g مشتق f است.

(۳) f مشتق g است.

(مدیریت - ۸۲)

۵۲- اگر داشته باشیم $y = \ln(1+x)$ ، مشتق n ام این تابع در $x = 0$ کدام است؟

(۲) ۱

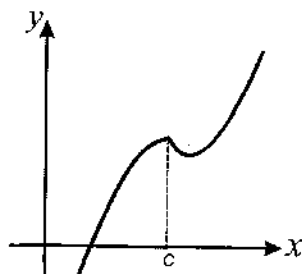
(۱) صفر

(۴) $(-1)^{n-1} \cdot (n-1)!$

(۳) $(-1)^n \cdot n!$

(مدیریت - ۸۲)

۵۳- شکل مقابل نمودار تابع $f(x)$ است، در همسایگی $x = c$ کدام بیان برای مشتق‌های مرتبه اول و دوم صحیح است؟



(۱) برای $x < c$ داریم $f' > 0$ و $f'' < 0$ و $f'(c)$ موجود نیست.

(۲) برای $x < c$ داریم $f' < 0$ و $f'' < 0$ و $f'(c)$ موجود است.

(۳) برای $x > c$ داریم $f' > 0$ و $f'' > 0$ و $f'(c)$ موجود نیست.

(۴) برای $x > c$ داریم $f' < 0$ و $f'' < 0$ و $f'(c)$ موجود است.

(مدیریت - ۸۲)

۵۴- تابع ضمنی حقیقی به معادله $e^x + e^y - xe^{yx} - e^{xy} - 1 = 0$ مفروض است، y'_0 در نقطه $(0, 0)$

برابر است؟

- (۱) صفر (۲) -2 (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $-\frac{1}{2}$
(مدیریت - ۸۲)

- ۵۵- شیب خط مماس بر منحنی $y = (2x - 1)^{\frac{x}{2}}$ در نقطه $x = 2$ کدام است؟
(۱) $\frac{1}{2} \ln 3 - 3$ (۲) $\frac{1}{2} \ln 2 + 3$ (۳) $\frac{3}{2} \ln 3 + 2$ (۴) $\frac{3}{2} \ln 2 + 3$
(حسابداری - ۸۲)

- ۵۶- در تابع حقیقی f به معادله $y = (\ln x)^2 + 1$ ، نقطه بحرانی و نوع آن کدام است؟
(۱) $(-1, 1)$ - ماکزیم (۲) $(1, 1)$ - مینیم
(۳) $(e, 2)$ - مینیم (۴) $(e, 2)$ - ماکزیم
(حسابداری - ۸۲)

- ۵۷- اگر تابع $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ از نقطه $(0, 1)$ عبور کرده و در $x = 1$ ماکزیم و در $x = 2$ نقطه عطف داشته باشد، آنگاه b کدام است؟
(۱) ۶ (۲) -6 (۳) ۹ (۴) -9
(حسابداری - ۸۲)

«انتگرال»

- ۵۸- حاصل $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{e^x + 1}$ کدام است؟
(۱) ۲ (۲) $\ln 2$ (۳) $\ln 3$ (۴) $+\infty$
(اقتصاد - ۸۱)

- ۵۹- حاصل $\int_1^e \ln x \cdot dx$ ، کدام است؟
(۱) ۱ (۲) e (۳) $-e$ (۴) $2e + 1$
(اقتصاد - ۸۱)

- ۶۰- سطح محصور بین منحنی $y = 6 - x - x^2$ و محور x ها برابر کدام است؟
(۱) $\frac{58}{3}$ (۲) $\frac{83}{6}$ (۳) $\frac{95}{6}$ (۴) $\frac{125}{6}$
(اقتصاد - ۸۱)

- ۶۱- جواب انتگرال $\int \frac{\ln x}{x \ln x - x} dx$ برای $c = 0$ و $x = 2$ ، کدام است؟
(۱) $\ln 2$ (۲) $\ln 2 + 2$ (۳) $\ln 2 - 2$ (۴) $\ln(2 \ln 2 - 2)$
(مدیریت - ۸۱)

- ۶۲- مقدار $\int_e^{10} \log x dx$ کدام است؟
(۱) $10 - e \log e$ (۲) $10(1 - \log e)$ (۳) $10 \log e$ (۴) $10 \log e - 1$
(مدیریت - ۸۱)

۶۳- مقدار انتگرال معین $I = \int_{-3}^3 \sqrt{9-x^2} dx$ برابر است با:

- (۱) $\frac{9}{2}$
(۲) $4\sqrt{3}$
(۳) $9\frac{\pi}{2}$
(۴) $\frac{3\pi}{2}$

(مدیریت - ۸۱)

۶۴- سطح محصور بین منحنی $y = x^2$ و خط به معادله $y = x$ ، کدام است؟

- (۱) ۱
(۲) $\frac{1}{2}$
(۳) $\frac{1}{3}$
(۴) $\frac{1}{4}$

(مدیریت - ۸۱)

۶۵- حاصل انتگرال $\int_0^1 (3x+2)(2x) dx$ کدام است؟

- (۱) ۱
(۲) ۲
(۳) ۳
(۴) ۴

(حسابداری - ۸۱)

۶۶- حاصل انتگرال $\int_0^2 \frac{dx}{1+e^x}$ برابر است با:

- (۱) $\ln(2e^2+2)$
(۲) $2 - \ln(2e^2+2)$
(۳) $2 + \ln 2 - \ln(e^2+1)$
(۴) $2 - \ln(e^2+1)$

(حسابداری - ۸۱)

۶۷- مقدار $\int_{-1}^0 x^2 \sqrt{x+1} dx$ برابر است با:

- (۱) $\frac{8}{105}$
(۲) $-\frac{8}{105}$
(۳) $\frac{16}{105}$
(۴) $-\frac{16}{105}$

(حسابداری - ۸۱)

۶۸- سطح محصور بین دو منحنی $y = x^2 - 2x$ و $y = 4 - x^2$ چقدر است؟

- (۱) ۵
(۲) ۹
(۳) $\frac{7}{3}$
(۴) $\frac{20}{3}$

(حسابداری - ۸۱)

۶۹- مقدار $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1+\sqrt{x})}}$ کدام است؟

- (۱) ۰
(۲) $\ln 2$
(۳) $2 \ln 2$
(۴) ∞

(اقتصاد - ۸۲)

۷۰- مقدار $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx$ کدام است؟

- (۱) $2 - \frac{\pi}{2}$
(۲) $2 + \frac{\pi}{2}$
(۳) $2 - \frac{\pi}{4}$
(۴) $2 + \frac{\pi}{4}$

(اقتصاد - ۸۲)

۷۱- مقدار انتگرال $I = \int \frac{dx}{x^2 + 2 - x}$ برابر است با:

- (۱) $\frac{1}{\ln 2} \text{Arc tan}(2^x) + c$
(۲) $x + \frac{1}{\ln 2} \text{Arc tan}(2^x) + c$
(۳) $x - \frac{1}{\ln 2} \text{Arc tan}(2^x) + c$
(۴) $x + \frac{1}{\ln 2} \text{Arc tan}(2^x) + c$

(مدیریت - ۸۲)

۷۲- مقدار انتگرال $I = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{2}{3}} \frac{x-3}{x-4} dx$ برابر است با:

(۱) $1 - \ln 2$ (۲) $1 - \ln 3$

(۳) $2 + \ln 2$ (۴) $2 + \ln 3$

(مدیریت - ۸۲)

۷۳- اگر مساحت سطح زیر منحنی $y = \ln(x+1)$ از نقطه $x=0$ تا $x=c$ برابر $c+2$ شود، مقدار c کدام است؟

(۱) $e-1$ (۲) $e-2$ (۳) e^2-1 (۴) e^2-2

(مدیریت - ۸۲)

۷۴- اگر $F''(x) = 12x^2 - 12x$ و $F'(0) = 2$ و $F(1) = 2$ باشد، آنگاه تابع $F(x)$ برابر است با:

(۱) $F(x) = x^3 - 2x^2 + 2x + 1$ (۲) $F(x) = x^3 - x^2 + 2x^2$

(۳) $F(x) = x^3 - 2x^2 + 2x + 2$ (۴) $F(x) = x^3 + 2x^2 - 2x + 3$

(حسابداری - ۸۲)

۷۵- اگر $f(x) = \int_1^x \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt$ و $g(x) = xe^x$ ، آنگاه $(gof)'(x)$ در نقطه $x=2$ کدام است؟

(۱) 3 (۲) -3 (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $-\frac{1}{3}$

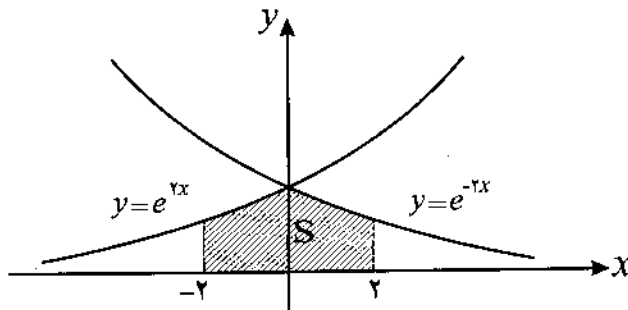
(حسابداری - ۸۲)

۷۶- مقدار انتگرال $\int_0^2 t f''(t) dt$ کدام است؟ با فرض آنکه $f'(2) = f(2) = f'(0) = 3$

(۱) 0 (۲) 3 (۳) 6 (۴) 9

(حسابداری - ۸۲)

۷۷- مساحت S در شکل داده شده، کدام است؟



(۱) $1 - e^{-2}$ (۲) $1 - e^{-2}$

(۳) $e^2 - e^{-2}$ (۴) $e^{-2} - e^2$

(حسابداری - ۸۲)

«ماتریس»

۷۸- اگر A و B دو ماتریس وارون پذیر باشند، کدام رابطه صحیح است؟

$$(A \cdot B)^{-1} = A^{-1} \cdot B^{-1} \quad (۲)$$

$$(A \cdot B)' = A' \cdot B' \quad (۱)$$

$$k \in \mathbb{R}, k \cdot |A| = |k \cdot A| \quad (۴)$$

$$\text{adj}(AB) = (\text{adj } B) \cdot (\text{adj } A) \quad (۳)$$

(اقتصاد - ۸۱)

۷۹- اگر $A = \begin{bmatrix} -۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}$ و k عدد طبیعی باشد، حاصل $A^{۲k}$ کدام است؟

$$۲^{۲k} I \quad (۴)$$

$$۲^k I \quad (۳)$$

$$۲^k A \quad (۲)$$

$$A \quad (۱)$$

(اقتصاد - ۸۱)

۸۰- به ازای کدام مجموعه مقادیر a ، دستگاه معادلات زیر جواب غیر صفر دارد؟

$$\begin{cases} ax + y + ۲z = ۰ \\ x + ۲y + az = ۰ \\ x - y - ۲z = ۰ \end{cases}$$

$$\{a : a > ۰\} \quad (۴)$$

$$\{۱, ۴\} \quad (۳)$$

$$\{-۱, ۴\} \quad (۲)$$

$$\mathbb{R} \quad (۱)$$

(اقتصاد - ۸۱)

۸۱- بزرگترین مقدار ویژه (خاص) (Eigen value)، برای ماتریس $A = \begin{bmatrix} -۳ & -۹ & ۱۲ \\ ۱ & ۳ & ۴ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ کدام است؟

$$۶ \quad (۴)$$

$$۴ \quad (۳)$$

$$۳ \quad (۲)$$

$$۱ \quad (۱)$$

(اقتصاد - ۸۱)

۸۲- کدام یک از ماتریس‌های زیر فاقد معکوس‌اند؟

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۵ \\ -۲ & -۵ \\ -۲ & ۱ \\ ۳ & -۱ \end{bmatrix} \quad (۲)$$

$$(۴)$$

$$\begin{bmatrix} ۳ & -۲ \\ ۴ & ۵ \\ ۲ & ۵ \\ -۲ & ۴ \end{bmatrix} \quad (۱)$$

$$(۳)$$

(مدیریت - ۸۱)

۸۳- کدام یک از روابط زیر در جبر ماتریس‌ها صحیح است؟

$$(AB)' = A' \cdot B' \quad (۲)$$

$$AB = BA \quad (۱)$$

$$|kA_{n \times n}| = k|A_{n \times n}| \quad (۴)$$

$$(AB)^{-۱} = B^{-۱} \cdot A^{-۱} \quad (۳)$$

(مدیریت - ۸۱)

۸۴- مقدار دترمینان $\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix}$ وقتی که $x = \rho \cos \theta$ و $y = \rho \sin \theta$ باشد، برابر است با:

$$\rho \sin \theta \quad (۴)$$

$$\rho \cos \theta \quad (۳)$$

$$\rho^۲ \quad (۲)$$

$$\rho \quad (۱)$$

(مدیریت - ۸۱)

۸۵- مقدار b از رابطه $(a \ b) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = (5 \ 1)$ کدام است؟

۱ (۱)	۲ (۲)	۳ (۳)	۴ (۴)

(مدیریت - ۸۱)

۸۶- مرتبه (Rank) ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & -3 & -4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}$ برابر است با:

۱ (۱)	۲ (۲)	۳ (۳)	۴ (۴)

(مدیریت - ۸۱)

۸۷- از معادله $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$ مقدار x کدام است؟

۱۷ (۱)	۱۷ (۲)	۱۷ (۳)	۱۷ (۴)

(حسابداری - ۸۱)

۸۸- مقادیر ویژه (Eigen value) ماتریس، $B = \begin{bmatrix} 13 & -13 & 5 \\ 0 & 4 & 0 \\ -15 & 9 & -7 \end{bmatrix}$ کدام است؟

۴، ۸، ۲ (۱)	-۲، ۸، ۴ (۲)	۴، -۸، ۲ (۳)	۴، -۸، -۲ (۴)

(حسابداری - ۸۱)

۸۹- ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$ مفروض است. مرتبه (Rank) ماتریس A کدام است؟

۱ (۱)	۲ (۲)	۳ (۳)	۴ (۴)

(حسابداری - ۸۱)

۹۰- اگر ماتریس $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ باشد، درایه a_{31} در ماتریس A^{-1} کدام است؟

-۱/۸ (۱)	۲/۸ (۲)	۳/۸ (۳)	-۵/۸ (۴)

(حسابداری - ۸۱)

۹۱- رتبه ماتریس $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -4 & 6 & 10 \end{pmatrix}$ برابر است با:

۰ (۱)	۱ (۲)	۲ (۳)	۳ (۴)

(اقتصاد - ۸۲)

۹۲- نوع ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ ، کدام است؟

- (۱) شبه معین منفی (۲) نامعین (۳) معین منفی (۴) معین مثبت
(اقتصاد - ۸۲)

۹۳- اگر $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ باشد، دترمینان ماتریس الحاقی A کدام است؟

- (۱) ۹ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $-\frac{1}{3}$ (۴) -۳
(اقتصاد - ۸۲)

۹۴- دستگاه $\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 3x - y + z = 3 \\ x - 5y + 3z = a \end{cases}$ ، به ازای کدام مقدار a بیشمار جواب دارد؟

- (۱) ۲ (۲) ۱ (۳) -۱ (۴) -۲
(اقتصاد - ۸۲)

۹۵- فرض کنید A ، ماتریس مربعی وارون پذیر باشد، کدام یک از ماتریس‌های زیر متقارن است؟

- (۱) $A - A^{-1}$ (۲) $A - A^t$ (۳) $A + A^t$ (۴) $A + A^{-1}$
(مدیریت - ۸۲)

۹۶- به ازای کدام مقدار k دستگاه معادلات زیر بیشمار جواب دارد؟

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = k \end{cases}$$

- (۱) ۴ (۲) ۶ (۳) ۸ (۴) ۱۲
(مدیریت - ۸۲)

۹۷- رتبه ماتریس $A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 & 8 \\ 4 & 2 & 6 & -1 \\ 10 & 3 & 9 & 7 \\ 16 & 4 & 12 & 15 \end{pmatrix}$ ، کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴
(مدیریت - ۸۲)

۹۸- از رابطه $(x \ 1 \ 1) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ مقدار x کدام است؟

(۱) $2 \pm \sqrt{2}$ (۲) $3 \pm \sqrt{2}$ (۳) $-3 \pm \sqrt{5}$ (۴) $-3 \pm \sqrt{7}$

(مدیریت - ۸۲)

۹۹- اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ ، آنگاه مجموع عناصر قطر اصلی، ماتریس A^{-1} کدام است؟

(۱) ۱ (۲) ۳ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{4}{3}$

(مدیریت - ۸۲)

۱۰۰- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ، ماتریس $A^{-1} \cdot B^2$ کدام است؟

(۱) $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} \frac{9}{2} & 2 \\ \frac{7}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$
(۳) $\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{8}{5} \\ \frac{5}{8} & -\frac{4}{5} \end{bmatrix}$

(حسابداری - ۸۲)

۱۰۱- علامت ماتریس $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ کدام است؟

(۱) نامعین (۲) معین مثبت (۳) معین منفی (۴) شبه معین مثبت

(حسابداری - ۸۲)

۱۰۲- به ازای چه مقدار k دستگاه زیر سازگار است؟

(۱) ۱ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۶

$$\begin{cases} x + 2y = k \\ 2x + y = 0 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

(حسابداری - ۸۲)

«خط، بردار، صفحه»

۱۰۳- به ازای کدام مقدار k ، سه بردار $\vec{a}(1, 2, 1)$ و $\vec{b}(2, 1, k)$ و $\vec{c}(1, 2, 3)$ وابسته خطی اند؟

(۱) $k = 1$ (۲) $k = 2$ (۳) هر مقدار k (۴) هیچ مقدار k

(اقتصاد - ۸۲)

۱۰۴- به ازای کدام مقدار k سه بردار $(1, 2, k)$ و $(2, 1, 3)$ و $(1, 1, 1)$ مستقل خطی اند؟

- (۱) $k = 0$ (۲) $k \neq 0$ (۳) $k = 1$ (۴) $k \neq 1$

(اقتصاد - ۸۲)

۱۰۵- در کدام حالت سه بردار غیرصفر $(1, 0, c)$ ، $(0, b, 0)$ و $(a, 0, 1)$ وابسته خطی اند؟

- (۱) $a = -1, c = 1$ (۲) $a = 1, c = 2$

- (۳) $a = 2, c = 1$ (۴) $a = 2, c = \frac{1}{2}$

(حسابداری - ۸۲)

«توابع چند متغیره»

۱۰۶- برد تابع حقیقی f به معادله $z = \sqrt{100 - x^2 - 2y^2}$ برابر است با:

- (۱) $\mathbb{R}^+$ (۲) $\mathbb{R}^{+2}$

- (۳) $[0, 10]$ (۴) $[-\infty, 10]$

(اقتصاد - ۸۱)

۱۰۷- با فرض $f(x - z) = x + y + z$ ، حاصل عبارت $\frac{\partial z}{\partial x} - 2 \frac{\partial z}{\partial y}$ برابر است با:

- (۱) 0 (۲) -1 (۳) 1 (۴) $\lambda - z$

(اقتصاد - ۸۱)

۱۰۸- اگر داشته باشیم $Z = \frac{x^2}{y^2} + e^{\frac{y}{x}} - \frac{y}{x}$ درجه همگنی این تابع کدام است؟

- (۱) صفر (۲) 1 (۳) 2 (۴) همگن نیست

(اقتصاد - ۸۱)

۱۰۹- مختصات نقطه بحرانی تابع $Z = 3x^2 + y^2 - 9x + 4y$ ، کدام است؟

- (۱) $(-1, 2)$ زینی (۲) $(1, -2)$ زینی

- (۳) $(1, -2)$ می نیمم (۴) $(-1, 2)$ ماکزیمم

(اقتصاد - ۸۱)

۱۱۰- اگر تابع مطلوبیت مصرف کننده $U = 4q_1q_2$ و قیمت کالاها $p_1 = 5$ و $p_2 = 10$ و بودجه 400 باشد،

از هر یک از کالاها چه مقدار خریداری می کند، تا مطلوبیت او ماکزیمم گردد؟

- (۱) $q_1 = 40, q_2 = 20$ (۲) $q_1 = 20, q_2 = 30$

- (۳) $q_1 = 50, q_2 = 15$ (۴) $q_1 = 60, q_2 = 10$

(اقتصاد - ۸۱)

۱۱۱- اگر تابع f به معادله $Z = x^2 + 5xy + 8y^2 - 4x$ باشد، d^2Z (دیفرانسیل مرتبه دوم) در نقطه $(1, 1)$

کدام است؟

- (۱) $d^2Z = 2dxdy$ (۲) $d^2Z = dx^2 + dy^2$

- (۳) $d^2Z = 2dx^2 + 10xdy + 16dy^2$ (۴) $d^2Z = 2dx^2 + 5dxdy + 8dy^2$

(اقتصاد - ۸۱)

۱۱۲- تابع f به معادله $Z = \sqrt{\frac{x-y}{x^2+y^2}}$ مفروض است، دامنه $(\text{Range})^1$ این تابع کدام است؟

(۱) $\mathbb{R}^+$ (۲) $\mathbb{R}^+$

(۳) $\mathbb{R} - \{x | x < y\}$ (۴) $\{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}, x \geq y\}$

(مدیریت - ۸۱)

۱۱۳- در تابع دو متغیره $U = \ln(x^2 + y^2)$ ، حاصل $x \cdot \frac{\partial U}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial U}{\partial y}$ کدام است؟

(۱) ۲ (۲) $x + y$ (۳) $\ln(x + y)$ (۴) $2(x^2 + y^2)$

(مدیریت - ۸۱)

۱۱۴- در تابع دو متغیره $F(x, y) = x^{xy}$ مقدار $\frac{\partial f}{\partial x}$ به ازای $x = y = 1$ کدام است؟

(۱) ۰ (۲) ۱ (۳) e (۴) تعریف نشده

(مدیریت - ۸۱)

۱۱۵- در تابع $z = ax^2 + bxy + ay + 4y + 5$ اگر $(1, 1)$ نقطه اکسترم باشد، a و b کدام است؟

(۱) $a = 1, b = 2$ (۲) $a = 0, b = 4$

(۳) $a = 4, b = -8$ (۴) $a = 4, b = -4$

(مدیریت - ۸۱)

۱۱۶- نقطه بحرانی تابع f به معادله $Z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$ به کدام صورت است؟

(۱) $(0, 3)$ ، زینی (۲) $(0, 3)$ ، می نیم

(۳) $(3, 0)$ ، ماکزیم نسبی (۴) $(3, 0)$ ، ماکزیم مطلق

(مدیریت - ۸۱)

۱۱۷- اگر داشته باشیم $10 = x^2 + 2xy + 4y + 10$ و $Z = x^2 + 2xy + 4y + 10$ باشد، نقطه بحرانی این تابع کدام است؟

(۱) $(1, 2)$ (۲) $(2, 1)$ (۳) $(-1, 4)$ (۴) $(4, -1)$

(مدیریت - ۸۱)

۱۱۸- در سؤال قبلی، نوع نقطه کداً است؟

(۱) زینی (۲) ماکزیم (۳) می نیم نسبی (۴) می نیم مطلق

(مدیریت - ۸۱)

۱۱۹- تابع حقیقی f به معادله $z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$ مفروض است. برد این تابع کدام است؟

(۱) $\mathbb{R}$ (۲) $\mathbb{R}^+$

(۳) $[0, \infty)$ (۴) $[0, 5]$

(حسابداری - ۸۱)

۱۲۰- برای تابع $z = x \cdot \ln y + y \cdot \ln x$ مقدار $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ برابر است با:

(۱) $\frac{x}{x+y}$ (۲) $\frac{y}{x+y}$

$$\frac{x+y}{xy} \quad (۴)$$

$$\frac{xy}{x+y} \quad (۳)$$

(حسابداری - ۸۱)

 ۱۲۱- نقطه بحرانی تابع دو متغیر $Z = 3x^2 + 2y^2 - xy - 4x - 7y + 12$ کدام است؟

$$(1, 3, 5) \quad (۲)$$

$$(1, 2, 3) \quad (۱)$$

$$(2, 2, 6) \quad (۴)$$

$$(1, 1, 5) \quad (۳)$$

(حسابداری - ۸۱)

۱۲۲- در سوال قبل، نوع نقطه بحرانی کدام است؟

(۴) ماکزیمم مطلق

(۳) ماکزیمم نسبی

(۲) می نیمم نسبی

(۱) زینی

(حسابداری - ۸۱)

 ۱۲۳- اکستریم تابع $Z = xy$ تحت شرط $2x + 3y - 5 = 0$ ، کدام است؟

$$\left(\frac{5}{6}, \frac{5}{6}\right)$$

$$\left(\frac{5}{4}, \frac{5}{6}\right) \quad (۱)$$

$$\left(-\frac{5}{12}, \frac{5}{6}\right) \quad (۴)$$

$$\left(\frac{5}{12}, \frac{5}{6}\right) \quad (۳)$$

(حسابداری - ۸۱)

 ۱۲۴- برد تابع حقیقی به معادله $Z = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}}$ کدام بازه است؟

$$[0, +\infty) \quad (۲)$$

$$(1, +\infty) \quad (۱)$$

$$(-\infty, +\infty) \quad (۴)$$

$$(0, +\infty) \quad (۳)$$

(اقتصاد - ۸۲)

 ۱۲۵- نقطه بحرانی تابع حقیقی f به ضابطه $Z = x^2 - y^2 + 1$ و نوع آن کدام است؟

$$(1, 1, 1) \text{ می نیمم} \quad (۲)$$

$$(0, 0, 1) \text{ زینی} \quad (۱)$$

$$(0, 0, 1) \text{ می نیمم} \quad (۴)$$

$$(1, 1, 1) \text{ ماکزیمم} \quad (۳)$$

(اقتصاد - ۸۲)

 ۱۲۶- اگر $Z^2 = x^2 + y^2$ ، مقدار $\frac{\partial \ln z}{\partial \ln x} + \frac{\partial \ln z}{\partial \ln y}$ کدام است؟

$$x + y \quad (۴)$$

$$xy \quad (۳)$$

$$2 \quad (۲)$$

$$1 \quad (۱)$$

(اقتصاد - ۸۲)

 ۱۲۷- می نیمم تابع $Z = 4x^2 + 2y - 4$ با توجه به شرط $2x + \frac{1}{y} = 12$ کدام است؟

$$40 \quad (۴)$$

$$24 \quad (۳)$$

$$20 \quad (۲)$$

$$18 \quad (۱)$$

(مدیریت - ۸۲)

 ۱۲۸- اگر $w = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ باشد، آنگاه $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}$ برابر است با:

$$x + y + z \quad (۲)$$

$$0 \quad (۱)$$

$$xyz(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \quad (۴)$$

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 \quad (۳)$$

(مدیریت - ۸۲)

۱۲۹- برد تابع $Z = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}}$ برابر است با:

(۱) $\mathbb{R}$ (۲) $\mathbb{R}^+$

(۳) $(1, +\infty)$ (۴) $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

(حسابداری - ۸۲)

۱۳۰- اگر $z = x^2 + y^2 + 5xy$ باشد، مقدار d^2z بازای $dx = dy = 0, 1$ برابر کدام است؟

(۱) $0, 0, 7$ (۲) $0, 1, 0$ (۳) $0, 1, 2$ (۴) $0, 1, 4$

(حسابداری - ۸۲)

۱۳۱- اگر $z = x^2 + xy + y^2$ و $x = 2r + s$ و $y = r - 2s$ آنگاه در نقطه $(1, 2)$ مقدار $\frac{\partial z}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial s}$ کدام است؟

(۱) 7 (۲) -7 (۳) 8 (۴) -8

(حسابداری - ۸۲)

۱۳۲- بازای چه مقداری از a نقطه بحرانی $z = x^2 + ay^2$ یک نقطه زینی است؟

(۱) $a > 0$ (۲) $a < 0$ (۳) $a < 1$ (۴) $a > 1$

(حسابداری - ۸۲)

۱۳۳- اگر داشته باشیم $0 = 2z - 5xyz + x^2 + y^2 + z^2$ در نقطه $(1, 1, 1)$ مقدار $z'_x + z'_y$ برابر است با:

(۱) 3 (۲) -3 (۳) 6 (۴) -6

(حسابداری - ۸۲)

«معادلات دیفرانسیل»

۱۳۴- اگر $xy' = y + 1$ باشد، مقدار y کدام است؟ در صورتی که تابع از نقطه $(1, 1)$ بگذرد.

(۱) $y = 2x - 1$ (۲) $x = 2y - 1$

(۳) $2y^2 - xy = 1$ (۴) $2xy - y^2 = 1$

(اقتصاد - ۸۲)

«مختصات قطبی، اعداد مختلط»

۱۳۵- هرگاه $\sum_{k=0}^{100} i^k = x + iy$ آنگاه x و y عبارتند از:

(۱) $x = 0, y = 0$ (۲) $x = 0, y = 1$

(۳) $x = 1, y = 0$ (۴) $x = 1, y = 1$

(اقتصاد - ۸۱)

۱۳۶- فرم مثلثاتی (یا قطبی) $z = 1 + i$ ، کدام است؟

(۱) $z = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})$ (۲) $z = \sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})$

(۳) $z = \sqrt{2}(\sin \frac{\pi}{4} - i \cos \frac{\pi}{4})$ (۴) $z = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin \frac{\pi}{4} - i \cos \frac{\pi}{4})$

(اقتصاد - ۸۱)

۱۳۷- حاصل عبارت $(\frac{1 - \sqrt{3}i}{1 + \sqrt{3}i})^{10}$ کدام است؟

$$-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad (2)$$

$$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad (1)$$

$$-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad (4)$$

$$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad (3)$$

(اقتصاد - ۸۲)

۱۳۸- اگر $z = 1 - i$ باشد، یکی از جوابهای $\sqrt[n]{z}$ برابر است با:

$$\sqrt[4]{2}(\cos \frac{7\pi}{16} + i \sin \frac{7\pi}{16}) \quad (2)$$

$$\sqrt[4]{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}) \quad (1)$$

$$\sqrt[4]{2}(\cos \frac{5\pi}{8} + i \sin \frac{5\pi}{8}) \quad (4)$$

$$\sqrt[4]{2}(\cos \frac{19\pi}{16} + i \sin \frac{19\pi}{16}) \quad (3)$$

(اقتصاد - ۸۲)

ضمیمه ۴

پاسخ تشریحی

سؤالات ریاضیات آزمون‌های کارشناسی ارشد

سال‌های ۸۱ و ۸۲

۱- گزینه ۳. هر جمله گویا در بسط $(\sqrt{a} + \sqrt[3]{b})^{100}$ به صورت $(\sqrt{a})^{2k}(\sqrt[3]{b})^{3k'}$ است که $k, k' \geq 0$ بوده و می‌بایست $100 = 2k + 3k'$ باشد، پس k' بایستی عددی زوج باشد و تنها می‌تواند مقادیر $0, 2, 4, \dots, 32$ را به خود بگیرد.

۲- گزینه ۳. به مطلب (۱-۲) صفحه ۱۰ مراجعه کنید.

$$C_n^r x^{n-r} y^r = C_{r,0}^r (x^{\frac{1}{r}})^{r-r} \left(\frac{1}{x^{\frac{1}{r}}}\right)^r = C_{r,0}^r (x)^{r-r} (x)^{-r} = C_{r,0}^r (x)^{r-\Delta r}$$

توان x را مساوی صفر قرار می‌دهیم

$$r - \Delta r = 0 \implies \Delta r = r \implies r = 8$$

$$x \text{ ضریب جمله مستقل از } x = C_{r,0}^r = C_8^8$$

۳- گزینه ۳. به مطلب (۱-۲) صفحه ۱۰ مراجعه کنید.

$$\begin{aligned} C_n^r x^{n-r} y^r &= C_9^r \left(\frac{x}{y}\right)^{9-r} \left(-\frac{1}{x}\right)^r = C_9^r \left(\frac{1}{y}\right)^{9-r} (x)^{18-2r} (-1)^r (x)^{-r} \\ &= C_9^r \left(\frac{1}{y}\right)^{9-r} (-1)^r (x)^{18-3r} \end{aligned}$$

توان x را مساوی صفر قرار می‌دهیم.

$$18 - 3r = 0 \implies 3r = 18 \implies r = 6$$

$$x \text{ ضریب جمله مستقل از } x = C_9^6 \left(\frac{1}{y}\right)^{9-6} (-1)^6 = C_9^6 \left(\frac{1}{y}\right)^3 (-1)^6 = \frac{84}{y} = \frac{21}{y}$$

۴- گزینه ۴. به نکته ۲ صفحه ۱۵ مراجعه کنید.

$$2^k = 2^3 = 8$$

۵- گزینه ۳. به مطالب (۲-۱۸) و (۲-۱۶) صفحه ۱۸ مراجعه کنید.

$$[(A \cap B) \cup (A - B)] \cap A' = [(A \cap B) \cup (A \cap B')] \cap A'$$

$$=[A \cap (B \cup B')] \cap A' = (A \cap M) \cap A' = A \cap A' = \phi$$

۶- گزینه ۴. به نکته ۱ صفحه ۱۵ مراجعه کنید.

$$A = \{۱, ۳, ۵, ۷, ۹, ۱۱, ۱۳, ۱۵\}, \quad B = \{۳, ۶, ۹, ۱۲, ۱۵\}$$

$$A \cap B = \{۳, ۹, ۱۵\} \Rightarrow A \cap B \text{ تعداد زیرمجموعه‌های } 2^n = 2^3 = ۸$$

۷- گزینه ۴. به مطلب (۲ - ۱۸) صفحه ۱۸ مراجعه کنید.

$$[A \cup B' \cup C'] \cap [A \cup (B \cap C)] = [A \cup (B \cap C)'] \cap [A \cup (B \cap C)]$$

$$= A \cup [(B \cap C)' \cap (B \cap C)] = A \cup \phi = A$$

۸- گزینه ۳. به نکته ۲ صفحه ۱۵ مراجعه کنید.

$$2^k = 2^3 = ۸$$

۹- گزینه ۴. به مطلب (۲ - ۱۸) صفحه ۱۸ مراجعه کنید.

$$B \cap (B - A) = B \cap (B \cap A') = B \cap A'$$

۱۰- گزینه ۱. به مطلب (۳ - ۲۰) صفحه ۳۷ مراجعه کنید.

$$x = y^2 - 2y + 4 \Rightarrow y^2 - 2y + 4 - x = 0 \Rightarrow$$

$$y = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a} \Rightarrow y = 1 \pm \sqrt{1 - (4 - x)} = 1 \pm \sqrt{x - 3}$$

چون $x > 1$ پس $y = 1 + \sqrt{x - 3}$

۱۱- گزینه ۴. به مطالب (۳ - ۷ - ۲) و (۳ - ۷ - ۳) و (۴ - ۷ - ۳) صفحه ۳۳ مراجعه کنید.

$$\begin{cases} 4 - x^2 \geq 0 \\ x - 1 > 0 \\ \ln(x - 1) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ x > 1 \\ x \neq 2 \end{cases} \Rightarrow D_f = (1, 2)$$

۱۲- گزینه ۴. به مطلب (۳ - ۸ - ۴) صفحه ۳۴ مراجعه کنید.

$$y = \ln(x^2 + 1) \Rightarrow x^2 + 1 = e^y \Rightarrow x = \pm \sqrt{e^y - 1}$$

$$e^y - 1 \geq 0 \Rightarrow e^y \geq 1 \Rightarrow \ln e^y \geq \ln 1 \Rightarrow y \geq 0$$

۱۳- گزینه ۱. به مطلب (۳-۲۲) صفحه ۳۸ مراجعه کنید.

$$\begin{aligned} f(-x) &= |-x-1| - |-x+1| = |-(x+1)| - |-(x-1)| \\ &= |x+1| - |x-1| = -(|x-1| - |x+1|) = -f(x) \end{aligned}$$

۱۴- گزینه ۳. به مطالب (۳-۷-۳) و (۴-۷-۳) صفحه ۳۳ مراجعه کنید.

$$\begin{cases} \frac{\Delta x - x^2}{4} > 0 \\ \log \frac{\Delta x - x^2}{4} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta x - x^2 > 0 \\ \Delta x - x^2 - 4 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < x < 2 \\ 1 \leq x \leq 4 \end{cases} \Rightarrow D_f = [1, 2]$$

۱۵- گزینه ۳. به مطلب (۳-۳۸) صفحه ۳۴ مراجعه کنید.

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{1-x^2} \Rightarrow y^2 = 1-x^2 \Rightarrow x = \pm \sqrt{1-y^2} \\ \begin{cases} y \geq 0 \\ 1-y^2 \geq 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ -1 \leq y \leq 1 \end{cases} \Rightarrow 0 \leq y \leq 1 \Rightarrow R_f = [0, 1] \end{aligned}$$

۱۶- گزینه ۳. به مطلب (۳-۱۲) صفحه ۳۵ مراجعه کنید.

$$\begin{aligned} 2x+1 > 0 &\Rightarrow 2x > -1 \Rightarrow x > -\frac{1}{2} \Rightarrow D_f = \{x | x > -\frac{1}{2}\} \\ e^x - 1 = 0 &\Rightarrow e^x = 1 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow D_g = \mathbb{R} - \{0\} \\ D_{g \circ f} &= \{x \in D_f | f(x) \in D_g\} = \{x > -\frac{1}{2} | \ln(2x+1) \neq 0\} \\ &= \{x > -\frac{1}{2} | 2x+1 \neq e^0\} = \{x > -\frac{1}{2} | x \neq 0\} = (-\frac{1}{2}, +\infty) - \{0\} \end{aligned}$$

۱۷- گزینه ۲. به مطالب (۳-۷-۲) و (۴-۷-۳) صفحه ۳۳ مراجعه کنید.

$$\begin{aligned} \begin{cases} x+2 > 0 \\ 1-\ln(x+2) \neq 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x > -2 \\ x+2 \neq e \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -2 \\ x \neq e-2 \end{cases} \\ &\Rightarrow D_f = \{x > -2, x \neq e-2\} \end{aligned}$$

۱۸- گزینه ۴. به مطلب (۳-۸-۶) صفحه ۳۴ مراجعه کنید.

$$\begin{aligned} 0 &\leq (\sin x)^2 \leq 1 \Rightarrow \log 0 < \log(\sin x)^2 \leq \log 1 \Rightarrow \\ 2 \log 0 &< 2 \log(\sin x)^2 \leq 2 \log 1 \Rightarrow -\infty < y \leq 0 \Rightarrow R_f = (-\infty, 0] \end{aligned}$$

۱۹- گزینه ۲. به مطالب (۳-۷-۲) و (۳-۷-۳) و (۴-۷-۳) صفحه ۳۳ مراجعه کنید.

$$\begin{cases} 2x+1 > 0 \\ x(x+1) > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -\frac{1}{2} \\ x < -1 \text{ یا } x > 0 \end{cases} \Rightarrow D_f = (0, +\infty)$$

۲۰- گزینه ۲. یکی از روش‌های تعیین برد تابع استفاده از مشتق است.

$$y = \frac{1}{x}(e^{2x} - e^x) \Rightarrow y' = \frac{1}{x}(2e^{2x} - e^x) = 0 \Rightarrow e^x(2e^x - 1) = 0 \Rightarrow e^x = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \ln \frac{1}{x} \Rightarrow y = \frac{1}{x}(e^{\ln \frac{1}{x}} - e^{\ln \frac{1}{x}}) \Rightarrow y = -\frac{1}{x}$$

x	$-\infty$	$\ln \frac{1}{x}$	$+\infty$
y'		$-$	$+$
y	$+\infty$	$-\frac{1}{x}$	$+\infty$

۲۱- گزینه ۱. به مطلب (۳-۱۱) صفحه ۳۵ مراجعه کنید.

۲۲- گزینه ۲. به مطلب (۳-۱۲) صفحه ۳۵ مراجعه کنید.

$$x+1=t \Rightarrow x=t-1 \Rightarrow g(t) = \frac{t-1}{t-1+1} = \frac{t-1}{t} \Rightarrow g(x) = \frac{x-1}{x}$$

$$f(g(x)) = \frac{\frac{x-1}{x} + 1}{\frac{x-1}{x} + 1} = \frac{\frac{x-1+x}{x}}{\frac{x-1+x}{x}} = \frac{2x-1}{2x-2}$$

۲۳- گزینه ۴. به مطلب (۳-۱۰) صفحه ۳۵ و مطلب (۳-۲۸-۱) صفحه ۴۱ مراجعه کنید.

$$\text{Arc sin } \frac{x-1}{x+1} = t \Rightarrow \frac{x-1}{x+1} = \sin t \Rightarrow x-1 = x \sin t + \sin t \Rightarrow x - x \sin t = 1 + \sin t \Rightarrow x = \frac{1 + \sin t}{1 - \sin t}$$

$$f(t) = \frac{1 + \sin t}{1 - \sin t} + 2 = \frac{3 - \sin t}{1 - \sin t} \Rightarrow f(x) = \frac{3 - \sin x}{1 - \sin x}$$

۲۴- گزینه ۴. به مطلب (۴-۱۶-۳) صفحه ۷۶ مراجعه کنید.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^x = 1^\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^x = \exp \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right)}{\frac{1}{x}} = \frac{0}{0} \xrightarrow{H}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{-2}{(x+1)(x-1)}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{x^2-1} = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^x = e^2$$

۲۵- گزینه ۳. به مطلب (۴ - ۱۶ - ۳) صفحه ۷۶ مراجعه کنید.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^r}\right)^x = 1^\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^r + 1}{x^r}\right)^x = \exp \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(\frac{x^r + 1}{x^r}\right)}{\frac{1}{x}} = \frac{0}{0} \xrightarrow{H}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{rx}{x^r + 1} - \frac{r}{x}}{-\frac{1}{x^r}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{-r}{x^r + x}}{-\frac{1}{x^r}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{rx^r}{x^r + x} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^r}\right)^x = e^0 = 1$$

۲۶- گزینه ۲. به مطلب (۴ - ۱۶ - ۳) صفحه ۷۶ مراجعه کنید.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{r}{x^r}\right)^x = 1^\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^r - r}{x^r}\right)^x = \exp \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(\frac{x^r - r}{x^r}\right)}{\frac{1}{x}} = \frac{0}{0} \xrightarrow{H}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{rx}{x^r - r} - \frac{r}{x}}{-\frac{1}{x^r}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{rx^r - rx^r + r}{x^r - rx}}{-\frac{1}{x^r}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-rx^r}{rx^r - rx} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{r}{x^r}\right)^x = e^0 = 1$$

۲۷- گزینه ۳. به مطلب (۴ - ۱۶ - ۳) صفحه ۷۶ مراجعه کنید.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x - r}{x + 1}\right)^{x+r} = 1^\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x - r}{x + 1}\right)^{x+r} = \exp \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(\frac{x - r}{x + 1}\right)}{\frac{1}{x + r}} = \frac{0}{0} \xrightarrow{H}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x - r} - \frac{1}{x + 1}}{\frac{-1}{(x + r)^r}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x + 1 - x - r}{x^r - rx - r}}{\frac{-1}{(x + r)^r}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{rx^r + 16x + 16}{-x^r + rx + r} = -4$$

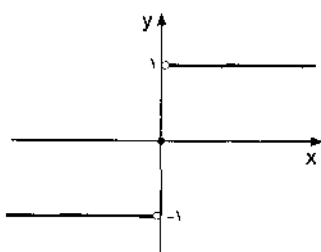
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x - r}{x + 1}\right)^{x+r} = e^{-4}$$

۲۸- گزینه ۴. به مطلب (۴ - ۱۰) صفحه ۷۵ مراجعه کنید.

اگر: $x > 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = x^\infty = \infty$

اگر: $0 < x < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = x^\infty = 0$

۲۹- گزینه ۱. به مطلب (۴ - ۲۰) صفحه ۷۸ مراجعه کنید



$$f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

۳۰- گزینه ۱. به مطلب (۴ - ۱۶ - ۳) صفحه ۷۶ مراجعه کنید.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{1+x} \right)^{x^2} = 1^\infty \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x+1} \right)^{x^2} = \exp \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(\frac{x}{x+1} \right)}{\frac{1}{x^2}} = \frac{0}{0} \xrightarrow{H}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x+1-x}{x^2+x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^2}{x^2+x} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{1+x} \right)^{x^2} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^\infty} = 0$$

۳۱- گزینه ۱. همواره $1 \leq \sin x \leq -1$ ، وقتی $n \rightarrow \infty$ داریم $\frac{\sin nx}{\infty} = 0$

۳۲- گزینه ۱. وقتی $x \rightarrow 6^+$ ، $[x]$ برابر ۶ است و در نتیجه $6 - [x] = 0$ است.

۳۳- گزینه ۴. به مطلب (۴ - ۱۶ - ۳) صفحه ۷۶ مراجعه کنید.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (e^x + 3x)^{\frac{1}{x}} = 1^\infty \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (e^x + 3x)^{\frac{1}{x}} = \exp \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(e^x + 3x)}{x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{H}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x + 3}{1} = \frac{1+3}{1+0} = 4 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (e^x + 3x)^{\frac{1}{x}} = e^4$$

۳۴- گزینه ۲.

$$y = e^{\ln x} = x \implies y' = 1$$

۳۵- گزینه ۲. به مطلب (۵ - ۷) صفحه ۱۰۶ مراجعه کنید.

$$y = \ln(ax+b) \implies y_x^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1} \cdot (n-1)! a^n}{(ax+b)^n}$$

$$y = \ln(x+1) \implies y_x^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1} \cdot (n-1)!}{(x+1)^n} \implies y_{(0)}^{(n)} = (-1)^{n-1} \cdot (n-1)!$$

۳۶- گزینه ۱. به مطلب (۵ - ۲۶) صفحه ۱۱۸ مراجعه کنید.

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = f(1,1) - f(1)$$

$$= (1,21 - 4,4 + 2) - (1 - 4 + 2) = -0,19$$

$$dy = y' \cdot dx = (2x - 4)dx = (2 - 4)(0,1) = -0,2$$

$$\Delta y - dy = -0,19 + 0,2 = 0,01$$

۳۷- گزینه ۲. به مطلب (۵ - ۱۳ - ۴) صفحه ۱۰۹ مراجعه کنید.

$$y = \sqrt{x} \cdot \ln x \implies y' = \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{x \ln x + 2x}{2x\sqrt{x}}$$

$$y' = 0 \Rightarrow \ln x + 2 = 0 \Rightarrow (\ln x + 2) = 0 \Rightarrow x = e^{-2}$$

$$y'' = \frac{\frac{2\sqrt{x}}{x} - \frac{\ln x}{\sqrt{x}}}{2x} - \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} \Rightarrow y''_{(e^{-1})} = e^2 - \frac{1}{2e^2} > 0$$

بنابراین نوع نقطه بحرانی می نیمم است.

۳۸- گزینه ۱. به مطلب (۵-۱۳-۴) صفحه ۱۰۹ مراجعه کنید.

$$y = (x-2)^2 + 3 \Rightarrow y' = 2(x-2)^1 = 0 \Rightarrow x = 2, y = 3$$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y'		$- \quad 0 \quad +$	
y	$+\infty$	$\searrow \text{min} \nearrow$	$+\infty$

۳۹- گزینه ۲. به مطلب (۵-۱۳-۱) صفحه ۱۰۸ مراجعه کنید.

$$x^5 + y^5 - 2xy = 0, \quad y'_x = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{5x^4 - 2y}{5y^4 - 2x} \xrightarrow{(1,1)} m = -\frac{5-2}{5-2} = -1$$

۴۰- گزینه ۱. به مطلب (۵-۱۳-۶) صفحه ۱۱۱ مراجعه کنید.

$$y = \ln(x^2 + 1) \Rightarrow y' = \frac{2x}{x^2 + 1} \Rightarrow y'' = \frac{2x^2 + 2 - 4x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2}$$

$$y'' = 0 \Rightarrow 2 - 2x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = -1, 1$$

۴۱- گزینه ۴. به مطلب (۵-۶-۷) صفحه ۱۰۶ مراجعه کنید.

$$y = u^v = (x+1)^{2x}$$

$$\frac{dy}{dx} = (x+1)^{2x} (2 \ln(x+1) + 2x \cdot \frac{1}{x+1})$$

$$dy|_{x=1} = (2)^2 (2 \ln 2 + \frac{2}{1}) dx \Rightarrow dy = 4(2 \ln 2 + 1) dx$$

۴۲- گزینه ۲. به مطلب (۵-۸) صفحه ۱۰۷ مراجعه کنید.

$$x=1 \Rightarrow 1+y^2 = y+1 \Rightarrow y(y^2-1) = 0 \Rightarrow y=0, y=\pm 1 \Rightarrow y=1$$

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{f'_y}{f'_x} = -\frac{2y^2 - x}{2x^2 - y} \xrightarrow{(1,1)} \frac{dx}{dy} = -\frac{2-1}{2-1} = -1$$

۴۳- گزینه ۳. به مطلب (۵-۶-۷) صفحه ۱۰۶ مراجعه کنید.

$$y = u^v = x^x$$

$$y' = x^x (\ln x + x \frac{1}{x}) \xrightarrow{x=e} y' = e^e (\ln e + 1) = 2e^e$$

۴۴- گزینه ۴. به مطلب (۵ - ۱۳ - ۷) صفحه ۱۱۲ مراجعه کنید.

$$y = xe^x \Rightarrow y' = e^x + xe^x \Rightarrow y'' = e^x + e^x + xe^x$$

$$y'' = e^x(2 + x) = 0 \Rightarrow x = -2, \quad e^x > 0$$

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
y''		$-$	$+$
y	تغیر به طرف پایین		تغیر به طرف بالا

۴۵- گزینه ۲. تابع $f(x)$ را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم.

$$f(x) = \frac{1}{x(1-x)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1}$$

می‌توانیم مثلاً مقدار مشتق مرتبه دوم تابع $f(x)$ را به ازای $x = \frac{1}{4}$ حساب کنیم.

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x-1)^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{2}{x^3} - \frac{2}{(x-1)^3} \Rightarrow f''\left(\frac{1}{4}\right) = 32$$

اکنون اگر حاصل هر یک از گزینه‌ها به ازای $n = 2$ (مشتق مرتبه دوم) برابر ۳۲ شده، جواب تست خواهد بود. در گزینه (۲) داریم.

$$n = 2 \Rightarrow 2^{n+1} \times 2! [1 + (-1)^n] = 8 \times 2(1+1) = 32$$

۴۶- گزینه ۲.

$$f(x) = ax^2 + bx^2 + cx + d$$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \Rightarrow f''(x) = 6ax + 2b$$

$$f''(0) = 1 \Rightarrow 2b = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{2}$$

$$f''(1) = -1 \Rightarrow 6a + 1 = -1 \Rightarrow a = -\frac{1}{3}$$

$$f''(2) = -3 \Rightarrow -6 + 1 = -3$$

$$f''(3) = -5 \Rightarrow -6 + 1 = -5$$

۴۷- گزینه ۱. مقادیر $h(x)$ را به ازای $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ تعیین می‌کنیم.

$$h(0) = f(g(0)) = f(5) = 5 \rightarrow (0, 5)$$

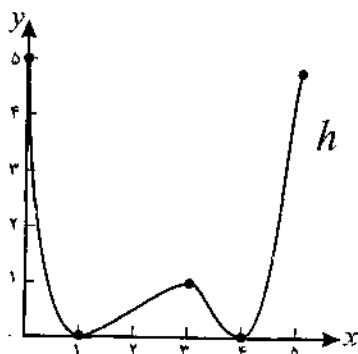
$$h(1) = f(g(1)) = f(2) = 0 \rightarrow (1, 0)$$

$$h(2) = f(g(2)) \Rightarrow 0 < h(2) < 1$$

$$h(3) = f(g(3)) = f(3) = 1 \rightarrow (3, 1)$$

$$h(4) = f(g(4)) = f(2) = 0 \rightarrow (4, 0)$$

$$h(5) = f(g(5)) = f(0) = 5 \rightarrow (5, 5)$$



۴۸- گزینه ۲. به مطلب (۵-۱۳-۶) صفحه ۱۱۱ مراجعه کنید.

$$f'(x) = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x = (2x + x^2) \cdot e^x$$

$$f''(x) = (2 + 2x) \cdot e^x + (2x + x^2) \cdot e^x = (x^2 + 4x + 2) \cdot e^x$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow x^2 + 4x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2 \pm \sqrt{2}$$

۴۹- گزینه ۳. به مطلب (۵-۱۳-۷) صفحه ۱۱۲ مراجعه کنید.

$$D_f = \{x | x > -1\}$$

$$y = x \cdot \ln(x+1) \Rightarrow y' = \ln(x+1) + \frac{x}{x+1} \Rightarrow y'' = \frac{x+2}{(x+1)^2}$$

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
y''		$-$	$+$
y		تغیر رو به پایین	تغیر رو به بالا

۵۰- گزینه ۴. به مطلب (۵-۴) صفحه ۱۰۴ مراجعه کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \frac{1}{2}(2)^2 - 1 = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 3 - 2 = 1, \quad f(2) = 3 - 2 = 1$$

حد راست و حد چپ تابع در نقطه $x = 2$ با هم برابرند، پس تابع حد دارد. و چون حد تابع با مقدار تابع برابر است، بنابراین تابع پیوسته است.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\frac{1}{2}x^2 - 1 - 1}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(x+2)}{2(x-2)} = 2 = f'(2^+)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3 - x - 1}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x - 2)}{x - 2} = -1 = f'(2^-)$$

چون مشتق راست و مشتق چپ در نقطه $x = 2$ برابر نیستند، پس تابع مشتق‌ناپذیر است.

۵۱- گزینه ۴. نمودار تابع f در نقاط $x = 1$ و $x = 4$ دارای اکسترمم نسبی است. از طرفی می‌دانیم مشتق در نقاط اکسترمم برابر صفر است، بنابراین g مشتق f است.
۵۲- گزینه ۴.

$$y = \ln(ax + b) \Rightarrow y_x^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1} \cdot (n-1)! a^n}{(ax + b)^n}$$

$$y' = \ln(x + 1) \Rightarrow y_x^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1} \cdot (n-1)!}{(x+1)^n} \Rightarrow y_{(1)}^{(n)} = (-1)^{n-1} \cdot (n-1)!$$

۵۳- گزینه ۱. با توجه به شکل، برای $x < c$ اولاً: شیب خطوط مماس بر منحنی مثبت است و بنابراین $f' > 0$ ، ثانیاً: تقعر منحنی به طرف پایین است، پس $f'' < 0$ ، ثالثاً: $f'(c)$ موجود نیست زیرا $f'(c^+)$ و $f'(c^-)$ با هم برابر نیستند.

۵۴- گزینه ۱. به مطلب (۵ - ۸) صفحه ۱۰۷ مراجعه کنید.

$$y'_x = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{e^x - e^{2x} - 2xe^{2x}}{e^y - 2e^y} \xrightarrow{(0,0)} y' = -\frac{e^0 - e^0 - 0}{e^0 - 2e^0} = -\frac{0}{-1} = 0$$

۵۵- گزینه ۳. به مطلب (۵ - ۶ - ۷) صفحه ۱۰۶ مراجعه کنید.

$$y = u^v \Rightarrow y' = u^v (v' \ln u + v \cdot \frac{u'}{u})$$

$$y = (2x - 1)^{\frac{x}{2}} \Rightarrow y' = (2x - 1)^{\frac{x}{2}} \left(\frac{1}{2} \ln(2x - 1) + \frac{x}{2} \cdot \frac{2}{2x - 1} \right)$$

$$m = y'(1) = (3) \left(\frac{1}{2} \ln 3 + \frac{2}{3} \right) = \frac{3}{2} \ln 3 + 2$$

۵۶- گزینه ۲. به مطلب (۵ - ۱۳ - ۴) صفحه ۱۰۹ مراجعه کنید.

$$y' = 2\left(\frac{1}{x}\right) \ln x, \quad y' = 0 \Rightarrow \ln x = 0 \Rightarrow x = 1, \quad y = 1 \rightarrow (1, 1)$$

$$y'' = \frac{2 - 2 \ln x}{x^2} \Rightarrow y''(1) = 2 > 0 \Rightarrow \min(1, 1)$$

۵۷- گزینه ۳. مختصات نقطه $(0, 0)$ در تابع صدق می‌کند.

$$1 = 0 + 0 + 0 + c \Rightarrow c = 1$$

به‌ازای نقطهٔ ماکزیمم $(x = 1)$ مشتق مرتبهٔ اول برابر صفر می‌شود.

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b, \quad f'(1) = 0 \Rightarrow 3 + 2a + b = 0$$

به ازای طول نقطه عطف ($x = 2$) مشتق مرتبه دوم برابر صفر می شود.

$$f''(x) = 6x + 2a, \quad f''(2) = 0 \implies 12 + 2a = 0 \implies a = -6$$

بنابراین:

$$3 + 2(-6) + b = 0 \implies b = 9$$

۵۸- گزینه ۲. صورت و مخرج کسر را در e^{-x} ضرب می کنیم.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{e^x + 1} &= \int \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}} dx, \quad u = 1 + e^{-x} \implies -du = e^{-x} dx \\ \int \frac{e^{-x} dx}{1 + e^{-x}} &= - \int \frac{du}{u} = -\ln|u| \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{e^x + 1} &= -\ln|1 + e^{-x}| \Big|_{-\infty}^{+\infty} = -\ln 1 + \ln 2 = \ln 2 \end{aligned}$$

۵۹- گزینه ۱. به مطلب (۶-۴-۳) صفحه ۱۵۲ مراجعه کنید.

$$\begin{aligned} \begin{cases} u = \ln x \\ dv = dx \end{cases} &\implies \begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = x \end{cases} \\ \int u dv &= uv - \int v du = x \ln x - \int dx = x \ln x - x \\ \int_1^e \ln x dx &= (x \ln x - x) \Big|_1^e = (e \ln e - e) - (\ln 1 - 1) = 1 \end{aligned}$$

۶۰- گزینه ۴. به مطلب (۶-۱۱) صفحه ۱۵۶ مراجعه کنید.

$$6 - x - x^2 = 0 \implies x^2 + x - 6 = 0 \implies (x + 3)(x - 2) = 0 \implies x = -3, x = 2$$

$$\begin{aligned} S &= \int_{-3}^2 (6 - x - x^2) dx = \left(6x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right) \Big|_{-3}^2 \\ &= \left(12 - 2 - \frac{8}{3} \right) - \left(-18 - \frac{9}{2} + 9 \right) = \frac{125}{6} \end{aligned}$$

۶۱- گزینه ۴. به مطلب (۶-۴-۲) صفحه ۱۵۲ مراجعه کنید.

$$\begin{aligned} \int \frac{\ln x}{x \ln x - x} dx &= \int \frac{\ln x}{x(\ln x - 1)} dx \\ \ln x = u &\implies \frac{dx}{x} = du \\ \int \frac{u du}{u - 1} &= \int \frac{u - 1 + 1}{u - 1} du = \int du + \int \frac{du}{u - 1} = u + \ln(u - 1) + c \\ \int \frac{\ln x}{x \ln x - x} dx &= \ln x + \ln[(\ln x) - 1] + c \xrightarrow[c=0]{x=2} \\ &= \ln 2 + \ln[(\ln 2) - 1] = \ln[2(\ln 2 - 1)] = \ln(2 \ln 2 - 2) \end{aligned}$$

۶۲- گزینه ۲. به مطلب (۶ - ۴ - ۳) صفحه ۱۵۲ مراجعه کنید.

$$\begin{cases} u = \log x \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{\log e}{x} dx \\ v = x \end{cases}$$

$$\int u dv = uv - \int v du = x \log x - \int \log e dx = x \log x - x \log e + c$$

$$\int_c^{1^*} \log x dx = (x \log x - x \log e) \Big|_c^{1^*} = (1^* \log 1^* - 1^* \log e) - (e \log e - e \log e)$$

$$= 1^* (1 - \log e)$$

۶۳- گزینه ۳. با فرض $y = \sqrt{9 - x^2}$ داریم:

$$y^2 = 9 - x^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 9$$

بنابراین انتگرال، مساحت یک نیم دایره به شعاع ۳ می باشد، و در نتیجه:

$$I = \frac{\pi r^2}{2} = \frac{9\pi}{2}$$

۶۴- گزینه ۲. به مطلب (۶ - ۱۱ - ۲) صفحه ۱۵۷ مراجعه کنید.

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow x^2 = x \Rightarrow x^2 - x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x = 0, x = \pm 1$$

$$S = \int_{-1}^0 (x^2 - x) dx + \int_0^1 (x - x^2) dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{-1}^0 + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1$$

$$S = 0 - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) - 0 = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

۶۵- گزینه ۴. به مطلب (۶ - ۴ - ۱) صفحه ۱۵۰ مراجعه کنید.

$$\int_{-1}^1 (3x + 2)(2x dx) = \int_{-1}^1 (6x^2 + 4x) dx = (2x^3 + 2x^2) \Big|_{-1}^1 = 4$$

۶۶- گزینه ۳. به مطلب (۶ - ۴ - ۲) صفحه ۱۵۲ مراجعه کنید.

$$\int_{-1}^2 \frac{dx}{e^x + 1} = \int_{-1}^2 \frac{e^x + 1 - e^x}{e^x + 1} dx = \int_{-1}^2 dx - \int_{-1}^2 \frac{e^x dx}{e^x + 1}$$

$$= x \Big|_{-1}^2 - \ln(e^x + 1) \Big|_{-1}^2 = 2 - \ln(e^2 + 1) + \ln 2$$

۶۷- گزینه ۳. به مطلب (۶ - ۴ - ۲) صفحه ۱۵۲ مراجعه کنید.

$$\sqrt{x+1} = u \Rightarrow x = u^2 - 1 \Rightarrow dx = 2u du, \begin{cases} x = -1 \Rightarrow u = 0 \\ x = 0 \Rightarrow u = 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\int_{-1}^2 x^2 \sqrt{x+1} dx &= \int_0^1 (u^2 - 1)^2 2u^2 du = \int_0^1 (2u^6 - 4u^4 + 2u^2) du \\ &= \left(\frac{2}{7} u^7 - \frac{4}{5} u^5 + \frac{2}{3} u^3 \right) \Big|_0^1 = \frac{2}{7} - \frac{4}{5} + \frac{2}{3} = \frac{16}{105}\end{aligned}$$

۶۸- گزینه ۲. به مطلب (۶-۱۱-۲) صفحه ۱۵۷ مراجعه کنید.

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x & \Rightarrow x^2 - 2x = 4 - x^2 \Rightarrow 2x^2 - 2x - 4 = 0 \\ y = 4 - x^2 & \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow (x-2)(x+1) = 0 \Rightarrow x = 2, x = -1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}S &= \left| \int_{-1}^2 (x^2 - 2x - 4 + x^2) dx \right| = \left| \int_{-1}^2 (2x^2 - 2x - 4) dx \right| \\ &= \left| \left(\frac{2}{3} x^3 - x^2 - 4x \right) \Big|_{-1}^2 \right| = \left| \left(\frac{16}{3} - 4 - 8 \right) - \left(-\frac{2}{3} - 1 + 4 \right) \right| = 9\end{aligned}$$

۶۹- گزینه ۳. به مطلب (۶-۴-۲) صفحه ۱۵۲ مراجعه کنید.

$$u = 1 + \sqrt{x} \Rightarrow du = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \Rightarrow 2du = \frac{dx}{\sqrt{x}}, \begin{cases} x = 0 \Rightarrow u = 1 \\ x = 1 \Rightarrow u = 2 \end{cases}$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})} = \int_1^2 \frac{2du}{u} = 2 \ln u \Big|_1^2 = 2 \ln 2 - 2 \ln 1 = 2 \ln 2$$

۷۰- گزینه ۱. به مطلب (۶-۴-۲) صفحه ۱۵۲ مراجعه کنید.

$$\begin{aligned}\sqrt{e^x - 1} = u &\Rightarrow e^x = u^2 + 1 \Rightarrow e^x dx = 2u du \Rightarrow dx = \frac{2u du}{u^2 + 1} \\ \begin{cases} x = \ln 2 \Rightarrow u = 1 \\ x = 0 \Rightarrow u = 0 \end{cases}, & \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx = \int_0^1 \frac{2u \cdot u du}{u^2 + 1} = \int_0^1 \frac{2u^2 du}{u^2 + 1} \\ &= 2 \int_0^1 \frac{u^2 + 1 - 1}{u^2 + 1} du = 2 \int_0^1 du - 2 \int_0^1 \frac{du}{u^2 + 1} = 2(u - \text{Arc tan } u) \Big|_0^1 \\ &= 2\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) - 0 = 2 - \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

۷۱- گزینه ۱. به مطلب (۶-۴-۲) صفحه ۱۵۲ مراجعه کنید.

$$I = \int \frac{dx}{2^x + 2^{-x}} = \int \frac{dx}{2^x + \frac{1}{2^x}} = \int \frac{2^x dx}{2^{2x} + 1}$$

$$u = 2^x \Rightarrow du = 2^x \cdot \ln 2 \cdot dx \Rightarrow 2^x dx = \frac{du}{\ln 2}$$

$$I = \frac{1}{\ln 2} \int \frac{du}{u^2 + 1} = \frac{1}{\ln 2} (\text{Arc tan } u) + c = \frac{1}{\ln 2} \text{Arc tan}(2^x) + c$$

۷۲- گزینه ۲. به مطلب (۶-۴-۱) صفحه ۱۵۰ مراجعه کنید.

$$I = \int_2^e \frac{x-2}{x-2} dx = \int_2^e \frac{x-2-1}{x-2} dx = \int_2^e dx - \int_2^e \frac{dx}{x-2}$$

$$=x - \ln(x-2)]_1^4 = (4 - \ln 2) - (1 - \ln 1) = 3 - \ln 2$$

۷۳- گزینه ۳. به مطلب (۶-۴-۳) صفحه ۱۵۲ مراجعه کنید.

$$\begin{aligned} \int_c^c \ln(x+1)dx &= c+2, \begin{cases} u = \ln(x+1) \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x+1} \\ v = x \end{cases} \\ \int u dv &= uv - \int v du = x \cdot \ln(x+1) - \int \frac{x}{x+1} dx \\ &= x \ln(x+1) - \int \frac{x+1-1}{x+1} dx = x \ln(x+1) - \int dx + \int \frac{dx}{x+1} \\ &= x \ln(x+1) - x + \ln(x+1) \\ \int_c^c \ln(x+1)dx &= c+2 \Rightarrow x \ln(x+1) - x + \ln(x+1)]_c^c = c+2 \\ &\Rightarrow c \ln(c+1) - c + \ln(c+1) = c+2 \\ &\Rightarrow (c+1) \ln(c+1) = 2(c+1) \Rightarrow \ln(c+1) = 2 \\ &\Rightarrow c+1 = e^2 \Rightarrow c = e^2 - 1 \end{aligned}$$

۷۴- گزینه ۱. به مطلب (۶-۳۰) صفحه ۱۵۰ مراجعه کنید.

$$\begin{aligned} F'(x) &= \int F''(x)dx = \int (12x^5 - 12x)dx = 2x^6 - 6x^2 + c \\ F'(0) &= 2 \Rightarrow 0 - 0 + c = 2 \Rightarrow c = 2 \\ F(x) &= \int F'(x)dx = \int (2x^6 - 6x^2 + 2)dx = x^7 - 2x^3 + 2x + c \\ F(1) &= 2 \Rightarrow 1 - 2 + 2 + c = 2 \Rightarrow c = 1 \\ F(x) &= x^7 - 2x^3 + 2x + 1 \end{aligned}$$

۷۵- گزینه ۳. به مطلب (۶-۱۰) صفحه ۱۵۶ مراجعه کنید.

$$\begin{aligned} \frac{df(x)}{dx} &= \frac{d}{dx} \int_1^x \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \\ g(x) &= xe^x \Rightarrow g'(x) = e^x + xe^x \\ (gof)'(x) &= g'(f(x)) \cdot f'(x) \Rightarrow (gof)'(2) = g'(f(2)) \cdot f'(2) \\ f'(2) &= \frac{1}{\sqrt{1+4}} = \frac{1}{\sqrt{5}}, f(2) = 0 \\ (gof)'(2) &= g'(0) \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = (e^0 + 0) \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

۷۶۔ گزینہ ۳.

$$\begin{aligned} \begin{cases} u = t \\ f''(t) = dv \end{cases} &\implies \begin{cases} du = dt \\ f'(t) = v \end{cases} \\ \int t f''(t) dt &= t f'(t) - \int f'(t) dt = t f'(t) - f(t) \\ \int_0^1 t f''(t) dt &= (t f'(t) - f(t)) \Big|_0^1 = 1 f'(1) - f(1) + f(0) \\ &= 6 - 3 + 3 = 6 \end{aligned}$$

۷۷۔ گزینہ ۲. بہ مطلب (۶ - ۱۱) صفحہ ۱۵۶ مراجعہ کنید.

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^0 e^{1x} dx + \int_0^1 e^{-1x} dx = \left[\frac{1}{1} e^{1x} \right]_{-1}^0 + \left[-\frac{1}{1} e^{-1x} \right]_0^1 \\ &= \left(\frac{1}{1} e^0 - \frac{1}{1} e^{-1} \right) + \left(-\frac{1}{1} e^{-1} + \frac{1}{1} e^0 \right) = 1 - e^{-1} \end{aligned}$$

۷۸۔ گزینہ ۳. بہ مطلب (۷ - ۳۳) صفحہ ۱۹۳ مراجعہ کنید.

۷۹۔ گزینہ ۳.

$$\begin{aligned} A^{1k} &= (A^1)^k = \left(\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right)^k = \left(\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right)^k \\ &= \left(2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)^k = (2I)^k = 2^k I \end{aligned}$$

۸۰۔ گزینہ ۲. بہ مطلب (۵ - ۲۷) صفحہ ۱۹۹ مراجعہ کنید.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a & 1 & 2 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 0 &\implies (-2a - 2 + a) - (2 - a^2 - 2) = 0 \\ &\implies a^2 - 3a - 4 = 0 \implies a = -1, 4 \end{aligned}$$

۸۱۔ گزینہ ۱. بہ مطلب (۷ - ۵۵) صفحہ ۲۰۲ مراجعہ کنید.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} -3-k & -9 & 12 \\ 1 & 3-k & 4 \\ 0 & 0 & 1-k \end{vmatrix} = 0 &\implies (-3-k)(3-k)(1-k) + 9(1-k) = 0 \\ &\implies (1-k)[(-3-k)(3-k) + 9] = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (1-k)[-(9-k^2)+9]=0$$

$$\Rightarrow (1-k)k^2=0 \Rightarrow k=0, k=1$$

۸۲- گزینه ۲. به قضیه مطلب (۷-۳۸) صفحه ۱۹۴ مراجعه کنید.

$$|A| = 15 + 8 = 23 \neq 0 \quad \text{گزینه (۱)}$$

$$|B| = -10 + 10 = 0 \quad \text{گزینه (۲)}$$

$$|C| = 8 + 10 = 18 \neq 0 \quad \text{گزینه (۳)}$$

$$|D| = 2 - 3 = -1 \neq 0 \quad \text{گزینه (۴)}$$

۸۳- گزینه ۳. به مطلب (۷-۳۹) صفحه ۱۹۵ مراجعه کنید.

۸۴- گزینه ۱. به مطلب (۷-۳۲-۲) صفحه ۱۹۲ مراجعه کنید.

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \sin \theta & \rho \cos \theta \end{vmatrix} = \rho \cos^2 \theta + \rho \sin^2 \theta = \rho$$

۸۵- گزینه ۳. به مطلب (۷-۱۵) صفحه ۱۸۸ مراجعه کنید.

$$(a \ b) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = (5 \ 1) \Rightarrow (a+2b \ -a+b) = (5 \ 1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+2b=5 \\ -a+b=1 \end{cases} \Rightarrow 3b=6 \Rightarrow b=2$$

۸۶- گزینه ۱. به مطلب (۷-۴۶) صفحه ۱۹۷ مراجعه کنید.

می‌دانیم مرتبه یک ماتریس برابر است با $\min$ تعداد سطرهاى مستقل خطى و یا ستون‌هاى مستقل خطى، سطر دوم (-1) برابر سطر اول است:

$$-1 - 2 - 3 - 4 = -(1 \ 2 \ 3 \ 4)$$

و سطر دوم ۲ برابر سطر اول است:

$$(2 \ 4 \ 6 \ 8) = 2(1 \ 2 \ 3 \ 4)$$

بنابراین تعداد سطرهاى مستقل برابر ۱ است. از طرف دیگر ستون دوم ۲ برابر ستون اول است:

$$(2 \ -2 \ 4) = 2(1 \ -1 \ 2)$$

و ستون سوم ۳ برابر ستون اول است:

$$(3 \ -3 \ 6) = 3(1 \ -1 \ 2)$$

و ستون چهارم ۴ برابر ستون اول است:

$$(4 \ -4 \ 8) = 4(1 \ -1 \ 2)$$

لذا تعداد ستون‌های مستقل خطی برابر ۱ است. بنابراین مرتبه ماتریس برابر ۱ است.

۸۷- گزینه ۴. به مطلب (۷-۱۵) صفحه ۱۸۸ مراجعه کنید.

$$(1 \ 1 \ x) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow (1+x \ 3 \ 2+x) \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow 1+x+12+4+2x=0 \Rightarrow x=-\frac{17}{3}$$

۸۸- گزینه ۲. به مطلب (۷-۵۵) صفحه ۲۰۲ مراجعه کنید.

$$\begin{bmatrix} 13-k & -13 & 5 \\ 0 & 4-k & 0 \\ -15 & 9 & -7-k \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow (13-k)(4-k)(-7-k) + 75(4-k) = 0$$

$$\Rightarrow (4-k)[(13-k)(-7-k) + 75] = 0$$

$$\Rightarrow (4-k)(k^2 - 6k - 16) = 0$$

$$\Rightarrow k = 4, 8, -2$$

۸۹- گزینه ۲. به مطلب (۷-۴۶) صفحه ۱۹۷ مراجعه کنید. سطر سوم برابر است با ۲ برابر سطر اول به اضافه سطر دوم:

$$(2 \ 1 \ 3 \ -2) = 2(1 \ -1 \ 2 \ -2) + (0 \ 3 \ -1 \ 2)$$

لذا تعداد سطرهاى مستقل خطی برابر ۲ است.

۹۰- گزینه ۴. به مطلب (۷-۴۱) صفحه ۱۹۵ مراجعه کنید.

$$|A| = (0 - 2 + 6) - (8 + 0 - 12) = 8$$

می‌دانیم a_{31} عنصر مربوط به سطر سوم و ستون اول، ماتریس الحاقی A می‌باشد، بنابراین a_{31} برابر است با a_{13} . عنصر متناظر در ماتریس همسازه که به صورت زیر است می‌آید.

$$a_{13} = (-1)^{1+3} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = -1 - 4 = -5 \Rightarrow A_{31}^{-1} = \frac{-5}{8}$$

۹۱- گزینه ۲. به مطلب (۷ - ۴۶) صفحه ۱۹۷ مراجعه کنید.

$$\begin{bmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ -4 & 6 & 10 \end{bmatrix} = (3^0 + 3^0 + 3^0) - (3^0 + 3^0 + 3^0) = 0$$

چون $|A| = 0$ ، بنابراین $r \neq 3$ است. از طرفی کلیه درمیان‌های 2×2 نیز برابر صفراند، پس $r(A) = 1$.
 ۹۲- گزینه ۴. یک فرم درجه دوم $q = X'AX$ را بنابه تعریف معین مثبت نامند اگر به‌ازای هر $X \neq 0$ داشته باشیم، $q > 0$. به عبارت دیگر q هنگامی معین مثبت است که تمامی مینورهای اصلی مثبت باشد. یعنی

$$|H_1| > 0, |H_2| > 0, \dots, |H_n| > 0$$

$$|H_1| = 1 > 0, |H_2| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1 > 0, |H_3| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 4 > 0$$

۹۳- گزینه ۱. قضیه کوشی: اگر A یک ماتریس $n \times n$ بوده به‌طوری‌که $n > 1$ باشد، داریم $|\text{adj } A| = (|A|)^{n-1}$.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = (-12 - 2 - 4) - (-3 - 4 - 8) = -18 + 15 = -3$$

$$|\text{adj } A| = (|A|)^{3-1} = (-3)^2 = 9$$

۹۴- گزینه ۲. به مطلب (۷ - ۵۲) صفحه ۱۹۹ مراجعه کنید. ابتدا یکی از مجهولات را برحسب دو مجهول دیگر از یک معادله به دست آوریم و آن را در دو معادله دیگر قرار دهیم و یک دستگاه دو مجهول به دست آید.

$$x + 2y - z = 1 \implies x = 1 - 2y + z$$

$$\begin{cases} 3(1 - 2y + z) - y + z = 3 \\ 1 - 2y + z - 5y + 3z = a \end{cases} \implies \begin{cases} -7y + 4z = 0 \\ -7y + 4z = a - 1 \end{cases}$$

دستگاه بالا به‌ازای $a = 1$ بیشمار جواب دارد.

۹۵- گزینه ۳. به نکته مطلب (۷ - ۲۸) صفحه ۱۹۱ مراجعه کنید.

$$(A + A^t)^t = A^t + (A^t)^t = A^t + A = A + A^t$$

۹۶- گزینه ۴. در دستگاه m معادله n مجهولی $AX = B$. اگر تعداد مجهول‌ها بیش از تعداد معادلات باشد ($n > m$) دستگاه یا جواب ندارد و یا بیشمار جواب دارد. در دستگاه دو معادله و سه مجهولی

هر یک از معادلات نشان‌دهنده یک صفحه از فضای $\mathbb{R}^3$ می‌باشد. اگر این دو صفحه موازی و غیر منطبق باشند، یعنی:

$$\frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{a_{13}}{a_{23}} \neq \frac{b_1}{b_2}$$

دستگاه جواب ندارد، زیرا دو صفحه یکدیگر را قطع نمی‌کنند. و اگر دو صفحه موازی نباشند یکدیگر را در یک خط (فصل مشترک دو صفحه) قطع می‌کنند که هر یک از نقاط این خط جواب دستگاه می‌باشد که بی‌شمار جواب دارد. مجهول x_2 در معادله اول را برحسب سه مجهول دیگر به دست آورده و آن را در معادله قرار می‌دهیم.

$$x_2 = 4 - x_1 - x_3 - x_4$$

$$\begin{cases} x_1 + 3(4 - x_1 - x_3 - x_4) + 2x_3 + 4x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_3 - x_4 = k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x_1 - x_3 + x_4 = -12 \\ 2x_1 + x_3 - x_4 = k \end{cases}$$

بنابراین:

$$\frac{-2}{2} = \frac{-1}{1} = \frac{1}{-1} = \frac{-12}{k} \Rightarrow k = 12$$

۹۷- گزینه ۲. به مطلب (۷-۴۶) صفحه ۱۹۷ مراجعه کنید.

$|A| = 0$ زیرا ستون‌های دوم و سوم ماتریس A متناسب هستند، پس $r(A) \neq 4$ از طرفی تمام درمیان‌های 3×3 نیز برابر صفراند، اکنون اگر یکی از درمیان‌های 2×2 مخالف صفر باشد، $r(A) = 2$.

$$\begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = 12 - 4 = 8 \neq 0 \Rightarrow r(A) = 2$$

۹۸- گزینه ۳. به مطلب (۷-۱۵) صفحه ۱۸۸ مراجعه کنید.

$$\begin{aligned} (x \ 1 \ 1) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 &\Rightarrow (x+3 \ 2x+3 \ x+1) \begin{pmatrix} x \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \\ &\Rightarrow x^2 + 3x + 2x + 3 + x + 1 = 0 \\ &\Rightarrow x^2 + 6x + 4 = 0 \\ &\Rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9-4}}{1} = -3 \pm \sqrt{5} \end{aligned}$$

۹۹- گزینه ۴. به مطلب (۷-۴۱) صفحه ۱۹۵ مراجعه کنید.

$$|A| = (8 + 0 + 1) - (0 + 0 + 0) = 9$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4, \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4, \quad A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4$$

$$A_{11}^{-1} + A_{22}^{-1} + A_{33}^{-1} = \frac{4}{4} + \frac{4}{4} + \frac{4}{4} = \frac{12}{4} = \frac{3}{1}$$

۱۰۰- گزینه ۴. به مطالب (۷-۴۱) و (۷-۱۵) در صفحات ۱۹۶ و ۱۸۸ مراجعه کنید.

$$A^{-1} = \frac{1}{1-6} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \frac{-1}{5} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1}B^T = \frac{-1}{5} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} = \frac{-1}{5} \begin{bmatrix} -4 & -8 \\ -8 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{8}{5} \\ \frac{8}{5} & -\frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

۱۰۱- گزینه ۱. فرم درجه دوم $q = X'AX$ با شرط $X \neq 0$ را در نظر بگیرید. که $|H_i|$ هاینورهای اصلی ماتریس A است.

q هنگامی معین مثبت ($q > 0$) است که تمامی مینورهای اصلی مثبت باشد. یعنی:

$$|H_1| > 0, |H_2| > 0, \dots, |H_n| > 0$$

q هنگامی شبه معین مثبت ($q \geq 0$) است اگر مینورهای اصلی مثبت یا برابر صفر باشد. یعنی:

$$|H_1| \geq 0, |H_2| \geq 0, \dots, |H_n| \geq 0$$

q هنگامی معین منفی ($q < 0$) است اگر مینورهای اصلی یک در میان منفی و مثبت باشد. یعنی:

$$|H_1| < 0, |H_2| > 0, |H_3| < 0, \dots$$

q هنگامی شبه معین منفی است ($q \leq 0$) اگر مینورهای فوق (برخی) مساوی صفر نیز باشد. اگر q به

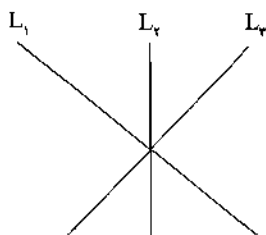
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ اکنون در ماتریس}$$

$$|H_1| = 1 > 0, |H_2| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -4 < 0, |H_3| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

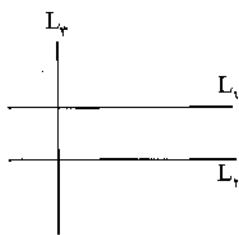
۱۰۲- گزینه ۳. در دستگاه m معادله و n مجهولی $AX = B$ اگر تعداد معادلات بیش از تعداد مجهولات باشد ($m > n$) آنگاه یک بردار $B = (b_1, \dots, b_m)'$ وجود دارد که به ازای آن دستگاه جواب ندارد. مثلاً در حالت سه معادله و دو مجهول دستگاه به صورت

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 = b_3 \end{cases}$$

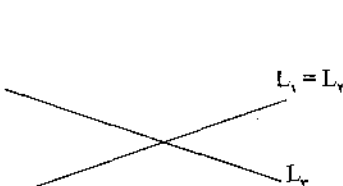
می باشد. هر یک از معادلات نشان دهنده یک خط راست در صفحه است که جواب دستگاه نقطه مشترک (تقاطع) هر سه خط می باشد. بسته به حالت های خطوط، دستگاه یا جواب ندارد و یا فقط یک جواب دارد و تنها در حالتی که هر سه خط بر هم منطبق باشند (در واقع هر سه معادله یکی باشند) دستگاه بیشمار جواب دارد.



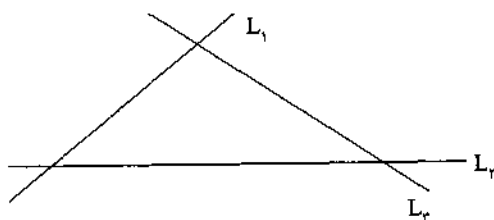
یک جواب دارد



جواب وجود ندارد



یک جواب وجود دارد



جواب وجود ندارد



بی شمار جواب دارد

اکنون در دستگاه داده شده مقادیر x و y را از معادله های دوم و سوم به دست آورده و در معادله اول قرار می دهیم تا مقدار k به دست آید.

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases} \Rightarrow x = 2, y = 1$$

$$x + 2y = k \Rightarrow 2 + 2 = k \Rightarrow k = 4$$

لازم به تذکر است که دستگاه سازگار است هرگاه جواب داشته باشد.

۱۰۳- گزینه ۴. به مطلب (۸ - ۴۰) صفحه ۲۴۴ مراجعه کنید.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & k \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (3 + 4 + 2k) - (1 + 12 + 2k) = 0$$

$$\Rightarrow 7 + 2k - 13 - 2k = 0 \Rightarrow (2 - 2)k = 6$$

تساوی بالا به ازای هیچ مقدار k برقرار نیست.

۱۰۴- گزینه ۲. به مطلب (۸ - ۴) صفحه ۲۴۴ مراجعه کنید.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & k \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow (1 + 2k + 6) - (k + 4 + 3) \neq 0$$

$$\Rightarrow k \neq 0$$

۱۰۵- گزینه ۴. به مطلب (۸ - ۴۰) صفحه ۲۴۴ مراجعه کنید.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ a & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (b) - (abc) = 0 \Rightarrow b(1 - ac) = 0$$

به ازای $a = 2$ و $c = \frac{1}{4}$ تساوی بالا برقرار است.

۱۰۶- گزینه ۳. به مطلب (۹ - ۲) صفحه ۲۵۵ مراجعه کنید.

$$x^2 + 2y^2 \geq 0 \Rightarrow -x^2 - 2y^2 \leq 0 \Rightarrow 100 - x^2 - 2y^2 \leq 100 \Rightarrow$$

$$0 \leq \sqrt{100 - x^2 - 2y^2} \leq \sqrt{100} \Rightarrow 0 \leq z \leq 10$$

۱۰۷- گزینه ۳.

$$f(x - z) = x + y + z \Rightarrow x + y + z - f(x - z) = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = - \frac{1 - f(x - z)}{1 + f(x - z)}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = - \frac{1}{1 + f(x - z)}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} - 2 \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-1 + f(x - z)}{1 + f(x - z)} + \frac{2}{1 + f(x - z)} = 1$$

۱۰۸۔ گزینہ ۱. بہ مطلب (۹-۱۲) صفحہ ۲۵۹ مراجعہ کنید.

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda^2 x^2}{\lambda^2 y^2} + e^{\frac{\lambda y}{\lambda x}} - \frac{\lambda y}{\lambda x} = \lambda^2 \left(\frac{x^2}{y^2} + e^{\frac{y}{x}} - \frac{y}{x} \right) = \lambda^2 z$$

۱۰۹۔ گزینہ ۳. بہ مطلب (۹-۱۶) صفحہ ۲۶۰ مراجعہ کنید.

$$\begin{cases} z_x = 9x^2 - 9 = 0 \implies x = \pm 1 \\ z_y = 2y + 4 = 0 \implies y = -2 \end{cases}$$

$$Z_{xx} = 18x, Z_{xy} = Z_{yx} = 0, Z_{yy} = 2$$

$$|H_1| = 18x, |H_2| = \begin{vmatrix} 18x & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$M(1, -2) \implies |H_1| = 18 > 0, |H_2| = \begin{vmatrix} 18 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 36 > 0$$

۱۱۰۔ گزینہ ۱. بہ مطلب (۹-۱۷) صفحہ ۲۶۱ مراجعہ کنید.

$$U(q_1, q_2) = 4q_1 q_2 \quad g(q_1, q_2) = 5q_1 + 10q_2 - 400$$

$$\frac{U_{q_1}}{g_{q_1}} = \frac{U_{q_2}}{g_{q_2}} \implies \frac{4q_2}{5} = \frac{4q_1}{10} \implies q_1 = 2q_2$$

$$5q_1 + 10q_2 = 400 \implies 10q_2 + 10q_2 = 400 \implies q_2 = 20, q_1 = 40$$

۱۱۱۔ گزینہ ۳. بہ مطلب (۹-۹) صفحہ ۲۵۸ مراجعہ کنید.

$$d^2 z = z_{xx} dx^2 + 2z_{xy} dx dy + z_{yy} dy^2$$

$$z_x = 2x + 5y - 4, z_{xx} = 2, z_y = 5x + 24y^2, z_{yy} = 48y$$

$$z_{xy} = 5 = z_{yx}$$

$$d^2 z = 2dx^2 + 10 dx dy + 48y dy^2 \xrightarrow{(1,1)} d^2 z = 2dx^2 + 10 dx dy + 48dy^2$$

۱۱۲۔ گزینہ؟

۱۱۳۔ گزینہ ۱. بہ مطلب (۹-۶) صفحہ ۲۵۶ مراجعہ کنید.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2y}{x^2 + y^2}$$

$$x \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2x^2}{x^2 + y^2} + \frac{2y^2}{x^2 + y^2} = 2$$

۱۱۴۔ گزینہ ۲.

$$z = x^{xy} \implies \ln z = \ln x^{xy} \implies \ln z = xy \cdot \ln x$$

$$\frac{z'}{z} = y \ln x + y \implies z' = z(y \ln x + y)$$

به ازای $x = y = 1$ داریم:

$$z' = 1(\ln 1 + 1) = 0 + 1 = 1$$

۱۱۵- گزینه ۳. به مطلب (۹-۱۶) صفحه ۲۶۰ مراجعه کنید.

$$\begin{cases} z_x = 2ax + by = 0 \\ z_y = bx + a + 4 = 0 \end{cases} \xrightarrow{(1,1)} \begin{cases} 2a + b = 0 \\ b + a = -4 \end{cases} \xrightarrow{(-)} \begin{cases} 2a + b = 0 \\ b + a = -4 \end{cases}$$

$$\hline a = 4, b = -8$$

۱۱۶- گزینه ۲. به مطلب (۹-۱۶-۳) صفحه ۲۶۱ مراجعه کنید.

$$\begin{cases} z_x = 2x + y - 3 = 0 \\ z_y = x + 2y - 6 = 0 \end{cases} \implies (-2) \begin{cases} 2x + y = 3 \\ x + 2y = 6 \end{cases}$$

$$\hline y = 3, x = 0 \implies \text{نقطه بحرانی } (0, 3)$$

$$z_{xx} = 2, z_{xy} = z_{yx} = 1, z_{yy} = 2$$

$$|H_1| = 2 > 0, |H_2| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 > 0$$

بنابراین نوع نقطه بحرانی می‌تیم است.

۱۱۷- گزینه ۱. به مطلب (۹-۱۷) صفحه ۲۶۱ مراجعه کنید.

$$x + y = 3 \implies y = 3 - x$$

$$z = x^2 + 2x(3 - x) + 4(3 - x) + 10$$

$$z = x^2 + 6x - 2x^2 + 12 - 4x + 10 = -x^2 + 2x + 22$$

$$z = 0 \implies -2x + 2 = 0 \implies x = 1, y = 2 \rightarrow (1, 2)$$

۱۱۸- گزینه ۲. به مطلب (۹-۱۷) صفحه ۲۶۱ مراجعه کنید.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
z'_x		$+$	$-$
		$\max$	

۱۱۹- گزینه ۴. حداقل مقدار عبارت زیر رادیکال به ازای $x = 5$ و $y = 0$ برابر ۰ است.

۱۲۰- گزینه ۴. به مطلب (۷-۹) صفحه ۲۵۷ مراجعه کنید.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \ln y + \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{1}{y} + \frac{1}{x} = \frac{x+y}{xy}$$

۱۲۱- گزینه ۲. به مطلب (۱۶-۹) صفحه ۲۶۰ مراجعه کنید.

$$\begin{cases} z_x = 6x - y - 4 = 0 \\ z_y = 4y - x - 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow (2) \begin{cases} 6x - y = 4 \\ 4y - x = 7 \end{cases} \Rightarrow x = 1, y = 3$$

با جایگذاری در تابع $z = 5$ ، بنابراین نقطه بحرانی $(1, 3, 5)$ می باشد.

۱۲۲- گزینه ۲. به مطلب (۳-۱۶-۹) صفحه ۲۶۱ مراجعه کنید.

$$z_{xx} = 6, \quad z_{xy} = z_{yx} = -1, \quad z_{yy} = 4$$

$$|H_1| = 6 > 0, \quad |H_2| = \begin{vmatrix} 6 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 24 - 1 = 23 > 0$$

بنابراین نوع نقطه بحرانی می نیمم است.

۱۲۳- گزینه ۱. به مطلب (۱۷-۹) صفحه ۲۶۱ مراجعه کنید.

$$2x + 3y - 5 = 0 \Rightarrow y = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$$

$$z = xy = x(-\frac{2}{3}x + \frac{5}{3}) = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{5}{3}x$$

$$z' = -\frac{4}{3}x + \frac{5}{3} = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{4}, y = \frac{5}{4}$$

۱۲۴- گزینه ۱.

$$x^2 \geq 0, \quad y^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 \geq x^2 - y^2 \Rightarrow \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2} \geq 1$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}} \geq 1 \Rightarrow z \geq 1$$

۱۲۵- گزینه ۱. به مطلب (۳-۱۶-۹) صفحه ۲۶۱ مراجعه کنید.

$$\begin{cases} z_x = 2x \\ z_y = -2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = 0 \Rightarrow z = 1 \rightarrow (0, 0, 1)$$

$$z_{xx} = 2, \quad z_{xy} = z_{yx} = 0, \quad z_{yy} = -2$$

$$|H_1| = 2 > 0, \quad |H_2| = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4 < 0 \rightarrow \min(0, 0, 1)$$

۱۲۶- گزینه ۱. اگر قرار دهیم $u = \ln x$ و $v = \ln y$ ، آن‌گاه برای $\ln z$ به عنوان تابعی از u و v داریم:

$$\ln z = \frac{\ln(e^{2u} + e^{2v})}{2}$$

در نتیجه:

$$\frac{\partial \ln z}{\partial \ln x} + \frac{\partial \ln z}{\partial \ln y} = \frac{\partial \ln z}{\partial u} + \frac{\partial \ln z}{\partial v} = \frac{e^{2u}}{e^{2u} + e^{2v}} + \frac{e^{2v}}{e^{2u} + e^{2v}} = 1$$

۱۲۷- گزینه ۴. به مطلب (۹-۱۷) صفحه ۲۶۱ مراجعه کنید.

$$2x + \frac{1}{2}y = 12 \Rightarrow y = -4x + 24$$

$$z = 4x^2 + 2(-4x + 24) - 4 = 4x^2 - 8x + 44$$

$$z'_x = 0 \Rightarrow 8x - 8 = 0 \Rightarrow x = 1, \quad y = 20$$

$$z = 4 + 40 - 4 = 40$$

۱۲۸- گزینه ۱. به مطلب (۹-۸) صفحه ۲۵۷ مراجعه کنید.

$$w = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \left(\frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} \right)^{\frac{1}{2}} = (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{1}{2}(2x)(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} = -x(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= -(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} + \frac{3}{2}(2x)(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}}x \\ &= -(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} + 3x^2(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} \end{aligned}$$

به‌طور مشابه:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} + 3y^2(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = -(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} + 3z^2(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}}$$

بنابراین:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} &= -3(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} + 3(x^2 + y^2 + z^2)(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} \\ &= -3(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} + 3(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} = 0 \end{aligned}$$

۱۲۹-گزینۀ ۳. به توضیح تست شماره ۱۲۴ مراجعه کنید.

۱۳۰-گزینۀ ۴. به مطلب (۹-۹) صفحه ۲۵۸ مراجعه کنید.

$$z_x = 2x + \Delta y \Rightarrow z_{xx} = 2, \quad z_{xy} = 0$$

$$z_y = 2y + \Delta x \Rightarrow z_{yy} = 2$$

$$d^2z = z_{xx}dx^2 + 2z_{xy}dxdy + z_{yy}dy^2 = 2dx^2 + 1^0dxdy + 2dy^2$$

به ازای $dx = dy = 0.1$

$$d^2z = 2(0.1^2) + 1^0(0.1)(0.1) + 2(0.1^2) = 0.2 + 0.1 + 0.2 = 0.5$$

۱۳۱-گزینۀ ۱. به مطلب (۹-۱۰) صفحه ۲۵۸ مراجعه کنید.

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial s} &= \left(\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} \right) + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s} \right) \\ &= (2x+y)(2) + (x+2y)(1) + (2x+y)(1) + (x+2y)(-2) \end{aligned}$$

در نقطه $(1, 2)$:

$$\frac{\partial z}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial s} = 8 + 5 + 4 - 10 = 7$$

۱۳۲-گزینۀ ۲. به مطلب (۹-۱۶-۳) صفحه ۲۶۱ مراجعه کنید.

$$\begin{cases} z_x = 2x \\ z_y = 2ay \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 0 & \Rightarrow x = 0 \\ 2ay = 0 & \Rightarrow y = 0 \end{cases}$$

$$z_{xx} = 2, \quad z_{xy} = 0, \quad z_{yy} = 2a, \quad z_{yx} = 0$$

$$|H_1| = z_{xx} = 2 > 0, \quad |H_2| = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2a \end{vmatrix}$$

نقطه بحرانی در صورتی زینی است که $|H_2| < 0$:

$$2a - 0 < 0 \Rightarrow a < 0$$

۱۳۳-گزینۀ ۴. به مطلب (۹-۱۱) صفحه ۲۵۹ مراجعه کنید.

$$\begin{aligned} z'_x &= -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{2x - \Delta yz}{2z - \Delta xy + 2} \xrightarrow{(1,1,1)} z'_x = -\frac{2-5}{2-5+2} = -3 \\ z'_y &= -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{2y - \Delta xz}{2z - \Delta xy + 2} \xrightarrow{(1,1,1)} z'_y = -\frac{2-5}{2-5+2} = -3 \end{aligned}$$

$$z'_x + z'_y = -3 - 3 = -6$$

۱۳۴- گزینه ۱. به مطلب (۱۱-۵-۲) صفحه ۳۰۴ مراجعه کنید.

$$\begin{aligned} xy' &= y + 1 \Rightarrow x \frac{dy}{dx} = y + 1 \Rightarrow x dy = (y + 1) dx \\ \int \frac{1}{x} dx - \int \frac{1}{y+1} dy &= c \Rightarrow \ln(x) - \ln(y+1) = c \Rightarrow \\ \ln \frac{x}{y+1} &= c \Rightarrow \frac{x}{y+1} = e^c \xrightarrow{e^c=c} \frac{x}{y+1} = c \\ \xrightarrow{(1,1)} \frac{1}{2} &= c \Rightarrow \frac{x}{y+1} = \frac{1}{2} \Rightarrow y = 2x - 1 \end{aligned}$$

۱۳۵- گزینه ۳.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{100} i^k &= x + iy \Rightarrow i^0 + i^1 + i^2 + \dots + i^{100} = x + iy \\ \Rightarrow \frac{1(i^{101} - 1)}{i - 1} &= x + iy \\ \Rightarrow \frac{i - 1}{i - 1} &= x + iy \Rightarrow 1 = x + iy \\ \Rightarrow x &= 1, \quad y = 0 \end{aligned}$$

۱۳۶- گزینه ۲. به مسأله ۱۲ صفحه ۲۲۷ مراجعه کنید.

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2} \quad \tan t = \frac{y}{x} = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} \\ z &= r(\cos \theta + i \sin \theta) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \end{aligned}$$

۱۳۷- گزینه ۲. به مطلب (۱۳-۱۴) صفحه ۳۲۶ مراجعه کنید.

$$\begin{aligned} 1 - \sqrt{2}i &\Rightarrow x = 1, \quad y = -\sqrt{2} \Rightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2} = 2, \quad \tan \theta = \frac{-\sqrt{2}}{1} \Rightarrow \theta = \frac{5\pi}{4} \\ 1 + \sqrt{2}i &\Rightarrow x = 1, \quad y = \sqrt{2} \Rightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2} = 2, \quad \tan \theta = \frac{\sqrt{2}}{1} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

بنابراین:

$$1 - \sqrt{2}i = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right), \quad 1 + \sqrt{2}i = 2 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\frac{1 - \sqrt{2}i}{1 + \sqrt{2}i} = \frac{2}{2} \left(\cos \left(\frac{5\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{5\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \right) \right)$$

$$\begin{aligned}
 &= \cos\left(\frac{\sqrt[4]{2}\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\sqrt[4]{2}\pi}{3}\right) \\
 \left(\frac{1 - \sqrt[4]{2}i}{1 + \sqrt[4]{2}i}\right)^{10} &= \cos\left(\frac{\sqrt[4]{2}\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\sqrt[4]{2}\pi}{3}\right) \\
 &= \cos\left(13\pi + \frac{\sqrt[4]{2}\pi}{3}\right) + i \sin\left(13\pi + \frac{\sqrt[4]{2}\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt[4]{2}}{2}i
 \end{aligned}$$

۱۳۸۔ گزینہ ۲۔ بہ مطلب (۱۳ - ۱۵) صفحہ ۳۲۶ مراجعہ کنید.

$$\begin{aligned}
 z &= 1 - i \quad r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \quad \tan \theta = \frac{-1}{1} \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{4} \\
 \sqrt[4]{z} &= \sqrt[4]{\sqrt{2}} \left(\cos\left(\frac{\sqrt[4]{2}k\pi - \frac{\pi}{4}}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\sqrt[4]{2}k\pi - \frac{\pi}{4}}{4}\right) \right) \\
 &= \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{\sqrt[4]{2}k\pi - \pi}{16} + i \sin \frac{\sqrt[4]{2}k\pi - \pi}{16} \right) \\
 k=0 &\Rightarrow z_1 = \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{-\pi}{16} + i \sin \frac{-\pi}{16} \right) \\
 k=1 &\Rightarrow z_2 = \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{\sqrt[4]{2}\pi}{16} + i \sin \frac{\sqrt[4]{2}\pi}{16} \right)
 \end{aligned}$$

سؤالات ریاضیات آزمون‌های کارشناسی ارشد

سال ۸۳

«بسط دو جمله‌ای»

۱- عبارت $(a + b + c)^4$ ، چند جمله دارد؟

۲۴ (۴)

۱۸ (۳)

۱۵ (۲)

۱۲ (۱)

(اقتصاد - ۸۳)

۲- تعداد جملات بسط $(a + b + c)^5$ کدام است؟

۲۱ (۴)

۲۰ (۳)

۱۸ (۲)

۶ (۱)

(مدیریت - ۸۳)

۳- مجموع ضرایب در بسط $(a + b + c)^5$ کدام است؟

۲۴۳ (۴)

۲۲۵ (۳)

۱۵۰ (۲)

۱۲۵ (۱)

(حسابداری - ۸۳)

«مجموعه‌ها»

۴- اگر داشته باشیم $A \subset B \subset C$ ، آنگاه $(A \cup B) \cap C - A \cap B$ کدام است؟

$B \cap \bar{A}$ (۴)

ϕ (۳)

C (۲)

B (۱)

(حسابداری - ۸۳)

۵- از بین دانشجویان فارغ‌التحصیل رشته مدیریت یک دانشگاه، ۳۰ نفر در آزمون رشته مدیریت و ۲۰ نفر در آزمون رشته حسابداری و ۱۰ نفر در هر دو آزمون شرکت کرده‌اند. چند نفر از این دانشجویان لااقل در یکی از این دو رشته شرکت کرده‌اند؟

۶۰ (۴)

۵۵ (۳)

۵۰ (۲)

۴۰ (۱)

(مدیریت - ۸۳)

«تابع»

۶- برد تابع حقیقی f به معادله $y = \ln\left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)$ کدام است؟

- (۱) $R - [0, \infty)$ (۲) R^+ (۳) R (۴) $[0, 1)$

(اقتصاد - ۸۳)

۷- هزینه پاکت‌های پستی به مقصد معلومی به اساس جدول زیر است.

x وزن پاکت به گرم	$[0 - 5)$	$[5 - 10)$	$[10, 15)$	$[15, 20)$	...
c هزینه پست	۲۰۰	۳۰۰	۴۰۰	۵۰۰	...

تابع هزینه پاکتی به وزن $x > 0$ گرم کدام است؟

- (۱) $200\left[\frac{x}{5}\right] + 100$ (۲) $100\left(\frac{x}{5}\right) + 100$
 (۳) $100\left(\left[\frac{x}{5}\right] + 1\right)$ (۴) $300\left[\frac{x}{5}\right] - 100$

(اقتصاد - ۸۳)

۸- برد تابع حقیقی $y = \ln\left(\frac{1 - e^x}{1 + e^x}\right)$ برابر است با:

- (۱) R (۲) R^+ (۳) $(-\infty, 0)$ (۴) $(-1, 1)$

(مدیریت - ۸۳)

۹- اگر $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ معادله تابع $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ باشد، مقدار $f^{-1}(2)$ کدام است؟

- (۱) $\ln 2$ (۲) $\ln \frac{1}{2}$ (۳) $\ln(2 - \sqrt{5})$ (۴) $\ln(2 + \sqrt{5})$

(مدیریت - ۸۳)

۱۰- اگر $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ و $g(x) = \ln x$ ، آنگاه $f \circ g(3)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) 2 (۴) 3

(مدیریت - ۸۳)

۱۱- هزینه تولید هر واحد کالا ۱۰۰ تومان و هزینه ثابت ۱۰۰,۰۰۰ تومان است، در صورتی که هر واحد کالا

۱۲۰ تومان فروخته شود، به ازای چه مقدار تولید، سود بنگاه به ۱۰۰,۰۰۰ تومان می‌رسد؟

- (۱) ۱۰,۰۰۰ (۲) ۱۲,۰۰۰ (۳) ۲۰,۰۰۰ (۴) ۲۴,۰۰۰

(مدیریت - ۸۳)

۱۲- قرار است بعد از گذشت ۴ سال مبلغ ۱,۵۰۰,۰۰۰ تومان دریافت کنیم در صورتی که ارزش فعلی این

مبلغ یک میلیون تومان و سود به‌طور پیوسته بر سرمایه افزوده شود، نرخ سود سرمایه‌گذاری چقدر است؟

۱- در صورت اصلی سؤال به اشتباه $f(x) = \ln x$ نوشته شده بود. م.

$$\ln 6 \quad (۴) \quad ۴ \ln ۱/۵ \quad (۳) \quad \ln \frac{۱/۵}{۴} \quad (۲) \quad \frac{۱}{۴} \ln ۱/۵ \quad (۱)$$

(مدیریت - ۸۳)

۱۳- دامنه تابع $y = \ln \left(\frac{1 - 2e^x}{1 + e^x} \right)$ کدام است؟

$$(-\infty, -\ln 2) \quad (۴) \quad (-\infty, 1) \quad (۳) \quad R^+ \quad (۲) \quad R \quad (۱)$$

(حسابداری - ۸۳)

۱۴- اگر $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ معادله تابع حقیقی $R \rightarrow R$ باشد، $f^{-1}(2)$ کدام است؟

$$\frac{e^2 - e^{-2}}{e^2 + e^{-2}} \quad (۴) \quad \frac{e^2 + 1}{e^2 - 1} \quad (۳) \quad 2 \ln 3 \quad (۲) \quad \frac{1}{2} \ln 3 \quad (۱)$$

(حسابداری - ۸۳)

۱۵- اگر داشته باشیم $f(x) = \frac{2e^x - 1}{e^x + 1}$ ، $g(x) = \ln x$ در این صورت $f \circ g(2)$ کدام است؟

$$2 \quad (۴) \quad 1 \quad (۳) \quad \frac{1}{2} \quad (۲) \quad \frac{1}{3} \quad (۱)$$

(حسابداری - ۸۳)

۱۶- اگر هزینه تولید هر واحد کالا ۱۰۰ تومان و هزینه ثابت ۲۰۰۰۰۰ تومان باشد برای رسیدن به نقطه سر به سر چه مقدار کالا باید تولید کرد، در صورتی که هر واحد کالا را ۱۲۰ تومان بفروشیم؟

$$24000 \quad (۴) \quad 20000 \quad (۳) \quad 12000 \quad (۲) \quad 10000 \quad (۱)$$

(حسابداری - ۸۳)

۱۷- در یک شرکت مبلغ 10^6 تومان با نرخ سود مشارکت ۱۰ درصد سرمایه‌گذاری شده است، اگر سود به‌طور پیوسته بر سرمایه افزوده شود، پس از گذشت ۴ سال سود این سرمایه کدام است؟

$$10^6(e^{0.4} - 1) \quad (۲) \quad 10^6(e^{0.28} - 1) \quad (۱)$$

$$10^6((1.04)^{48} - 1) \quad (۴) \quad 10^6((1.04)^4 - 1) \quad (۳)$$

(حسابداری - ۸۳)

«حد و پیوستگی»

۱۸- حد عبارت $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-2} \right)^{2x+1}$ برابر است با:

$$e^6 \quad (۴) \quad e^2 \quad (۳) \quad e \quad (۲) \quad 1 \quad (۱)$$

(اقتصاد - ۸۳)

«مشتق»

۱۹- مشتق مرتبه دهم تابع $y = x \ln x$ برابر است با:

- (۱) $-10x^{-11}$ (۲) $9!x^{-10}$ (۳) $8!x^{-9}$ (۴) $10x^{-11}$
(اقتصاد - ۸۳)

۲۰- نرخ تغییر $\sqrt{x^2 + 8}$ نسبت به $\frac{x}{x+1}$ در نقطه $x = 1$ برابر است با:

- (۱) $\frac{1}{6}$ (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{4}{3}$ (۴) 6
(اقتصاد - ۸۳)

۲۱- اگر افزایش تولید اتومبیل نسبت به سال گذشته ۵ درصد و قیمت آن ۲ درصد افزایش داشته باشد، نرخ درآمد تولید کنندگان چند درصد است؟

- (۱) 10% (۲) 7% (۳) 3% (۴) 2.5%
(اقتصاد - ۸۳)

۲۲- کمترین و بیشترین مقدار تابع $f(x) = 4x - x^2$ در فاصله $[-2, 2]$ کدام است؟

- (۱) $3, -2$ (۲) صفر و ۳ (۳) 4 و -24 (۴) 24 و -3
(اقتصاد - ۸۳)

۲۳- در کدام فاصله تابع $y = x^2 e^x + 3e^x$ محدب و خارج آن مقعر است؟

- (۱) R (۲) R^+ (۳) $[0, \infty)$ (۴) $(-\infty, 0)$
(اقتصاد - ۸۳)

۲۴- تابع هزینه کل به صورت $TC = x^2 + 6x + 9$ (x مقدار تولید)، به ازای چه مقداری از تولید، هزینه نهایی و متوسط با هم برابرند؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۶
(اقتصاد - ۸۳)

۲۵- اگر تابع تقاضا $y = 16 - x$ و هزینه کل $TC = x^2 + 8$ باشد که در آن x مقدار و y قیمت است، به ازای چه مقدار از تولید سود بنگاه ماکزیم است؟

- (۱) ۴ (۲) ۶ (۳) ۸ (۴) ۱۰
(اقتصاد - ۸۳)

۲۶- اگر داشته باشیم $y = u^2 + 4$ و $u = \frac{x+3}{x}$ و $x = \frac{1}{t} - t + 3$ ، در این صورت y'_t در $t = 1$ برابر است با:

- (۱) $\frac{14}{9}$ (۲) $\frac{5}{3}$ (۳) $\frac{8}{3}$ (۴) $\frac{7}{3}$
(مدیریت - ۸۳)

۲۷- اگر داشته باشیم $y_1 = e^x$ و $y_2 = x + 1$ ، $x \in \mathbb{R}$ ، کدام رابطه صحیح است؟

- (۱) $y_1 > y_2$ (۲) $y_1 \geq y_2$ (۳) $y_1 < y_2$ (۴) $y_1 \leq y_2$

(مدیریت - ۸۳)

۲۸- طول نقطه عطف $y = x^2 e^x$ کدام است؟

- (۱) $-4 \pm \sqrt{2}$ (۲) $-2 \pm \sqrt{2}$ (۳) $-1 \pm \sqrt{2}$ (۴) $2 \pm \sqrt{2}$

(مدیریت - ۸۳)

۲۹- اگر داشته باشیم $x^2 - 3xy + 2y^2 = 0$ و در نقطه $x = y = 1$ مقدار dy برابر کدام است؟

- (۱) dx (۲) $-dx$ (۳) $2dx$ (۴) $-2dx$

(حسابداری - ۸۳)

۳۰- اگر داشته باشیم $y = \sqrt{u+2}$ ، $x = \sqrt{t}$ ، $u = \sqrt{x+3}$ ، مقدار y' بازای $t = 1$ برابر است با:

- (۱) $\frac{1}{48}$ (۲) $\frac{1}{24}$ (۳) $\frac{1}{16}$ (۴) 1

(حسابداری - ۸۳)

۳۱- تابع $y = \ln \frac{x}{x+1}$ در فاصله $[1, 2]$ چگونه است؟

- (۱) محدب (۲) مقعر (۳) نزولی اکید (۴) شامل نقطه عطف

(حسابداری - ۸۳)

۳۲- نقطه بحرانی تابع $y = x \ln x$ به کدام صورت است؟

- (۱) $x = e$ ماکزیمم (۲) $x = -e$ می‌نیمم
(۳) $x = e^{-1}$ می‌نیمم (۴) $x = -e^{-1}$ ماکزیمم

(حسابداری - ۸۳)

«انتگرال»

۳۳- اگر تابع هزینه نهایی $MC = 2x \ln(x+1)$ و هزینه ثابت $FC = 10$ باشد هزینه کل بازای $x = 2$ کدام است؟

- (۱) $2 \ln 3 + 10$ (۲) $3 \ln 3 + 10$
(۳) $5 \ln 3 + 10$ (۴) $4 \ln 3 + 10$

(اقتصاد - ۸۳)

۳۴- مقدار انتگرال $I = \int_1^9 \frac{dx}{\sqrt{x}(x-1)}$ کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۵ (۳) $\ln \frac{2}{3}$ (۴) $\ln \frac{3}{2}$ (اقتصاد - ۸۳)

۳۵- مقدار انتگرال $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 x + x^2) dx$ برابر است با:

- (۱) صفر (۲) $\frac{\pi}{2}$ (۳) $\frac{\pi^2}{4} + \frac{1}{4}$ (۴) $\frac{\pi^2}{4} - \frac{1}{4}$ (اقتصاد - ۸۳)

۳۶- اگر تابع عرضه $y = x^2 + 1$ و قیمت تعادلی $y_e = 10$ باشد. مقدار مازاد عرضه‌کننده کدام است؟

- (۱) ۱۲ (۲) ۱۶ (۳) ۱۸ (۴) ۲۰ (اقتصاد - ۸۳)

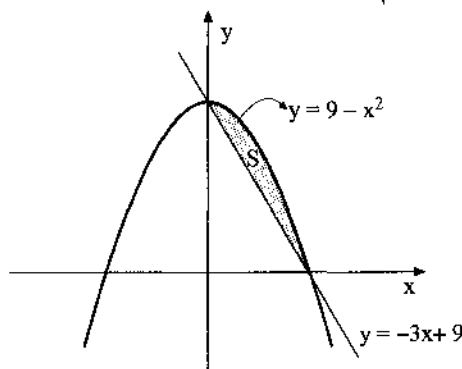
۳۷- اگر داشته باشیم $I(x) = \int \frac{1}{x^2} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} dx$ ، به ازای $c = 0$ (ثابت انتگرال‌گیری) $I(1)$ کدام است؟

- (۱) $+\frac{4\sqrt{2}}{3}$ (۲) $+\frac{2\sqrt{2}}{3}$ (۳) $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ (۴) $-\frac{4\sqrt{2}}{3}$ (مدیریت - ۸۳)

۳۸- مقدار انتگرال $I = \int_1^2 x \ln x dx$ برابر است با:

- (۱) $\ln 2 - 2$ (۲) $\ln 2 - 1$ (۳) $2 \ln 2 - \frac{3}{4}$ (۴) $2 \ln 2 - \frac{1}{4}$ (مدیریت - ۸۳)

۳۹- مساحت S ، در شکل داده شده کدام است؟



- (۱) ۴
(۲) $\frac{14}{3}$
(۳) $\frac{4}{5}$
(۴) $\frac{16}{3}$

(مدیریت - ۸۳)

۴۰- اگر $I(x) = \int x^2 \sqrt{x^2 + 1} dx$ مقدار $I(2) - I(-1)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{10}{3}$ (۲) ۴ (۳) $\frac{16}{3}$ (۴) ۶ (حسابداری - ۸۳)

۴۱- مقدار انتگرال $I = \int_0^1 x e^{-x} dx$ کدام است؟

$$1 - \frac{2}{e} \quad (۴)$$

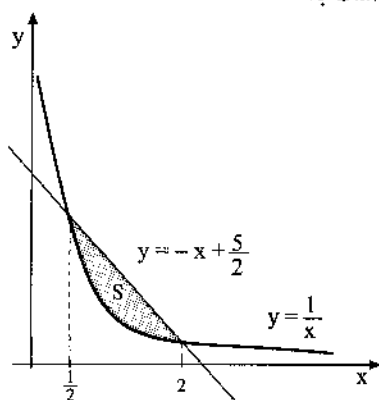
(حسابداری - ۸۳)

$$\frac{2}{e} \quad (۳)$$

$$e - 1 \quad (۲)$$

$$e \quad (۱)$$

۴۲- مساحت S از شکل داده شده برابر است با:



(حسابداری - ۸۳)

$$\frac{3}{4} - \ln 2 \quad (۱)$$

$$\frac{7}{8} - \ln 2 \quad (۲)$$

$$\frac{9}{8} - 2 \ln 2 \quad (۳)$$

$$\frac{15}{8} - 2 \ln 2 \quad (۴)$$

«ماتریس»

$$۴۳- مقدار دترمینان $|A|$ برابر است با:
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$$$

$$5 \quad (۴)$$

$$4 \quad (۳)$$

$$1 \quad (۲)$$

$$\text{صفر} \quad (۱)$$

(اقتصاد - ۸۳)

$$۴۴- مرتبه (Rank) ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & -2 & 8 & 6 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ کدام است؟$$

$$4 \quad (۴)$$

$$3 \quad (۳)$$

$$2 \quad (۲)$$

$$1 \quad (۱)$$

(اقتصاد - ۸۳)

$$۴۵- اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، $A^{-1}B^{-1}$ کدام است؟$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \quad (۴)$$

(اقتصاد - ۸۳)

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \quad (۳)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \quad (۲)$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \quad (۱)$$

۴۶- یکی از ریشه‌های معادله مفسر ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ کدام است؟ در صورتی که دو ریشه دیگر آن $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ باشد.

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴ (اقتصاد - ۸۳)

۴۷- مقدار x از معادله $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$ برابر است با:

- (۱) ۲ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) ۱ (۴) $\frac{2}{3}$ (مدیریت - ۸۳)

۴۸- اگر داشته باشیم $A^2 = 0$ ، الزاماً ماتریس A کدام است؟

- (۱) معکوس ناپذیر (۲) صفر (۳) بالا مثلثی (۴) شبه متقارن (مدیریت - ۸۳)

۴۹- در دستگاه $AX = B$ اگر $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ ، $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ آنگاه $x + y$ کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۹ (مدیریت - ۸۳)

۵۰- اگر داشته باشیم $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ ، در ماتریس الحاقی $(aolj A)$ مجموع عناصر روی قطر کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) صفر (۳) ۱ (۴) ۲ (مدیریت - ۸۳)

۵۱- مقدار x از معادله $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) ۲ (حسابداری - ۸۳)

۵۲- اگر داشته باشیم $A^2 = A$ ، آنگاه A کدام ماتریس است؟

- (۱) همقوه (۲) برگردان (۳) شبه متقارن (۴) بی‌اثر در جمع (حسابداری - ۸۳)

۵۳- اگر داشته باشیم $AX = B$ ، $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ ، $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ، مقدار $x - y$ کدام است؟

$$(۱) -۴ \quad (۲) -۳ \quad (۳) ۲ \quad (۴) ۴$$

(حسابداری - ۸۳)

۵۴- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ ، آنگاه مجموع^۲ عناصر قطری ماتریس A^T یعنی $Tr(A^T)$ کدام است؟

$$(۱) ۱۲ \quad (۲) ۱۶ \quad (۳) ۱۸ \quad (۴) ۳۶$$

(حسابداری - ۸۳)

«بردار، خط و صفحه»

۵۵- اگر بردارهای $\vec{a}(1, 2, 3)$ ، $\vec{b}(2, 1, 1)$ و $\vec{c}(x, y, z)$ وابسته باشند، چه رابطه‌ای بین x و y و z برقرار است؟

$$\begin{aligned} (۱) \quad x - 5y + 3z &= 0 \\ (۲) \quad x + 2y - z &= 0 \\ (۳) \quad 2x - y + z &= 0 \\ (۴) \quad 3x + y - 2z &= 0 \end{aligned}$$

(اقتصاد - ۸۳)

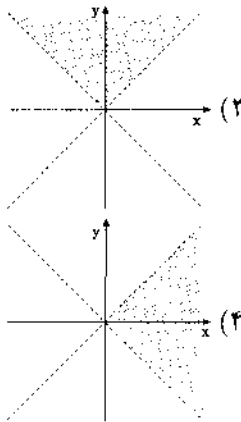
۵۶- خطی از محل تلاقی صفحه $2x + 4y + 4z = 8$ با محور x ‌ها گذشته و بر همین صفحه عمود است، معادله این خط کدام است؟

$$\begin{aligned} (۱) \quad \frac{x-8}{2} &= \frac{y}{4} = \frac{z-1}{4} \\ (۲) \quad \frac{x}{2} &= \frac{y}{1} = \frac{z}{3} \\ (۳) \quad \frac{x-4}{2} &= \frac{y}{1} = \frac{z}{-2} \\ (۴) \quad \frac{x-4}{2} &= \frac{y}{1} = \frac{z}{2} \end{aligned}$$

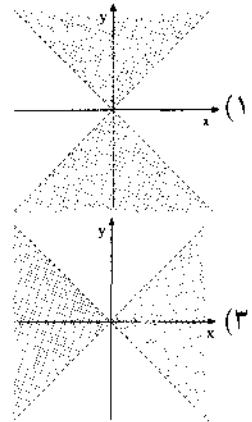
(اقتصاد - ۸۳)

«توابع چند متغیره»

۵۷- تابع $f: R^2 \rightarrow R$ به معادله $z = \sqrt{\frac{x+y}{x-y}}$ داده شده است، شکل دامنه تابع f کدام است؟



(اقتصاد - ۸۳)



۵۸- حد تابع $z = \frac{x^2 + y^2}{xy}$ در نقطه $(0, 0)$ در امتداد $y = 2x$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) ۱ (۴) $\frac{5}{2}$

(اقتصاد - ۸۳)

۵۹- اگر داشته باشیم $z = \ln(x_1 + x_2 + x_3)$ باشد مقدار $\ln \frac{\partial z}{\partial x_1} + \ln \frac{\partial z}{\partial x_2} + \ln \frac{\partial z}{\partial x_3}$ کدام است؟

- (۱) $-3z$ (۲) $3z$ (۳) $3 \ln z$ (۴) $-3 \ln z$

(اقتصاد - ۸۳)

۶۰- وضعیت تابع $z = x^2 + 2xy + 4y^2 + x - 2y$ از لحاظ تقعر و تحدب کدام است؟

- (۱) اکیداً مقعر (۲) اکیداً محدب
(۳) ابتدا محدب، سپس مقعر (۴) ابتدا مقعر، سپس محدب

(اقتصاد - ۸۳)

۶۱- اگر داشته باشیم $x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xy - 6 = 0$ ، مقدار دیفرانسیل z یعنی (dz) در نقطه $(1, 1, 1)$ ، کدام است؟

- (۱) $2dx - 4dy$ (۲) $2dx - 3dy$ (۳) $-2dx - 4dy$ (۴) $2dx + 2dy$

(اقتصاد - ۸۳)

۶۲- در تابع $z = x^2 + xy + y^2$ نقطه بحرانی کدام است؟

- (۱) $(1, 1, 3)$ می نیمم (۲) $(0, 0, 0)$ ماکزیمم (۳) $(0, 0, 0)$ می نیمم (۴) $(0, 0, 0)$ زینی

(اقتصاد - ۸۳)

۶۳- اگر تابع مطلوبیت مصرف کننده $u = 4q_1q_2$ و خط بودجه $q_1 + q_2 = 10$ باشد، مقدار ماکزیمم مطلوبیت کدام است؟

- (۱) ۱۰۰ (۲) ۲۰۰ (۳) ۳۰۰ (۴) ۴۰۰ (اقتصاد - ۸۳)

۶۴- اگر تابع $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ به معادله $z = \frac{e^x - e^y}{e^x + e^y}$ باشد، برد این تابع کدام است؟

- (۱) $\mathbb{R}$ (۲) $(-1, 1)$ (۳) $[-1, 1]$ (۴) $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ (مدیریت - ۸۳)

۶۵- اگر داشته باشیم، $z = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ ، در نقطه $(2, 1)$ ، کدام است؟

- (۱) $\frac{16}{125}$ (۲) $\frac{24}{125}$ (۳) $\frac{32}{125}$ (۴) $\frac{48}{125}$ (مدیریت - ۸۳)

۶۶- اگر تابع $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ، به معادله $z = \sqrt{1 - x^2 - 2y^2}$ فرض شود دامنه این تابع کدام است؟

- (۱) $\mathbb{R}^+$ (۲) $\mathbb{R}^2$ (۳) $-\infty < x, y < +\infty$ (۴) $x^2 + 2y^2 \leq 1$ (مدیریت - ۸۳)

۶۷- اگر داشته باشیم $\begin{cases} z = u^2 + v^2 \\ u = x^2 - y^2 \\ v = \frac{x}{y} \end{cases}$ در این صورت $\frac{\partial z}{\partial x}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{2ux}{y}$ (۲) $2ux + \frac{2v}{y}$ (۳) $2ux - 2vy$ (۴) $(2u + 2v)(2x - \frac{1}{y})$ (مدیریت - ۸۳)

۶۸- نقطه بحرانی تابع $z = x^2 - 6xy + 6y^2 + 4x$ کدام است؟

- (۱) $x = 4, y = 2$ (۲) $x = 1, y = 2$ (۳) $x = 2, y = 4$ (۴) $x = 2, y = 1$ (مدیریت - ۸۳)

۶۹- در تابع $z = x^2 + 4xy + 2y^2 - 4x - 6y$ ، وضعیت نقطه بحرانی چگونه است؟

- (۱) ماکزیمم مطلق (۲) ماکزیمم نسبی (۳) می‌نیمم مطلق (۴) زینی (مدیریت - ۸۳)

۷۰- در تابع $z = x^2 - y^2 - 8xy$ ، حاصل dz کدام است؟

- (۱) $dx^2 - 16dxdy - 2dy^2$ (۲) $dx^2 - 8dxdy - dy^2$

$$2dx^2 + 8dxdy - 2dy^2 \quad (۴)$$

$$2dx^2 - 16dxdy - 2dy^2 \quad (۳)$$

(مدیریت - ۸۳)

۷۱- ماکسیم مقدار تابع دو متغیری $Z = x^2 + 2xy$ با شرط $x + y = 12$ کدام است؟

$$۵۴ \quad (۴)$$

$$۴۸ \quad (۳)$$

$$۳۶ \quad (۲)$$

$$۲۴ \quad (۱)$$

(مدیریت - ۸۳)

۷۲- اگر تابع $f: R^1 \rightarrow R$ به معادله $Z = \frac{2x^2 - y^2}{2x^2 + y^2}$ باشد، برد تابع کدام است؟

$$R^+ \cup \{0\} \quad (۴)$$

$$(-1, 1) \quad (۳)$$

$$[-1, 1] \quad (۲)$$

$$R \quad (۱)$$

(حسابداری - ۸۳)

۷۳- در تابع دو متغیری $Z = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ مقدار $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ در نقطه $(1, 1)$ ، کدام است؟

$$۱ \quad (۴)$$

$$\frac{1}{\lambda} \quad (۳)$$

$$-\frac{1}{\lambda} \quad (۲)$$

$$-۱ \quad (۱)$$

(حسابداری - ۸۳)

۷۴- اگر تابع $f: R^2 \rightarrow R$ به معادله $Z = \sqrt{\frac{x}{y}}$ فرض شود دامنه این تابع کدام است؟

$$R^+ \cup \{0\} \quad (۲)$$

$$R^2 \quad (۱)$$

$$-\infty < x, y < +\infty \quad (۴)$$

$$\frac{x}{y} \geq 0 \quad (۳)$$

(حسابداری - ۸۳)

۷۵- اگر داشته باشیم
$$\begin{cases} Z = u^2 - V^2 \\ u = x^2 + y^2 \\ V = \frac{x}{y} \end{cases}$$
 آنگاه، $\frac{\partial z}{\partial y}$ کدام است؟

$$4uy - \frac{2Vx}{y^2} \quad (۲)$$

$$-\frac{4ux}{y^2} \quad (۱)$$

$$(2u - 2V)(2xy - \frac{x}{y^2}) \quad (۴)$$

$$4uy + \frac{2Vx}{y^2} \quad (۳)$$

(حسابداری - ۸۳)

۷۶- در تابع $Z = x^2 + 4xy + 2y^2 - 4x - 6y$ ، مختصات نقطه بحرانی کدام است؟

$$(1, 2) \quad (۴)$$

$$(\frac{1}{2}, 1) \quad (۳)$$

$$(1, \frac{1}{2}) \quad (۲)$$

$$(2, 1) \quad (۱)$$

(حسابداری - ۸۳)

۷۷- در تابع $Z = x^2 - y^2 + 6x + 4y$ مقدار $d^2 Z$ کدام است؟

$$2d^2 x - 2d^2 y \quad (۴)$$

$$2dx^2 - 2dy^2 \quad (۳)$$

$$d^2 x - d^2 y \quad (۲)$$

$$4dxdy \quad (۱)$$

(حسابداری - ۸۳)

۷۸- در تابع $Z = x^2 - 6xy + 6y^2 + 4x$ ، نقطه بحرانی کدام نوع است؟

- (۱) زینی (۲) ماکزیمم نسبی (۳) می نیمم نسبی (۴) می نیمم مطلق
(حسابداری - ۸۳)

«معادلات دیفرانسیل»

۷۹- اگر داشته باشیم $y' = \frac{2xy}{x^2 + 1}$ ، معادله تابع کدام است؟ در صورتی که این تابع از نقطه $(1, 0)$ بگذرد.

- (۱) $y = x^2 + 1$ (۲) $y = x + 1$ (۳) $y = 2x + 1$ (۴) $y = 2x^2 + 1$
(اقتصاد - ۸۳)

«مختصات قطبی، اعداد مختلط»

۸۰- کدام یک از اعداد زیر ریشه های پنجم عدد (-1) نمی باشد؟

- (۱) $\cos \frac{7\pi}{5} + i \sin \frac{7\pi}{5}$ (۲) $\cos \frac{9\pi}{5} + i \sin \frac{9\pi}{5}$
(۳) $\cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5}$ (۴) $\cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5}$

(اقتصاد - ۸۳)

پاسخ تشریحی

سؤالات ریاضیات آزمون‌های کارشناسی ارشد

سال ۸۳

۱- گزینه ۲. هرگاه تکرار n چیز، که یافتن تعداد ترکیب‌های آن مورد نظر است، در پیکره آن ترکیب‌ها هم مجاز باشد، ترکیب با تکرار پدید می‌آید. فرمول ترکیب با تکرار n چیز r به r به صورت C_{n-1+r}^r است.

$$C_{2-1+2}^2 = C_2^2 = \frac{2!}{2!0!} = 1$$

۲- گزینه ۴.

$$C_{3-1+3}^3 = C_5^3 = \frac{5!}{3!2!} = 10$$

۳- گزینه ۴.

$$\text{مجموع ضرایب بسط} = (1+1+1)^3 = 3^3 = 27$$

۴- گزینه ۴.

$$A \subset B \subset C \implies \begin{cases} A \cup B = B \\ B \cap C = B \end{cases}$$

$$(A \cup B) \cap C - A \cap B = (\underbrace{A \cup B}_B) \cap (\underbrace{C \cap B}_B) \cap A' = B \cap A'$$

۵- گزینه ۱.

$$n(M \cap A) = n(M) + n(A) - n(M \cup A) = 30 + 20 - 10 = 40$$

۶- گزینه ۱.

$$y = \ln\left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right) \Rightarrow \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = e^y \Rightarrow e^x = \frac{1 + e^y}{1 - e^y} \Rightarrow x = \ln\left(\frac{1 + e^y}{1 - e^y}\right)$$

$$\frac{1 + e^y}{1 - e^y} > 0, \quad 1 + e^y > 0 \Rightarrow 1 - e^y > 0; \quad 1 - e^y = 0 \Rightarrow y = 0$$

$$\frac{y}{1 - e^y} \left| \begin{array}{ccc} -\infty & 0 & +\infty \\ & + & \infty - \end{array} \right. \Rightarrow R_f = (-\infty, 0)$$

۷- گزینه ۳.

۸- گزینه ۳.

$$y = \ln\left(\frac{1 - e^x}{1 + e^x}\right) \Rightarrow \frac{1 - e^x}{1 + e^x} = e^y \Rightarrow e^x = \frac{1 - e^y}{1 + e^y} \Rightarrow x = \ln\left(\frac{1 - e^y}{1 + e^y}\right)$$

$$\frac{1 - e^y}{1 + e^y} > 0, \quad 1 + e^y > 0 \Rightarrow 1 - e^y > 0; \quad 1 - e^y = 0 \Rightarrow y = 0$$

$$\frac{y}{1 - e^y} \left| \begin{array}{ccc} -\infty & 0 & +\infty \\ & + & 0 - \end{array} \right. \Rightarrow R_f = (-\infty, 0)$$

۹- گزینه ۴.

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x \Rightarrow f^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$f^{-1}(2) = \ln(2 + \sqrt{2^2 + 1}) \ln(2 + \sqrt{5})$$

۱۰- گزینه ۲.

$$g(2) = \ln 2, \quad f \circ g(2) = f(\ln 2) = \frac{e^{\ln 2} - 1}{e^{\ln 2} + 1} = \frac{2 - 1}{2 + 1} = \frac{1}{3}$$

۱۱- گزینه ۱.

$$TC = 100x + 100000, \quad TR = 120x$$

$$\pi = TR - TC = 120x - 100x - 100000 = 20x - 100000$$

$$100000 = 20x - 100000 \Rightarrow 20x = 200000 \Rightarrow x = 10000$$

۱۲۔ گزینہ ۱.

$$I(t) = I(0)e^{rt} \Rightarrow 1500000 = 1000000e^{rt} \Rightarrow 1/5 = e^{rt}$$

$$\Rightarrow \ln(1/5) = rt \ln e \Rightarrow r = \frac{1}{t} \ln 1/5$$

۱۳۔ گزینہ ۴.

$$\frac{1 - 2e^x}{1 + e^x} > 0 \Rightarrow 1 - 2e^x > 0, \quad 1 - 2e^x = 0 \Rightarrow e^x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \ln \frac{1}{2} = -\ln 2$$

x	$-\ln 2$
$\frac{1 - 2e^x}{1 + e^x}$	$+$ 0 $-$

$$\Rightarrow D_f = (-\infty, -\ln 2)$$

۱۴۔ گزینہ ۱.

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \coth x \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right)$$

$$f^{-1}(2) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{2+1}{2-1} \right) = \frac{1}{2} \ln 3$$

۱۵۔ گزینہ ۳.

$$g(2) = \ln 2, \quad f \circ g(2) = f(\ln 2) = \frac{2e^{\ln 2} - 1}{e^{\ln 2} + 1} = \frac{2 - 1}{2 + 1} = \frac{1}{3}$$

۱۶۔ گزینہ ۱.

$$TC = 200000 + 100x \quad TR = 120x$$

$$TR = TC \Rightarrow 120x = 200000 + 100x \Rightarrow 20x = 200000 \Rightarrow x = 10000$$

۱۷۔ گزینہ ۲.

$$\text{سود} = A(0)e^{rt} - A(0) = A(0)(e^{rt} - 1) = 10^8(e^{0.1 \times 5} - 1) = 10^8(e^{0.5} - 1)$$

۱۸۔ گزینہ ۴.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-2} \right)^{x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-2+3}{x-2} \right)^{x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x-2} \right)^{x+1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x-2} \right)^{x-2} \left(1 + \frac{3}{x-2} \right)^3 = e^{3 \times 1} \times 1 = e^3$$

۱۹- گزینه ۳.

$$y = x \ln x \Rightarrow y' = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1 \Rightarrow y'' = \frac{1}{x}$$

مشتق هشتم تابع y'' همان مشتق مرتبه دهم تابع y است.

$$y^{(8)} = \frac{(-1)^{8-1} 8! (0-1)}{x^{8+1}} = \frac{8!}{x^9} = 8! x^{-9}$$

۲۰- گزینه ۳.

$$\frac{x}{x+1} \text{ نسبت به } \sqrt{x^2+8} \text{ نرخ تغییر} = \frac{\frac{1}{2} \frac{2x}{\sqrt{x^2+8}}}{\frac{x+1-x}{(x+1)^2}} = \frac{x(x+1)^2}{\sqrt{x^2+8}} \xrightarrow{x=1} = \frac{4}{3}$$

۲۱- گزینه ۲.

$$TR = p \cdot x \Rightarrow \frac{\Delta TP}{TR} = \frac{\Delta p}{p} + \frac{\Delta x}{x} \Rightarrow TR = \dot{p} + \dot{x} = \%2 + \%5 = \%7$$

۲۲- گزینه ۴.

$$f(x) = 4x - x^2 \Rightarrow f'(x) = 4 - 2x^2$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 4(1 - x^2) = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$\begin{array}{c|ccc} x & -2 & 1 & 2 \\ \hline f(x) & -24 & 3 & -8 \end{array} \Rightarrow \min = -24, \max = 3$$

۲۳- گزینه ۱.

$$y = x^2 e^x + 3e^x \Rightarrow y' = 2xe^x + x^2 e^x + 3e^x = (2x + x^2 + 3)e^x$$

$$\Rightarrow y'' = (2 + 2x)e^x + (2x + x^2 + 3)e^x$$

$$\Rightarrow y'' = \underbrace{(x^2 + 4x + 5)}_{\Delta < 0, a > 0} e^x > 0$$

۲۴- گزینه ۲.

$$TC = x^2 + 6x + 9 \Rightarrow MC = \frac{dTC}{dx} = 2x + 6; AC = \frac{TC}{x} = x + 6 + \frac{9}{x}$$

$$MC = AC \Rightarrow 2x + 6 = x + 6 + \frac{9}{x} \Rightarrow x - \frac{9}{x} = 0 \Rightarrow x = 3$$

۲۵- گزینه ۱.

$$TR = x.y = 16x - x^2$$

$$\pi = TR - TC = 16x - x^2 - x^2 - 8 = -2x^2 + 16x - 8$$

$$\pi' = 0 \Rightarrow -4x + 16 = 0 \Rightarrow x = 4$$

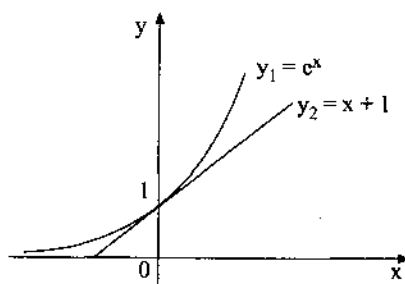
۲۶- گزینه ۳.

$$y'_t = y'_u \cdot u'_x \cdot x'_t = 2u \cdot \frac{x - x - 2}{x^2} \cdot -\frac{1}{t^2} - 1 = 2u \cdot \frac{-2}{x^2} \cdot -\frac{1}{t^2} - 1$$

$$t = 1 \Rightarrow x = 2; u = 2; y = 8$$

$$y'_{t=1} = 2(2) \cdot \frac{-2}{4} \cdot -1 = \frac{8}{2}$$

۲۷- گزینه ۲.



۲۸- گزینه ۲.

$$y = x^2 e^x \Rightarrow y' = 2x e^x + x^2 e^x = (2x + x^2) e^x$$

$$\Rightarrow y'' = (2 + 2x) e^x + (2x + x^2) e^x$$

$$\Rightarrow y'' = (x^2 + 4x + 2) e^x = 0, \quad e^x > 0$$

$$\Rightarrow x^2 + 4x + 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4}}{2} = -2 \pm \sqrt{2}$$

۲۹- گزینه ۱.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x - 2y}{-2x + 2y} \Rightarrow dy = \frac{2y - 2x}{2y - 2x} dx$$

$$x = y = 1 \Rightarrow dy = \frac{2 - 2}{2 - 2} dx \Rightarrow dy = dx$$

۳۰- گزینه ۱.

$$t = 1 \Rightarrow x = 1 ; u = 2 ; y = 2$$

$$y'_t = y'_u \cdot u'_x \cdot x'_t = \frac{1}{2\sqrt{u+2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x+2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$y'_{t=1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

۳۱- گزینه ۲.

$$y = \ln \frac{x}{x+1} \Rightarrow y' = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x^2+x}$$

$$\Rightarrow y'' = \frac{-2x-1}{(x^2+x)^2} ; y'' = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

x	$-\frac{1}{2}$
y''	$+ \quad 0 \quad -$
y	محدب مقعر

۳۲- گزینه ۳.

$$y = x \ln x \Rightarrow y' = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$$

$$y' = 0 \Rightarrow \ln x + 1 = 0 \Rightarrow \ln x = -1 \Rightarrow x = e^{-1} \quad \text{نقطه بحرانی}$$

$$y'' = f''(x) = \frac{1}{x} ; f''(e^{-1}) = \frac{1}{e^{-1}} = e > 0 \quad \text{نوع نقطه بحرانی مینیمم}$$

۳۳- گزینه ۲.

$$TC = \int MC dx = \int 2x \ln(x+1) dx$$

$$\begin{cases} u = \ln(x+1) \\ du = \frac{1}{x+1} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = \frac{1}{x+1} dx \\ u = x^2 \end{cases}$$

$$TC = x^2 \ln(x+1) - \int \frac{x^2}{x+1} dx = x^2 \ln(x+1) - \int (x-1 + \frac{1}{x+1}) dx$$

$$TC = x^2 \ln(x+1) - \frac{1}{2} x^2 + x - \ln(x+1) + c$$

$$FC = TC(0) \Rightarrow 10 = 0 + c \Rightarrow c = 10$$

$$TC(2) = 2 \ln 3 - \frac{1}{2} + 2 - \ln 3 + 10 = 2 \ln 3 + 10$$

۳۴- گزینه ۴.

$$u = \sqrt{x} \Rightarrow du = \frac{dx}{2\sqrt{x}} \Rightarrow 2du = \frac{dx}{\sqrt{x}} ; u^2 = x$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(x-1)} = \int \frac{2du}{u^2-1} = -2 \int \frac{du}{1-u^2} = -2 \times \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+u}{1-u} \right| + c$$

$$I = \int_2^4 \frac{dx}{\sqrt{x}(x-1)} = -\ln \left| \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} \right| \Big|_2^4 = -\left(\ln \left| \frac{1+2}{1-2} \right| - \ln \left| \frac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} \right| \right)$$

$$= -(\ln 2 - \ln 2) = \ln 2 - \ln 2 = \ln \frac{2}{2}$$

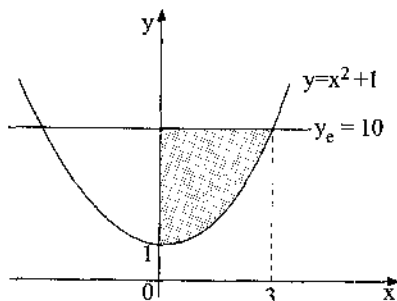
۳۵- گزینه ۱.

$$f(x) = \sin^r x + x^r ; f(-x) = \sin^r(-x) + (-x)^r = -(\sin^r x + x^r) = -f(x)$$

بنابراین $f(x)$ تابعی فرد است، می‌دانیم:

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0 \Rightarrow \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin^r x + x^r) dx = 0$$

۳۶- گزینه ۳.



$$y = y_e \Rightarrow x^2 + 1 = 10 \Rightarrow x = 3$$

$$\text{مازاد عرضه کنند} = \int_0^3 (10 - x^2 - 1) dx = \int_0^3 (9 - x^2) dx$$

$$= \left(9x - \frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_0^3 = 27 - 9 = 18$$

۳۷- گزینه ۳.

$$u = \frac{1}{x^2} \Rightarrow du = \frac{-2dx}{x^3} \Rightarrow -\frac{1}{2} du = \frac{dx}{x^3}$$

$$I(u) = -\frac{1}{2} \int \sqrt{1+u} du = -\frac{1}{2} \int (1+u)^{\frac{1}{2}} du = -\frac{(1+u)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c$$

$$I(x) = -\frac{\sqrt{(1+\frac{1}{x^2})^3}}{\frac{3}{2}} + c \Rightarrow I(1) = -\frac{\sqrt{2}}{\frac{3}{2}} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

۳۸- گزینه ۳.

$$\begin{cases} u = \ln x \\ dv = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = \frac{1}{2}x^2 \end{cases}$$

$$I = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{2} \int x dx = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + c$$

$$I = \int_1^2 x \ln x dx = (2 \ln 2 - 1) - (0 - \frac{1}{4}) = 2 \ln 2 - \frac{3}{4}$$

۳۹- گزینه ۳.

$$\begin{cases} y = 4 - x^2 \\ y = -3x + 4 \end{cases} \Rightarrow 4 - x^2 = -3x + 4 \Rightarrow x^2 - 3x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$$

$$S = \int_0^3 (4 - x^2 + 3x - 4) dx = \int_0^3 (-x^2 + 3x) dx = \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} \right) \Big|_0^3$$

$$S = \left(-9 + \frac{27}{2} \right) - (0) = \frac{9}{2} = 4,5$$

۴۰- گزینه ۴.

$$u = x^2 + 1 \Rightarrow du = 2x dx \Rightarrow \frac{du}{2} = x dx$$

$$I(x) = \int x^2 \sqrt{x^2 + 1} dx \Rightarrow I(u) = \frac{1}{2} \int \sqrt{u} du = \frac{1}{2} \times \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3} \sqrt{u^3}$$

$$I(x) = \frac{1}{3} \sqrt{(x^2 + 1)^3} \Rightarrow I(2) - I(-1) = \frac{1}{3} \sqrt{9^3} - \frac{1}{3} \sqrt{0} = 9$$

۴۱- گزینه ۴.

$$\begin{cases} u = x \\ dv = e^{-x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -e^{-x} \end{cases}$$

$$I = -xe^{-x} + \int e^{-x} dx = -xe^{-x} - e^{-x} + c$$

$$I = \int_0^1 xe^{-x} dx = (-e^{-1} - e^{-1}) - (0 - e^0) = -2e^{-1} + 1 = 1 - \frac{2}{e}$$

۴۲- گزینه ۲.

$$S = \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(-x + \frac{5}{2} - \frac{1}{x}\right) dx = \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{5}{2}x - \ln x\right) \Big|_{\frac{1}{2}}^2$$

$$S = (-2 + 5 - \ln 2) - \left(-\frac{1}{8} + \frac{5}{4} - \ln \frac{1}{2}\right) = \frac{15}{8} - 2 \ln 2$$

۴۳- گزینه ۴. عملیات سطری $-R_1 + R_2, -R_1 + R_3, -2R_1 + R_2$ را انجام می‌دهیم

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

اکنون $|A|$ را نسبت به ستون اول بسط می‌دهیم:

$$|A| = \begin{vmatrix} -3 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (0 + 1 + 1) - (0 + 0 - 3) = 5$$

۴۴- گزینه ۲. سطر دوم، ۲ برابر سطر اول است:

$$(2 \ 4 \ -2 \ 8 \ 6) = 2(1 \ 2 \ -1 \ 4 \ 3)$$

لذا تعداد سطرهاى مستقل خطى برابر ۲ مى‌باشد. بنابراین مرتبه ماتریس برابر ۲ مى‌باشد.

۴۵- گزینه ۲.

$$A^{-1}B^{-1} = (BA)^{-1} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \right)^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \frac{1}{4-1} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

۴۶- گزینه ۴.

$$\begin{aligned}
 |A - \lambda I| = 0 &\Rightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \\
 &\Rightarrow [(2-\lambda)^2 + 1 + 1] - [(2-\lambda) + (2-\lambda) + (2-\lambda)] = 0 \\
 &\Rightarrow (2-\lambda)^2 + 2 - 3(2-\lambda) = 0
 \end{aligned}$$

$\lambda = 4$ در معادله فوق صدق می‌کند.

۴۷- گزینه ۲.

$$\begin{aligned}
 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 &\Rightarrow (-2 + x + 0) - (0 + 1 - x) = 0 \\
 &\Rightarrow -2 + x = 0 \Rightarrow x = 2
 \end{aligned}$$

۴۸- گزینه ۱.

۴۹- گزینه ۴.

$$\begin{aligned}
 A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} &\Rightarrow A = \frac{1}{1-4} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \\
 AX = B &\Rightarrow \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y = 2 \\ \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y = 1 \end{cases} \Rightarrow \\
 \begin{cases} -\frac{2}{3}x + \frac{4}{3}y = 4 \\ \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y = 1 \end{cases} &\Rightarrow y = 5, \quad x = 4 \Rightarrow x + y = 9
 \end{aligned}$$

۵۰- گزینه ۱.

$$A_{11} = (-1)^1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 ; A_{22} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 ; A_{33} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3$$

$$c \circ f.A = \begin{bmatrix} 1 & - & - \\ - & 1 & - \\ - & - & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{adj } A = \begin{bmatrix} 1 & - & - \\ - & 1 & - \\ - & - & -3 \end{bmatrix}$$

$$\text{مجموع عناصر قطری} = 1 + 1 - 3 = -1$$

۵۱- گزینه ۲.

$$(1 \ -1 \ 1) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow (1 \ 2 \ -1) \begin{pmatrix} x \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow x + 2 - 1 = 0 \Rightarrow x = -1$$

۵۲- گزینه ۱. به متن درس مراجعه شود.

۵۳- گزینه ۲.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow A = \frac{1}{3-4} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$AX = B \Rightarrow \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -3x + 2y = 2 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -3x + 2y = 2 \\ 4x - 2y = 2 \end{cases} \Rightarrow x = 4, y = 7 \Rightarrow x - y = -3$$

۵۴- گزینه ۳.

$$A^T = A \times A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & - & - \\ - & 6 & - \\ - & - & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow 6 + 6 + 6 = 18$$

ستون سوم $\times$ سطر سوم $= a_{33}$ ، ستون دوم $\times$ سطر دوم $= a_{22}$ ، ستون اول $\times$ سطر اول $= a_{11}$

۵۵- گزینه ۱.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (z + 6y + 2x) - (3x + y + 4z) = 0$$

$$\Rightarrow -x + 5y - 3z = 0 \Rightarrow x - 5y + 3z = 0$$

۵۶- گزینه ۳.

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow 2x = 8 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow (4, 0, 0)$$

محور x ها

چون خط بر صفحه عمود است. پس بردار نرمال صفحه همان بردار هادی خط است.

$$\vec{n} = \vec{v} = (2, 4, 4)$$

لذا

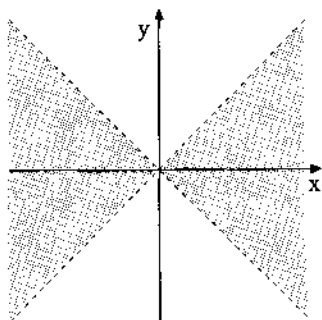
$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \Rightarrow \frac{x - 4}{2} = \frac{y - 0}{4} = \frac{z - 0}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{x - 4}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{2}$$

۵۷- گزینه ۳. $\frac{x+y}{x-y} \geq 0$ لذا نتیجه می شود:

$$\begin{cases} x + y \geq 0 \\ x - y > 0 \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} x + y \leq 0 \\ x - y < 0 \end{cases}$$

که نمودار آن ها به صورت زیر است:



۵۸- گزینه ۲.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{xy} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + 4x^2}{4x^2} = \frac{5}{4}$$

۵۹- گزینه ۱.

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = \frac{1}{x_1 + x_2 + x_3}; \quad \frac{\partial z}{\partial x_2} = \frac{1}{x_1 + x_2 + x_3}; \quad \frac{\partial z}{\partial x_3} = \frac{1}{x_1 + x_2 + x_3}$$

$$A = \ln \frac{\partial z}{\partial x_1} + \ln \frac{\partial z}{\partial x_2} + \ln \frac{\partial z}{\partial x_3} = \ln \left(\frac{\partial z}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial z}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial z}{\partial x_3} \right)$$

$$A = \ln \left(\frac{1}{x_1 + x_2 + x_3} \cdot \frac{1}{x_1 + x_2 + x_3} \cdot \frac{1}{x_1 + x_2 + x_3} \right) = \ln (x_1 + x_2 + x_3)^{-3}$$

$$A = -3 \ln(x_1 + x_2 + x_3) = -3z$$

۶۰- گزینه ۲. یک راه برای تعیین مقعر و محدب بودن تابع $z = f(x, y)$ استفاده از دترمینان‌های هشین است.

$$|H_1| > 0, \quad |H_2| > 0, \quad |H_3| > 0, \quad \dots \quad \text{شرط محدب}$$

$$|H_1| < 0, \quad |H_2| > 0, \quad |H_3| < 0, \quad \dots \quad \text{شرط مقعر}$$

لذا:

$$z_x = 2x + 2y + 1 \Rightarrow z_{xx} = 2, \quad z_{xy} = 2$$

$$z_y = 2x + 4y - 2 \Rightarrow z_{yy} = 4, \quad z_{yx} = 2$$

$$|H_1| = z_{xx} = 2 > 0, \quad |H_2| = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 12 > 0 \quad \text{محدب}$$

۶۱- گزینه ۲.

$$2x dx + 2y dy + 2z dz + 2y dx + 2x dy = 0$$

$$(1, 1, 1) \Rightarrow 2dx + 2dy + 2dz + 2dx + 2dy = 0$$

$$\Rightarrow 2dz = -4dx - 4dy \Rightarrow dz = -2dx - 2dy$$

۶۲- گزینه ۳.

$$\begin{cases} z_x = 0 \\ z_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 0 \\ -2x - 4y = 0 \end{cases} \Rightarrow (0, 0, 0)$$

$$|H_1| = z_{xx} = 2 > 0 ; |H_2| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0 \Rightarrow \min(0, 0, 0)$$

۶۳- گزینه ۱.

$$q_1 + q_2 = 10 \Rightarrow q_2 = 10 - q_1 ; u = 4q_1(10 - q_1) = 40q_1 - 4q_1^2$$

$$u' = 0 \Rightarrow 40 - 8q_1 = 0 \Rightarrow q_1 = 5, q_2 = 5$$

$$u = 4 \times 5 \times 5 = 100$$

 ۶۴- گزینه ۲. $2x^2 + y^2 > 0$ ، به ازای $x = 0$ کمترین مقدار z ، به ازای $y = 0$ بیشترین مقدار z به دست می‌آید

$$x = 0 \Rightarrow z = \frac{-y^2}{y^2} = -1 ; y = 0 \Rightarrow z = \frac{2x^2}{2x^2} = 1$$

$$R_z = [-1, 1]$$

۶۵- گزینه ۴.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x(x^2 + y^2) - 2x(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{4xy^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{4xy(x^2 + y^2)^2 - 4y(x^2 + y^2)(4xy)}{(x^2 + y^2)^4}$$

 در نقطه $(2, 1)$:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{16(5)^2 - 4(5)(8)}{(5)^4} = \frac{5(80 - 32)}{5^4} = \frac{48}{125}$$

۶۶- گزینه ۴.

$$1 - x^2 - 2y^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + 2y^2 \leq 1$$

۶۷- گزینه ۲.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = 2u \cdot 2x + 2v \cdot \frac{1}{y} = 4ux + \frac{2v}{y}$$

۶۸- گزینه ۱.

$$\begin{cases} Z_x = 0 \\ Z_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 6y + 4 = 0 \\ -6x + 12y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x - 18y = -12 \\ -6x + 12y = 0 \end{cases} \\ \Rightarrow y = 2, x = 4$$

۶۹- گزینه ۴.

$$\begin{cases} Z_x = 0 \\ Z_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 4y - 4 = 0 \\ 4x + 4y - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4x - 8y = -8 \\ 4x + 4y = 6 \end{cases} \\ \Rightarrow x = \frac{5}{4}$$

$$|H_1| = Z_{xx} = 2 > 0 ; |H_2| = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = -8 < 0 \Rightarrow \text{نقطه زینی است}$$

۷۰- گزینه ۳.

$$\begin{aligned} d^2z &= Z_{xx}dx^2 + 2Z_{xy}dxdy + Z_{yy}dy^2 = 2dx^2 + 2(-8)dxdy + (-2)dy^2 \\ &= 2dx^2 - 16dxdy - 2dy^2 \end{aligned}$$

۷۱- گزینه ۳.

$$2x + y = 12 \Rightarrow y = 12 - 2x ; Z = x^2 + 2x(12 - 2x) = -2x^2 + 24x$$

$$Z'_x = 0 \Rightarrow -4x + 24 = 0 \Rightarrow x = 4, y = 4$$

$$\max : Z = 4^2 + 2(4)(4) = 16 + 32 = 48$$

۷۲- گزینه ۲.

۷۳- گزینه ۱.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x(x^2 + y^2) - 2x(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{4xy^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{4y^2(x^2 + y^2)^2 - 4x(x^2 + y^2)(4xy^2)}{(x^2 + y^2)^4}$$

در نقطه (۱، ۱):

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{4(1)^2 - 4(1)(1)(4)}{(1)^4} = \frac{4 - 16}{1} = -1$$

۷۴- گزینه ۳.

$$\frac{x}{y} \geq 0$$

۷۵- گزینه ۳.

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = 2u \cdot 2x - 2v \cdot \frac{-x}{y^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 4ux + \frac{2vx}{y^2}$$

۷۶- گزینه ۲.

$$\begin{cases} Z_x = 0 \\ Z_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 4y - 4 = 0 \\ 4x + 4y - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x - 4y = -4 \\ 4x + 4y = 6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = 1, y = \frac{1}{2}$$

۷۷- گزینه ۳.

$$d^2 z = z_{xx} dx^2 + 2z_{xy} dx dy + z_{yy} dy^2 = 2 dx^2 + 2(0) dx dy + (-2) dy^2$$

$$= 2 dx^2 - 2 dy^2$$

۷۸- گزینه ۱.

$$\begin{cases} Z_x = 0 \\ Z_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 6y + 4 = 0 \\ -6x + 12y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x - 18y = -12 \\ -6x + 12y = 0 \end{cases} \\ \Rightarrow y = 2, x = 4$$

نوع نقطه بحرانی زینی است $|H_1| = z_{xx} = 2 > 0$; $|H_2| = \begin{vmatrix} 2 & -6 \\ -6 & 12 \end{vmatrix} = -12 < 0$

۷۹- گزینه ۱. این معادله یک معادله دیفرانسیل جدا می‌باشد. زیرا می‌توان نوشت:

$$(x^2 + 1)y' = 3xy \Rightarrow (x^2 + 1) \frac{dy}{dx} - 3xy = 0 \Rightarrow (x^2 + 1)dy - (3xy)dx = 0$$

$$\frac{2x}{1+x^2}dx - \frac{1}{y}dy = 0 \Rightarrow \ln(1+x^2) - \ln y = c \Rightarrow \ln \frac{x^2+1}{y} = c \Rightarrow$$

$$\frac{x^2+1}{y} = e^c \Rightarrow y = \frac{x^2+1}{c} \xrightarrow{(\cdot, 1)} 1 = \frac{1}{c} \Rightarrow c = 1 \Rightarrow y = x^2 + 1$$

۸۰- گزینه ۴.

$$z = -1; r = \sqrt{1+0} = 1; \tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{0}{1} = 0 \Rightarrow \theta = \pi$$

$$\sqrt[k]{z} = \sqrt[k]{1} \left(\cos \frac{2k\pi + \pi}{\delta} + i \sin \frac{2k\pi + \pi}{\delta} \right)$$

$$k = 0 \Rightarrow z_1 = \cos \frac{\pi}{\delta} + i \sin \frac{\pi}{\delta}$$

$$k = 1 \Rightarrow z_2 = \cos \frac{3\pi}{\delta} + i \sin \frac{3\pi}{\delta}$$

$$k = 2 \Rightarrow z_3 = \cos \pi + i \sin \pi$$

$$k = 3 \Rightarrow z_4 = \cos \frac{5\pi}{\delta} + i \sin \frac{5\pi}{\delta}$$

$$k = 4 \Rightarrow z_5 = \cos \frac{7\pi}{\delta} + i \sin \frac{7\pi}{\delta}$$

سؤالات ریاضیات آزمون‌های کارشناسی ارشد

سال ۸۴

«بسط دوجمله‌ای»

۱- در بسط دوجمله‌ای $(x - \frac{1}{2\sqrt{x}})^6$ ، جمله فاقد x برابر کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{4}$ (۲) $\frac{5}{4}$ (۳) $\frac{5}{8}$ (۴) $\frac{15}{16}$
(حسابداری - ۸۴)

«مجموعه‌ها»

۲- اگر A و B دو مجموعه باشد، آنگاه مجموعه $(A \cup B) \cap (A \cup B') \cap (A' \cup B)$ کدام است؟

- (۱) A (۲) B (۳) $A \cap B$ (۴) $A \cup B$
(اقتصاد - ۸۴)

«تابع»

۳- اگر f و g توابع حقیقی در R باشند و داشته باشیم $f(x) = \frac{4+x}{1-x}$ و $f[g(x)] = \frac{x}{2+x}$ باشد، $g(x)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{3-2x}{x-4}$ (۲) $\frac{2+x}{x}$ (۳) $\frac{4+2x}{2+x}$ (۴) $\frac{-3x-8}{2+2x}$
(اقتصاد - ۸۴)

۴- اگر $f(x)$ تابع حقیقی در R باشد، کدام مورد صحیح نیست؟

- (۱) $f(x) = x^2 + 1$ تابعی فرد و غیر یک به یک
(۲) $f(x) = x^2 + 1$ تابعی زوج و همواره پیوسته
(۳) $f(x) = x \cdot \sin x$ تابعی زوج و همواره پیوسته
(۴) $f(x) = \cos x$ تابعی زوج و غیر یک به یک

(اقتصاد - ۸۴)

۱- در صورت اصلی سؤال ... یک بیک آمده بود، م.

۵- اگر $f(x) = e^{-x^2}$, $g(x) = \sqrt{\frac{1-x}{x}}$ باشد دامنه تابع $g \circ f$ کدام است؟

- (۱) $(-\infty, +\infty)$ (۲) $(0, +\infty)$ (۳) $(0, 1)$ (۴) $[-1, 1]$

(مدیریت - ۸۴)

۶- برد تابع با ضابطه $f(x) = \ln \frac{x^2}{x^2 + 4}$ در کدام بازه است؟

- (۱) $(0, +\infty)$ (۲) $(-\infty, 0)$ (۳) $(-1, 0)$ (۴) $(0, 1)$

(مدیریت - ۸۴)

۷- معکوس تابع $f(x) = e^x - e^{-x}$ از کدام نقطه می‌گذرد؟

- (۱) $(\ln 2, 1)$ (۲) $(\frac{1}{2}, \ln 2)$ (۳) $(\frac{3}{2}, \ln 2)$ (۴) $(\frac{2}{3}, \ln 3)$

(مدیریت - ۸۴)

۸- کدام تابع بر روی دامنه خودش نه زوج است و نه فرد؟

- (۱) $f(x) = x[x]$ (۲) $f(x) = |x| \cos x$
(۳) $f(x) = x - \frac{1}{x}$ (۴) $f(x) = \log \frac{1+x}{1-x}$

(مدیریت - ۸۴)

۹- اگر $f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{x}}$ و $g(x) = e^x$ باشد دامنه تابع $f \circ g$ کدام است؟

- (۱) $(-\infty, 0)$ (۲) $(-1, 1)$ (۳) $(0, 1)$ (۴) $[0, +\infty)$

(حسابداری - ۸۴)

۱۰- برد تابع با ضابطه $f(x) = 2^{|x|} - x$ در کدام بازه است؟

- (۱) $[1, \frac{1}{2}]$ (۲) $[1, \frac{1}{2})$ (۳) $[2, 1]$ (۴) $(2, 1]$

(حسابداری - ۸۴)

۱۱- ضابطه معکوس تابع $f(x) = x + \sqrt{2x}$ کدام است؟

- (۱) $x + 1 - \sqrt{2x+1}; x \geq \frac{-1}{2}$ (۲) $x + 1 + \sqrt{2x+1}; x \geq \frac{-1}{2}$
(۳) $x + 1 + \sqrt{2x+1}; x > 0$ (۴) $x + 1 - \sqrt{2x+1}; x > 0$

(حسابداری - ۸۴)

۱۲- کدام تابع بر روی دامنه خود، یک به یک است؟

$$f(x) = x + \sqrt{x} \quad (۲)$$

$$f(x) = x + \frac{1}{x} \quad (۱)$$

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1} \quad (۴)$$

$$f(x) = \sqrt{x + |x|} \quad (۳)$$

(حسابداری - ۸۴)

«حد و پیوستگی»

 ۱۳- حد عبارت $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^{-1} 2x}{\tan^{-1} x}$ را تعیین کنید؟

$$۴ \quad (۴)$$

$$۲ \quad (۳)$$

$$\frac{1}{2} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{4} \quad (۱)$$

(اقتصاد - ۸۴)

 ۱۴- حاصل $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x^2})^x$ کدام است؟

$$\frac{1}{2e} \quad (۴)$$

$$\frac{1}{e} \quad (۳)$$

$$e \quad (۲)$$

$$۱ \quad (۱)$$

(مدیریت - ۸۴)

 ۱۵- طول نقطه انفصال نمودار تابع $f(x) = \frac{x-2}{\ln(x+2\sqrt{x})}$ کدام است؟

$$۳ - ۲\sqrt{2} \quad (۴)$$

$$۳ + ۲\sqrt{2} \quad (۳)$$

$$-۱ + \sqrt{2} \quad (۲)$$

$$۲ \quad (۱)$$

(مدیریت - ۸۴)

 ۱۶- حاصل $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+3+\dots+n}{C_n^r}$ کدام است؟

$$۲ \quad (۴)$$

$$۱ \quad (۳)$$

$$\frac{1}{2} \quad (۲)$$

$$۰ \quad (۱)$$

(مدیریت - ۸۴)

 ۱۷- حاصل $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x + \sqrt{2-x}}{x^2 + 2x}$ کدام است؟

$$\frac{3}{8} \quad (۴)$$

$$\frac{3}{4} \quad (۳)$$

$$-\frac{3}{8} \quad (۲)$$

$$-\frac{3}{4} \quad (۱)$$

(حسابداری - ۸۴)

«مشتق»

 ۱۸- نرخ تغییر $\sqrt{x^2 - 3x}$ نسبت به $\frac{x}{x-1}$ در نقطه $x = -۱$ کدام است؟

$$۵ \quad (۴)$$

$$۴ \quad (۳)$$

$$۳ \quad (۲)$$

$$۲ \quad (۱)$$

(اقتصاد - ۸۴)

۱۹- مشتق مرتبه دهم تابع $y = xe^x$ در $x = 1$ برابر است با:

- (۱) $10e$ (۲) $11e$ (۳) $e + 10$ (۴) $e + 11$

(اقتصاد - ۸۴)

۲۰- مشتق عبارت $\sqrt{x^2}(x-2)$ به ازای $x = -1$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) 3

(مدیریت - ۸۴)

۲۱- معادله خط مماس بر منحنی $y = e^{-2x}$ در نقطه‌ای به طول صفر واقع بر آن کدام است؟

- (۱) $y + 2x = 1$ (۲) $y - 2x = 1$ (۳) $2y + x = 2$ (۴) $2y - x = 2$

(مدیریت - ۸۴)

۲۲- تابع با ضابطه $f(x) = \frac{x^2}{4} - \ln x$ در کدام بازه نزولی است؟

- (۱) $(-1, 1)$ (۲) $(0, 1)$ (۳) $(0, e)$ (۴) $(1, e)$

(مدیریت - ۸۴)

۲۳- طول نقطه عطف نمودار تابع $f(x) = \ln(x^2 + 4)$ با علامت مثبت کدام است؟

- (۱) $\sqrt{2}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) 1 (۴) 2

(مدیریت - ۸۴)

۲۴- از رابطه $x^2 + 2y^2 - 3xy + 4x = 8$ مقدار $\frac{dy}{dx}$ در نقطه $(2, 1)$ کدام است؟

- (۱) -1 (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{5}{2}$ (۴) 3

(مدیریت - ۸۴)

۲۵- اگر $f(x) = \sqrt{(x^2 - 2x)^2}$ باشد، حاصل $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h}$ برابر کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) 2

(حسابداری - ۸۴)

۲۶- خط مماس بر منحنی تابع $y = \ln(x^2 - 3)$ در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر آن نیمساز ناحیه اول را با کدام طول قطع می‌کند؟

(۴) ۲

(۳) $\frac{5}{2}$

(۲) $\frac{2}{3}$

(۱) $\frac{8}{3}$

(حسابداری - ۸۴)

۲۷- تابع $f(x) = (x^2 + 1)e^{-x}$ در کدام بازه صعودی است؟

(۴) ϕ

(۳) R

(۲) $(-1, +\infty)$

(۱) $(-\infty, -1)$

(حسابداری - ۸۴)

۲۸- مجموعه طول نقاط عطف نمودار تابع $f(x) = xe^{\frac{-1}{2}x}$ کدام است؟

(۲) $\{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$

(۱) $\{-\sqrt{6}, \sqrt{6}\}$

(۴) $\{-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}\}$

(۳) $\{-\sqrt{6}, 0, \sqrt{6}\}$

(حسابداری - ۸۴)

۲۹- از رابطه $y^2 = f(y - 2x)$ با شرط $f'(1) = -2$ مقدار $\frac{dy}{dx}$ در نقطه $x = 1$ و $y = 3$ کدام است؟

(۴) ۲

(۳) $\frac{3}{2}$

(۲) $\frac{1}{2}$

(۱) $\frac{2}{3}$

(حسابداری - ۸۴)

«انتگرال»

۳۰- اگر داشته باشیم $I(x) = \int \frac{1}{x^2} \sqrt{1 + \frac{1}{x}} dx$ ، با فرض آن که ثابت انتگرال‌گیری صفر باشد، مقدار $I(1)$ کدام است؟

(۴) $\frac{1}{3}\sqrt{2}$

(۳) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

(۲) $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$

(۱) $-\frac{4\sqrt{2}}{3}$

(اقتصاد - ۸۴)

۳۱- مقدار انتگرال معین $I = \int_1^2 \ln x dx$ کدام است؟

(۴) $\ln 2 + 2$

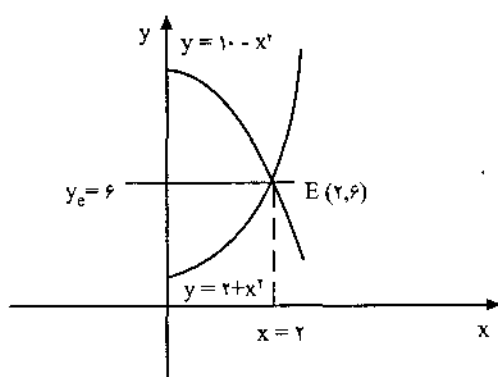
(۳) $\ln 2 - 2$

(۲) $2 \ln 2 + 1$

(۱) $2 \ln 2 - 1$

(اقتصاد - ۸۴)

۳۲- در شکل داده شده مقدار مازاد مصرف‌کننده، کدام است؟



(۴) $\frac{32}{3}$

(۳) $\frac{16}{3}$

(۲) $\frac{10}{3}$

(۱) $\frac{4}{3}$

(اقتصاد - ۸۴)

۳۳- انتگرال $\int \frac{x+4}{x(x+2)} dx$ برابر کدام است؟

(۲) $\ln \frac{x+2}{x^2} + C$

(۴) $\ln \frac{x^2}{x+2} + C$

(۱) $\ln \frac{x}{(x+2)^2} + C$

(۳) $\ln \frac{(x+2)^2}{x} + C$

(مدیریت - ۸۴)

۳۴- حاصل انتگرال $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln x}$ کدام است؟

(۴) $1 - \ln 2$

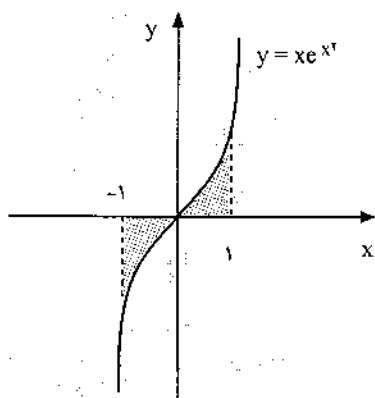
(۳) $1 + \ln 2$

(۲) $\ln \frac{1}{2}$

(۱) $\ln 2$

(مدیریت - ۸۴)

۳۵- مساحت سایه زده در شکل مقابل کدام است؟^۱



$$\frac{1}{2}(e-1) \quad (۲)$$

$$\frac{1}{2}e-1 \quad (۳)$$

$$e-\frac{1}{2} \quad (۲)$$

$$e-1 \quad (۱)$$

(مدیریت - ۸۴)

۳۶- اگر $F(x) = \int_1^x \sqrt{t^2+4} dt$ باشد مقدار $F(2)$ چقدر است؟

$$2 \quad (۴)$$

$$2\sqrt{2} \quad (۳)$$

$$\sqrt{2} \quad (۲)$$

$$0 \quad (۱)$$

(مدیریت - ۸۴)

۳۷- جواب انتگرال $\int \frac{dx}{x(x^2+1)}$ کدام است؟

$$\ln(-x + \sqrt{x^2+1}) + C \quad (۲)$$

$$\ln(x + \sqrt{x^2+1}) + C \quad (۱)$$

$$\ln \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} + C \quad (۴)$$

$$\ln \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + C \quad (۳)$$

(حسابداری - ۸۴)

۳۸- حاصل انتگرال $\int_{-1}^1 \frac{x dx}{e^x}$ کدام است؟

$$\frac{1}{e} - e \quad (۴)$$

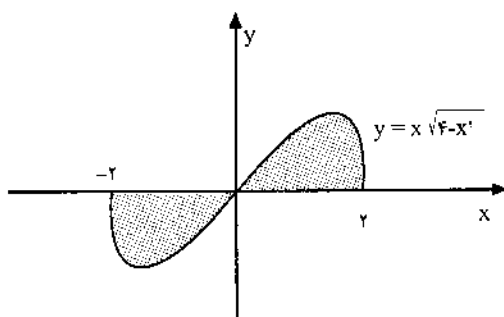
$$e - \frac{1}{e} \quad (۳)$$

$$\frac{-2}{e} \quad (۲)$$

$$\frac{2}{e} \quad (۱)$$

(حسابداری - ۸۴)

۳۹- مساحت سایه‌زده در شکل مقابل کدام است؟



- (۱) $\frac{7}{3}$ (۲) $\frac{8}{3}$ (۳) $\frac{14}{3}$ (۴) $\frac{16}{3}$ (حسابداری - ۸۴)

۴۰. اگر $F(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$ ، مقدار مشتق $F(x)$ به ازای $x = 1$ چقدر است؟

- (۱) ۰ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{3}{2}$ (حسابداری - ۸۴)

«ماتریس»

۴۱. اگر A یک ماتریس مربع و ترانپوذه آن A' باشد، آنگاه $A - A'$ کدام است؟

- (۱) متقارن (۲) شبه متقارن (۳) متعامد (۴) همقوه (اقتصاد - ۸۴)

۴۲. مقدار x از معادله زیر کدام است؟

$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵ (اقتصاد - ۸۴)

۴۳. اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ باشد، ماتریس X از رابطه $AX = I$ کدام است؟ (I ماتریس یکه از مرتبه ۲)

- (۱) $\begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

(مدیریت - ۸۴)

$$44- \text{حاصل دترمینان} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix} \text{ کدام است؟}$$

$$(1) \quad 0 \quad (2) \quad 3 \quad (3) \quad 4 \quad (4) \quad 5$$

(مدیریت - ۸۴)

$$45- \text{از دستگاه معادلات} \frac{2x-1}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+3}{-1} \text{ و } 2x+y+z=5 \text{ مقدار } y \text{ کدام است؟}$$

$$(1) \quad 1 \quad (2) \quad 3 \quad (3) \quad -1 \quad (4) \quad -5$$

(مدیریت - ۸۴)

$$46- \text{اگر } A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \text{ درآیه (عنصر) واقع در سطر دوم و ستون سوم ماتریس } A^{-1} \text{ کدام است؟}$$

$$(1) \quad -\frac{3}{16} \quad (2) \quad -\frac{1}{4} \quad (3) \quad \frac{1}{4} \quad (4) \quad \frac{3}{16}$$

(حسابداری - ۸۴)

$$47- \text{اگر } A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \text{ باشد، دترمینان ماتریس } A \cdot A^t \text{ کدام است؟}$$

$$(1) \quad 0 \quad (2) \quad 236 \quad (3) \quad 237 \quad (4) \quad \text{نشدنی}$$

(حسابداری - ۸۴)

$$48- \text{به ازای کدام مقدار } a \text{ دستگاه معادلات} \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 2x + y + az = 0 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases} \text{ بیشمار جواب دارد؟}$$

$$(1) \quad 3 \quad (2) \quad 5 \quad (3) \quad 6 \quad (4) \quad 7$$

(حسابداری - ۸۴)

«خط، بردار و صفحه»

۴۹- خطی که از (۱، ۲، ۳) گذشته و موازی بردار (۲، ۱، ۳) باشد، صفحه افق را در نقطه‌ای با کدام مختصات قطع می‌کند؟

$$(1) (-1, 1, 0) \quad (2) (1, -1, 0) \quad (3) (2, 1, 0) \quad (4) (1, 2, 0)$$

(اقتصاد - ۸۴)

«توابع چندمتغیره»

۵۰- برد تابع حقیقی $z = \frac{x^2 + y^2}{x - y}$ ، کدام است؟

$$(1) R - [-1, 1] \quad (2) R - \{1, -1\} \quad (3) R \quad (4) R - \{0\}$$

(اقتصاد - ۸۴)

۵۱- حد تابع $z = \frac{x + y}{x - y}$ در نقطه $(0, 0)$ در امتداد خط راست $y = mx$ ، کدام است؟

$$(1) \text{ صفر} \quad (2) m \quad (3) \frac{1+m}{1-m} \quad (4) \infty$$

(اقتصاد - ۸۴)

۵۲- اگر داشته باشیم $z = (x + 2y)^{\frac{x}{y}}$ آنگاه $\frac{\partial z}{\partial x}$ در نقطه $(1, 1)$ برابر است با:

$$(1) 3 \ln 2 + 3 \quad (2) 3 \ln 3 + 1 \quad (3) 2 \ln 3 + 1 \quad (4) 2 \ln 3 + 3$$

(اقتصاد - ۸۴)

۵۳- دیفرانسیل مرتبه دوم تابع $z = f(x, y)$ به صورت $d^2 z = 4dx^2 + 2dxdy + 6dy^2$ است. وضع این تابع از نظر تحدب و تقعر کدام است؟

$$(1) \text{ اکیداً محدب} \quad (2) \text{ محدب} \quad (3) \text{ مقعر} \quad (4) \text{ نه محدب و نه مقعر}$$

(اقتصاد - ۸۴)

۵۴- طول و عرض نقطه بحرانی تابع $z = x^2 + 4xy + 6y^2 + 2x$ کدام است؟

$$(1) (3, -1) \quad (2) (6, -2) \quad (3) (-6, 2) \quad (4) (-3, 1)$$

(اقتصاد - ۸۴)

۵۵- اگر داشته باشیم $\begin{cases} U = x \ln(y + 1) \\ V = y \ln(x + 1) \end{cases}$ آنگاه ژاکوبین $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$ در نقطه $(1, 1)$ کدام است؟

$$(1) 2 + \ln 2 \quad (2) (\ln 2)^2 - \frac{1}{4} \quad (3) -2 + \ln 2 \quad (4) (\ln 2)^2 + \frac{1}{4}$$

(اقتصاد - ۸۴)

۵۶. در تابع تولید $z = xy$ مقادیر x و y عوامل تولید و z محصول است، اگر قیمت عوامل تولید $p_x = ۱۰$ و $p_y = ۵$ و هزینه کل تخصیصی ۱۰۰ باشد، از هر یک از عوامل تولید چه مقدار به کار گیریم تا مقدار محصول z ماکزیمم گردد؟

- (۱) $x = ۴/۵$ $y = ۱۱$ (۲) $x = ۸$ $y = ۴$ (۳) $x = ۲/۵$ $y = ۱۵$ (۴) $x = ۵$ $y = ۱۰$ (اقتصاد - ۸۴)

۵۷. در مسئله برنامه ریزی برای تابع مطلوبیت و خط بودجه داریم:
$$\begin{cases} \text{Max} & U = q_1 q_2 \\ & 2q_1 + q_2 = 100 \end{cases}$$
 نسبت به

اگر بودجه یک واحد تغییر کند، مقدار مطلوبیت چه مقدار تغییر می کند؟

- (۱) ۲۵ (۲) ۵۰ (۳) ۷۵ (۴) ۱۰۰ (اقتصاد - ۸۴)

۵۸. در تابع دو متغیری $Z = y \cdot f(x - 2y)$ حاصل $\frac{\partial z}{\partial y} + 2 \frac{\partial z}{\partial x}$ کدام است؟

- (۱) ۰ (۲) y (۳) Z (۴) $\frac{Z}{y}$ (مدیریت - ۸۴)

۵۹. کمترین مقدار تابع $Z = x^2 - xy$ با شرط $y + 2x = 6$ کدام است؟

- (۱) -۵ (۲) -۳ (۳) -۲ (۴) -۱ (مدیریت - ۸۴)

۶۰. دیفرانسیل کامل تابع $Z = \ln \frac{x+y}{x-y}$ در نقطه $x = 2$ و $y = 1$ به ازای $\Delta x = 0.1$ و $\Delta y = 0.2$ کدام است؟

- (۱) ۰ (۲) ۰.۰۱ (۳) ۰.۰۲ (۴) ۰.۰۳ (مدیریت - ۸۴)

۶۱. اگر $Z = x^2 + y^2 + 3xy - 5y$ و $x = st$ و $y = 2s - 3t$ باشد، مقدار $\frac{\partial z}{\partial t}$ به ازای $t = 2$ و $s = 3$ چقدر است؟

- (۱) -۴ (۲) -۳ (۳) ۱ (۴) ۲ (مدیریت - ۸۴)

۶۲. در تابع دو متغیری $z = x^2 e^{\frac{y}{x}}$ حاصل $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ در نقطه $(1, 2)$ کدام است؟

$$-e^z \quad (1) \quad -2e^z \quad (2) \quad e^z \quad (3) \quad 2e^z \quad (4)$$

(حسابداری - ۸۴)

۶۳- نقطه بحرانی تابع $z = x^2 + 2y^2 - 3xy - x + 2y$ چگونه است؟

$$(1) \text{ زینی} \quad (2) \text{ ماکسیم} \quad (3) \text{ می‌نیم} \quad (4) \text{ عطف}$$

(حسابداری - ۸۴)

۶۴- دیفرانسیل کامل تابع $z = x^2 \tan y - x \cos 2y$ در نقطه $(\frac{\pi}{4}, 2)$ ، برای $dx = 0.02$ و $dy = 0.01$ برابر کدام است؟

$$(1) 0.12 \quad (2) 0.15 \quad (3) 0.20 \quad (4) 0.24$$

(حسابداری - ۸۴)

۶۵- اگر $z = \frac{x}{y} + \frac{y}{x-2}$ و $x = 2s - t$ و $y = t - s^2$ مقدار $\frac{\partial z}{\partial s}$ برای $s = 1$ و $t = 2$ کدام است؟

$$(1) -\frac{1}{2} \quad (2) \frac{1}{2} \quad (3) \frac{3}{2} \quad (4) \frac{5}{2}$$

(حسابداری - ۸۴)

«معادلات دیفرانسیل»

۶۶- اگر داشته باشیم $y'' - 3y' + 2y = 0$ کدام تابع در این معادله صدق می‌کند؟

$$(1) y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} \quad (2) y = c_1 e^x + c_2 e^{-2x}$$

$$(3) y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} \quad (4) y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}$$

(اقتصاد - ۸۴)

«مختصات قطبی، اعداد مختلط»

۶۷- حاصل عبارت $\frac{2i^{20} + i^{15}}{2 + i}$ کدام است؟

$$(1) \frac{3}{5} - \frac{4}{5}i \quad (2) 1 - \frac{4}{5}i \quad (3) 1 + \frac{4}{5}i \quad (4) \frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$$

(اقتصاد - ۸۴)

۶۸- یکی از جذرهای عدد $\frac{i\sqrt{2}}{1-i}$ به صورت $r(\cos \theta + i \sin \theta)$ است، r و θ کدام است؟

$$(1) r = 1, \theta = \frac{3\pi}{4} \quad (2) r = 1, \theta = \frac{5\pi}{4}$$

$$(3) r = 2, \theta = \frac{3\pi}{4} \quad (4) r = 2, \theta = \frac{5\pi}{4}$$

(حسابداری - ۸۴)

«ریاضیات و کاربرد آن در اقتصاد و بازرگانی»

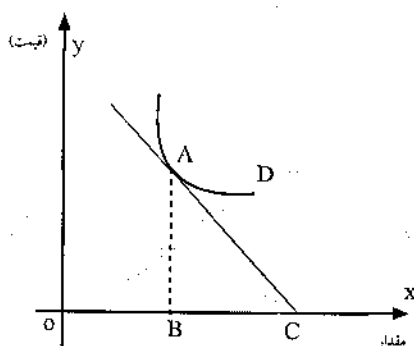
۶۹- یک کشور در حال توسعه ذخیره ارزی خود را از سطح ۶ میلیون واحد می‌خواهد به ۱۲ میلیون واحد برساند، اگر میزان ذخیره ارزی سالیانه ۱۰ درصد اضافه شود، این کار چند سال طول می‌کشد؟

$$(۱) \quad \frac{\ln 1/1}{\ln 2} \quad (۲) \quad \frac{\ln 2}{\ln 1/1} \quad (۳) \quad \frac{\ln 12}{\ln 6} \quad (۴) \quad \frac{\ln 6}{\ln 12} \quad (\text{اقتصاد - ۸۴})$$

۷۰- تابع تقاضا به صورت $q = 10 - \ln(p + 1)$ که در آن p قیمت و q مقدار تقاضا است. کشش تقاضا در قیمت $p = 2$ کدام است؟

$$(۱) \quad \frac{-1}{10 - \ln 3} \quad (۲) \quad \frac{-2}{3(10 - \ln 3)} \quad (۳) \quad -10 + \ln 3 \quad (۴) \quad \frac{-10 + \ln 3}{2} \quad (\text{اقتصاد - ۸۴})$$

۷۱- اگر در شکل مقابل D تابع تقاضا باشد، که در آن x مقدار و y قیمت می‌باشد، مقدار کشش در روی شکل کدام است؟



$$(۱) \quad -\frac{OB}{CB} \quad (۲) \quad -\frac{OC}{AC} \quad (۳) \quad -\frac{BC}{OB} \quad (۴) \quad -\frac{AC}{OC} \quad (\text{اقتصاد - ۸۴})$$

۷۲- اگر تابع تقاضا $y = f(x)$ فرض شود، بین درآمد نهایی و کشش تقاضا کدام رابطه برقرار است؟
 y قیمت، x مقدار تقاضا و E کشش تقاضا نسبت به قیمت است.

$$(۱) \quad MR = y(1 + \frac{1}{E}) \quad (۲) \quad MR > y(1 + \frac{1}{E}) \quad (۳) \quad y = MR(1 + \frac{1}{E}) \quad (۴) \quad y > MR(1 + \frac{1}{E})$$

(اقتصاد - ۸۴)

۷۳- اگر هزینه ثابت تولید یک کالا ۶۰۰۰۰ تومان و هزینه متغیر ۵۰ درصد فروش باشد و قیمت هر واحد ۴۰ تومان فرض شود، به ازای چه مقدار تولید به نقطه سربه سر می‌رسیم؟

- (۱) ۶۰۰۰ (۲) ۴۰۰۰ (۳) ۳۰۰۰ (۴) ۲۰۰۰

(اقتصاد - ۸۴)

۷۴- اگر تابع تقاضا $y = 18 - 2x$ و تابع هزینه $TC = 10x - x^2$ باشد، مقدار تقاضا و y قیمت است، به ازای چه مقدار سود بنگاه ماکزیمم است؟

- (۱) $x = \frac{5}{4}$ (۲) $x = 4$ (۳) $x = 5$ (۴) $x = \frac{13}{2}$

(اقتصاد - ۸۴)

۷۵- اگر تابع هزینه کل $TC = x^2 + 12x + 54$ باشد، و x مقدار تولید است، محل تلاقی تابع هزینه نهایی و هزینه متوسط کدام است؟

- (۱) (۶, ۲۴) (۲) (۲, ۱۶) (۳) (۳, ۳۶) (۴) (۳, ۳۹)

(اقتصاد - ۸۴)

۷۶- اگر میل نهایی به مصرف $\frac{dC}{dx} = \frac{2}{\sqrt{x}}$ باشد، با فرض اینکه اگر درآمد $x = 0$ باشد، مصرف $C = 10$ است. تابع پس انداز کدام است؟

- (۱) $S = x + 4\sqrt{x} + 10$ (۲) $S = x - 2\sqrt{x} + 10$

- (۳) $S = x - 2\sqrt{x} - 10$ (۴) $S = x - 4\sqrt{x} - 10$

(اقتصاد - ۸۴)

۷۷- نرخ رشد سالانه جمعیتی $1/5$ درصد است، اگر این نرخ ثابت بماند، پس از چند سال این جمعیت دوبرابر می‌شود؟ ($\ln 2 = 0.705$)

- (۱) ۴۳ (۲) ۴۵ (۳) ۴۷ (۴) ۴۹

(مدیریت - ۸۴)

۷۸- سود با نرخ ۱۲ درصد در پایان هر ماه بر سرمایه افزوده می‌شود. پس از چه مدت این سرمایه ۳ برابر می‌شود؟ ($\log_2 1.01 = 0.0090$)

- (۱) ۸ سال و ۵ ماه (۲) ۸ سال و ۱۰ ماه (۳) ۹ سال و ۳ ماه (۴) ۹ سال و ۱۱ ماه

(حسابداری - ۸۴)

پاسخ تشریحی
سؤالات ریاضیات آزمون‌های کارشناسی ارشد
سال ۸۴

۱- گزینه‌ی (۴)

$$\text{هر جمله‌ی بسط} = \binom{6}{r} (x)^{6-r} \left(-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^r = \binom{6}{r} (x)^{6-r} \left(-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)^r$$

کافی است توان x را برابر صفر قرار دهیم:

$$6 - r - \frac{1}{2}r = 0 \implies \frac{3}{2}r = 6 \implies r = 4$$

$$x \text{ جمله‌ی فاقد} = \binom{6}{4} (x)^2 \left(-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^4 = \frac{6!}{2!4!} \times \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$$

۲- گزینه‌ی (۳)

$$\begin{aligned} (A \cup B) \cap (A \cup B') \cap (A' \cup B) &= A \cup (B \cap B') \cap (A' \cup B) \\ &= (A \cup \phi) \cap (A' \cup B) \\ &= A \cap (A' \cup B) \\ &= (A \cap A') \cup (A \cap B) \\ &= \phi \cup (A \cap B) = A \cap B \end{aligned}$$

۳- گزینه‌ی (۴)

$$f(g(x)) = \frac{x}{2+x} \implies \frac{4+g(x)}{1-g(x)} = \frac{x}{2+x}$$

$$\implies 8 + 2g(x) + 4x + x \cdot g(x) = x - xg(x)$$

$$\implies 2g(x) + 2x \cdot g(x) = -3x - 8 \implies (2 + 2x)g(x) = -3x - 8$$

$$\Rightarrow g(x) = \frac{-3x - 1}{2 + 2x}$$

۴- گزینه‌ی (۱)

$$f(x) = x^2 + 1 \quad f(-x) = -x^2 + 1 \neq f(x), \quad -f(x) \rightarrow \text{نه فرد}$$

۵- گزینه‌ی (۱)

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

$$f(x) = e^{-x^2} \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$$

$$g(x) = \sqrt{\frac{1-x}{x}}, \quad \frac{1-x}{x} \geq 0 \Rightarrow D_g = (0, 1]$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < e^{-x^2} \leq 1\} = \mathbb{R}$$

$$\text{می‌دانیم } 0 < \frac{1}{e^{x^2}} \leq 1$$

۶- گزینه‌ی (۲)

$$0 \leq \frac{x^2}{x^2 + 4} < 1 \Rightarrow \ln 0 \leq \ln \frac{x^2}{x^2 + 4} < \ln 1 \Rightarrow -\infty < y < 0$$

۷- گزینه‌ی (۳)

$$(a, b) \in f \Rightarrow (b, a) \in f^{-1}$$

$$\left(\frac{3}{2}, \ln 2\right) \Rightarrow \left(\ln 2, \frac{3}{2}\right) \Rightarrow \frac{3}{2} = e^{\ln 2} - e^{-\ln 2} = 2 - \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

۸- گزینه‌ی (۱)

$$(۲) \text{ گزینه: } f(-x) = |-x| \cos(-x) = |x| \cos x = f(x) \rightarrow \text{زوج}$$

$$(۳) \text{ گزینه: } f(-x) = -x + \frac{1}{x} = -(x - \frac{1}{x}) = -f(x) \rightarrow \text{فرد}$$

$$(۴) \text{ گزینه: } f(-x) = \log \frac{1-x}{1+x} = \log \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{-1} = -\log \frac{1+x}{1-x} = -f(x) \rightarrow \text{فرد}$$

۹- گزینه‌ی (۱)

$$\frac{1-x}{x} \geq 0 \Rightarrow D_f = (0, 1] \quad , \quad D_g = \mathbb{R}$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g | g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} | 0 < e^x \leq 1\} = (-\infty, 0]$$

می‌دانیم $-\infty < x \leq 0$ یا $\ln 0 < \ln e^x \leq \ln 1$
یا:

$$f \circ g(x) = \sqrt{\frac{1-e^x}{e^x}} \quad , \quad \frac{1-e^x}{e^x} \geq 0 \Rightarrow 1-e^x \geq 0 \Rightarrow e^x \leq 1 \\ \Rightarrow \ln e^x \leq \ln 1 \Rightarrow x \leq 0$$

۱۰- گزینه‌ی (۲)

$$D_f = \mathbb{R} \quad , \quad 0 \leq x - [x] < 1 \quad , \quad y = \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^{x-[x]}$$

$$\text{اگر:} \quad x - [x] = 0 \Rightarrow y = \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^0 = 1$$

$$\text{اگر:} \quad 0 < x - [x] < 1 \Rightarrow y = \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^{x-[x]} < \frac{1}{\sqrt{e}}$$

$$R_f = \left[1, \frac{1}{\sqrt{e}}\right) \quad \text{بنابراین}$$

۱۱- گزینه‌ی (۴)

$$D_f: x \geq 0 \quad y - x = \sqrt{2}x \Rightarrow y^2 - 2yx + x^2 = 2x \Rightarrow$$

$$x^2 - 2(y+1)x + y^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a} \Rightarrow x = (y+1) \pm \sqrt{y^2 + 2y + 1 - y^2}$$

$$x = y + 1 \pm \sqrt{2y + 1} \Rightarrow f^{-1}(x) = x + 1 - \sqrt{2x + 1} \quad , \quad x > 0$$

۱۲- گزینه‌ی (۲)

$$f(x) = x + \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow f' \text{ همواره صعودی} \Rightarrow f' \text{ همواره مثبت} \Rightarrow$$

۱۳- گزینه‌ی (۳)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^{-1} \sqrt{x}}{\tan^{-1} x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{H} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{1}{1+x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1(1+x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = 1$$

۱۴- گزینه‌ی (۱)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^x = 1^\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^x = \exp \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x}} = \frac{0}{0} \xrightarrow{H} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{-2}{x^3 + x}}{\frac{-1}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2}{x^3 + x} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^x = e^0 = 1$$

۱۵- گزینه‌ی (۳)

$$\ln(x + 2\sqrt{x}) = 0 \Rightarrow x + 2\sqrt{x} = e^0 \Rightarrow 2\sqrt{x} = 1 - x$$

$$2x = x^2 - 2x + 1 \Rightarrow x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$x = \frac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 1}}{1} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 + 2\sqrt{2} & \text{ق ق} \\ x = 3 - 2\sqrt{2} & \text{غ ق ن} \end{cases}$$

۱۶- گزینه‌ی (۳)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + \dots + n}{C_n^1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{\frac{n!}{2!(n-2)!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{\frac{n(n-1)}{2}} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n}{n^2 - n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2} = 1$$

۱۷- گزینه‌ی (۲)

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + \sqrt{2-x}}{x^2 + 2x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{H} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1 + \frac{-1}{2\sqrt{2-x}}}{2x + 2} = \frac{1 + \frac{-1}{2}}{-2 + 2} = \frac{-3}{0}$$

۱۸- گزینه‌ی (۴)

$$\frac{x}{x-1} \text{ نرخ تغییر } \sqrt{x^2 - 3x} \text{ نسبت به } x = \frac{\frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x}}}{\frac{x-1-x}{(x-1)^2}} \xrightarrow{x=-1} = \frac{\frac{-5}{2}}{\frac{2}{-1}} = \frac{-5}{2} = -\frac{5}{2}$$

۱۹- گزینه‌ی (۲)

$$y = xe^x \Rightarrow y' = e^x + xe^x = (1+x)e^x \\ \Rightarrow y'' = e^x + (1+x)e^x = (2+x)e^x$$

$$\Rightarrow y''' = e^x + (2 + x)e^x = (3 + x)e^x$$

⋮

$$\Rightarrow y^{(10)} = e^x + (9 + x)e^x = (10 + x)e^x$$

$$\Rightarrow y_{(1)}^{(10)} = (10 + 1)e = 11e$$

۲۰۔ گزینہی (۴)

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2}(x - 2) \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}(x - 2) + \sqrt[3]{x^2}$$

$$f'(-1) = \frac{2}{-3}(-1 - 2) + 1 = 2 + 1 = 3$$

۲۱۔ گزینہی (۱)

$$x = 0 \Rightarrow y = e^x = 1 \Rightarrow \text{نقطہ تماس } (0, 1)$$

$$y' = -2e^{-2x} \Rightarrow m = y'(0) = -2e^0 = -2$$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 1 = -2(x - 0) \Rightarrow y = -2x + 1$$

۲۲۔ گزینہی (۲)

$$D_f = \{x | x > 0\}$$

$$f'(x) = x - \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

x	0	1
y'	∞	$- \quad 0 \quad +$
y	∞	$\searrow \quad \frac{1}{2} \quad \nearrow$

۲۳۔ گزینہی (۴)

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 4} \Rightarrow f''(x) = \frac{2x^2 + 4 - 2x^2}{(x^2 + 4)^2} = \frac{4 - 2x^2}{(x^2 + 4)^2}$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 4 - 2x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$$

۲۴- گزینه‌ی (۳)

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{2x - 3y + 4}{4y - 2x} \xrightarrow{(1,1)} \frac{dy}{dx} = -\frac{4 - 3 + 4}{4 - 6} = \frac{5}{2}$$

۲۵- گزینه‌ی (۴)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} = f'(4)$$

$$f'(x) = \frac{2(2x-2)}{3\sqrt{x^3-2x}} \Rightarrow f'(4) = \frac{2 \times 6}{3\sqrt{8}} = \frac{2 \times 6}{3 \times 2} = 2$$

۲۶- گزینه‌ی (۱)

$$x = 2 \Rightarrow y = \ln 1 = 0 \Rightarrow \text{نقطه تماس } (2, 0)$$

$$y' = \frac{2x}{x^2-3} \Rightarrow m = y'(2) = \frac{4}{4-3} = 4$$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 0 = 4(x - 2) \Rightarrow y = 4x - 8$$

$$\begin{cases} y = x \\ y = 4x - 8 \end{cases} \Rightarrow x = 4x - 8 \Rightarrow x = \frac{8}{3}$$

۲۷- گزینه‌ی (۴)

$$f(x) = (x^2 + 1)e^{-x} \Rightarrow f'(x) = 2xe^{-x} - (x^2 + 1)e^{-x}$$

$$f'(x) = (-x^2 + 2x - 1)e^{-x} = 0 \Rightarrow x = 1, \quad e^{-x} > 0$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y'	$-$	0	$-$
y	$\searrow$	$2e^{-1}$	$\searrow$

۲۸- گزینه‌ی (۴)

$$f(x) = xe^{-\frac{1}{2}x^2} \Rightarrow f'(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2} - x^2 e^{-\frac{1}{2}x^2} = (1 - x^2)e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

$$f''(x) = -2xe^{-\frac{1}{2}x^2} - x(1 - x^2)e^{-\frac{1}{2}x^2} = (-2x - x + x^3)e^{-\frac{1}{2}x^2} = 0$$

$$-3x + x^2 = 0 \Rightarrow x(-3 + x^2) = 0 \Rightarrow x = 0, x = \sqrt{3}, x = -\sqrt{3}$$

۲۹- گزینه‌ی (۲)

$$y' = f(y - 2x) \Rightarrow f(y - 2x) - y' = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{-2f'(y-2x)}{f'(y-2x)-2y} \xrightarrow[x=2]{x=1} \frac{dy}{dx} = \frac{2f'(1)}{f'(1)-6} = \frac{1}{2}$$

۳۰- گزینه‌ی (۱)

$$u = \frac{1}{x} \Rightarrow du = -\frac{1}{x^2} dx \Rightarrow -du = \frac{1}{x^2} dx$$

$$\int \frac{1}{x^2} \sqrt{1 + \frac{1}{x}} dx = -\int \sqrt{1+u} du = -\int (1+u)^{\frac{1}{2}} du$$

$$= -\frac{(1+u)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = -\frac{2}{3} \sqrt{(1+u)^3} + c$$

$$I(x) = -\frac{2}{3} \sqrt{(1 + \frac{1}{x})^3} + c \xrightarrow{x=1} I(1) = -\frac{2}{3} \sqrt{8} = -\frac{4\sqrt{2}}{3}$$

۳۱- گزینه‌ی (۱)

$$\begin{cases} u = \ln x \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = x \end{cases}$$

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln x - x + c$$

$$\int_1^2 \ln x dx = (x \ln x - x) \Big|_1^2 = (2 \ln 2 - 2) - (0 - 1) = 2 \ln 2 - 1$$

۳۲- گزینه‌ی (۳)

$$\text{مازاد مصرف کننده} = \int_0^2 (10 - x^2 - 6) dx = \int_0^2 (4 - x^2) dx = (4x - \frac{x^3}{3}) \Big|_0^2$$

$$= (8 - \frac{8}{3}) - 0 = \frac{16}{3}$$

۳۳- گزینه‌ی (۴). اگر از گزینه‌ی ۴ مشتق بگیریم، عبارت تحت انتگرال به دست می‌آید.

$$\ln \frac{x^2}{x+2} + c = \ln x^2 - \ln(x+2) + c \xrightarrow{\text{مشتق}} \frac{2x}{x^2} - \frac{1}{x+2}$$

$$= \frac{2}{x} - \frac{1}{x+2} = \frac{2x+2-x}{x(x+2)} = \frac{x+2}{x(x+2)}$$

راه حل دوم:

$$\begin{aligned} \int \frac{x+2}{x(x+2)} dx &= \int \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x+2} \right) dx = 2 \ln x - \ln(x+2) + c \\ &= \ln x^2 - \ln(x+2) + c = \ln \frac{x^2}{x+2} + c \end{aligned}$$

۳۴- گزینه ی (۱)

$$\begin{aligned} u = \ln x &\Rightarrow du = \frac{1}{x} dx \\ \int \frac{dx}{x \ln x} &= \int \frac{du}{u} = \ln u = \ln(\ln x) \\ \int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln x} &= \ln(\ln e^2) - \ln(\ln e) = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2 - 0 = \ln 2 \end{aligned}$$

۳۵- گزینه ی (۱)

$$\begin{aligned} S &= \left| \int_{-1}^0 x e^{x^2} dx \right| + \int_0^1 x e^{x^2} dx = \left| \frac{1}{2} \int_{-1}^0 2x e^{x^2} dx \right| + \frac{1}{2} \int_0^1 2x e^{x^2} dx \\ S &= \left| \frac{1}{2} e^{x^2} \right|_{-1}^0 + \frac{1}{2} e^{x^2} \Big|_0^1 = \left| \frac{1}{2} (e^0 - e) \right| + \frac{1}{2} (e - e^0) \\ S &= \underbrace{\left| \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e \right|}_{(-)} + \frac{1}{2} e - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} e + \frac{1}{2} e - \frac{1}{2} = e - 1 \end{aligned}$$

۳۶- گزینه ی (۱)

$$F(2) = \int_1^2 \sqrt{t^2 + t} dt = 0$$

۳۷- گزینه ی (۳)

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2+x} &= \frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{Ax^2+A+Bx+C}{x(x^2+1)} \\ \Rightarrow A &= 1, C = 0, A+B = 0 \Rightarrow B = -1 \\ \int \frac{dx}{x(x^2+1)} &= \int \frac{1}{x} dx - \int \frac{x}{x^2+1} dx = \ln x - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+1} dx \\ &= \ln x - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + c = \ln x - \ln \sqrt{x^2+1} + c \\ &= \ln \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + c \end{aligned}$$

۳۸- گزینه‌ی (۲)

$$\begin{aligned}\int \frac{x dx}{e^x} &= \int x e^{-x} dx \\ \begin{cases} u = x \\ dv = e^{-x} dx \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -e^{-x} \end{cases} \\ \int x e^{-x} dx &= -x e^{-x} + \int e^{-x} dx = -x e^{-x} - e^{-x} + c \\ \int_{-1}^1 x e^{-x} dx &= (-e^{-1} - e^{-1}) - (e - e) = -2e^{-1} = \frac{-2}{e}\end{aligned}$$

۳۹- گزینه‌ی (۴)

$$\begin{aligned}S &= \left| \int_{-1}^0 y dx \right| + \int_0^1 y dx \\ \int x \sqrt{4-x^2} dx &= \frac{-1}{2} \int \underbrace{(-2x)}_u \underbrace{(4-x^2)^{\frac{1}{2}}}_{v} du = \frac{-1}{2} \times \frac{(4-x^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{-1}{3} \sqrt{(4-x^2)^3} \\ S &= \left| \left(-\frac{1}{3} \sqrt{(4-x^2)^3} \right) \Big|_{-1}^0 \right| + \left(-\frac{1}{3} \sqrt{(4-x^2)^3} \right) \Big|_0^1 = \frac{8}{3} + \frac{8}{3} = \frac{16}{3}\end{aligned}$$

۴۰- گزینه‌ی (۳)

$$F(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} \Rightarrow F'(x) = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow F'(1) = \frac{1}{2}$$

۴۱- گزینه‌ی (۲)

۴۲- گزینه‌ی (۳)

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 \end{vmatrix} &= 0 \Rightarrow (x-1+12+12) - (12+3+4x-4) = 0 \\ &\Rightarrow x+23-4x-11=0 \Rightarrow 3x=12 \Rightarrow x=4\end{aligned}$$

۴۳- گزینه‌ی (۳)

$$AX = I \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2a + 5c & 2b + 5d \\ a + 3c & b + 3d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a + 5c = 1 \\ a + 3c = 0 \end{cases} ; \begin{cases} 2b + 5d = 0 \\ b + 3d = 1 \end{cases} \Rightarrow X = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$c = -1, a = 3 \quad d = 2, b = -5$$

۴۴- گزینه‌ی (۴)

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \end{vmatrix} = (-6 + 10 + 12) - (-8 + 9 + 10) = 16 - 11 = 5$$

۴۵- گزینه‌ی (۲)

$$\frac{2x-1}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+3}{-1} = t \Rightarrow \begin{cases} 2x = 3t + 1 \\ y = 2t - 1 \\ z = -t - 3 \end{cases}$$

$$2x + y + z = 5 \Rightarrow 3t + 1 + 2t - 1 - t - 3 = 5 \Rightarrow 4t = 8 \Rightarrow t = 2$$

پس $y = 3$ یا $y = 2t - 1$

۴۶- گزینه‌ی (۳)

$$|A| = (16 + 0 + 0) - (0) = 16$$

می‌دانیم a_{12} عنصر مربوط به سطر دوم و ستون سوم ماتریس الحاقی A می‌باشد، بنابراین a_{22} برابر است با عنصر متناظر در ماتریس همساز که به صورت زیر به دست می‌آید.

$$a_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -(0 - 3) = 3 \Rightarrow A_{22}^{-1} = \frac{3}{16}$$

۴۷- گزینه‌ی (۳)

$$A \cdot A^t = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 + 9 + 1 & 0 - 3 + 4 \\ 0 - 3 + 4 & 0 + 1 + 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 1 \\ 1 & 17 \end{bmatrix}$$

$$|A \cdot A^t| = (14 \times 17) - (1) = 237$$

۴۸- گزینه‌ی (۴)

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \implies (2 - 2 - 2a) - (1 - 2 - a) = 0 \implies a = 7$$

۴۹- گزینه‌ی (۱)

$$\begin{aligned} p(x_* = 1, y_* = 2, z_* = 3), \vec{v} = (a = 2, b = 1, c = 3) \\ \frac{x - x_*}{a} = \frac{y - y_*}{b} = \frac{z - z_*}{c} \implies \frac{x - 1}{2} = \frac{y - 2}{1} = \frac{z - 3}{3} \\ z = 0 \implies \frac{x - 1}{2} = \frac{y - 2}{1} = -1 \implies (-1, 1, 0) \end{aligned}$$

۵۰- گزینه‌ی (۴)

$$D_f : x \neq y$$

$$x^r + y^r > 0, x - y > 0 \text{ یا } x - y < 0 \implies R_f = \mathbb{R} - \{0\}$$

۵۱- گزینه‌ی (۳)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x+y}{x-y} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x+mx}{x-mx} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x(1+m)}{x(1-m)} = \frac{1+m}{1-m}$$

۵۲- گزینه‌ی (۲)

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= (x + 2y)^{\frac{x}{y}} \left(\frac{1}{y} \ln(x + 2y) + \frac{x}{y} \cdot \frac{1}{x + 2y} \right) \\ (1, 1) &\implies \frac{\partial z}{\partial x} = (1 + 2)(\ln 3 + \frac{1}{3}) = 3 \ln 3 + 1 \end{aligned}$$

۵۳- گزینه‌ی (۱)

$$d^2 z = dx^2 + dy^2 + 2 dx dy + 3 dx^2 + 5 dy^2$$

$$=(dx+dy)^T + 3dx^T + dy^T \geq 0$$

۵۴- گزینه‌ی (۴)

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \Rightarrow 2x + 4y + 2 = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \Rightarrow 4x + 12y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4x - 4y = 4 \\ 4x + 12y = 0 \end{cases} \Rightarrow y = 1, x = -3$$

۵۵- گزینه‌ی (۲)

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \ln(y+1) & \frac{x}{y+1} \\ \frac{y}{x+1} & \ln(x+1) \end{vmatrix}$$

$$(1,1) = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \ln 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \ln 2 \end{vmatrix} = (\ln 2)^2 - \frac{1}{4}$$

۵۶- گزینه‌ی (۴)

$$10x + 5y = 100 \Rightarrow 2x + y = 20 \Rightarrow y = 20 - 2x$$

$$\max: Z = xy \Rightarrow Z = x(20 - 2x) = 20x - 2x^2$$

$$Z'_x = 0 \Rightarrow 20 - 4x = 0 \Rightarrow x = 5, y = 10$$

۵۷- گزینه‌ی (۱)

$$L = q_1 q_2 + \lambda(100 - 2q_1 - q_2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = q_2 - 2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{q_2}{2} \Rightarrow q_1 = \frac{q_2}{2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_2} = q_1 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = q_1$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 100 - 2q_1 - q_2 = 0 \Rightarrow 100 - q_2 - q_2 = 0 \Rightarrow q_2 = 50, \lambda = \frac{50}{2} = 25$$

۵۸- گزینه‌ی (۴)

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y \cdot f'(x - 2y); \quad \frac{\partial z}{\partial y} = f(x - 2y) - 2yf'(x - 2y)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial y} + 2 \frac{\partial z}{\partial x} &= f(x-2y) - 2yf'(x-2y) + 2yf'(x-2y) \\ &= f(x-2y) = \frac{z}{y}\end{aligned}$$

۵۹- گزینه‌ی (۲)

$$y + 2x = 6 \implies y = 6 - 2x$$

$$\min: z = x^2 - xy = x^2 - x(6 - 2x) = 3x^2 - 6x$$

$$z'_x = 0 \implies 6x - 6 = 0 \implies x = 1, y = 4 \implies z = 1 - 4 = -3$$

۶۰- گزینه‌ی (۳)

$$Z = \ln \frac{x+y}{x-y} = \ln(x+y) - \ln(x-y) \quad ; \quad dx \approx \Delta x; dy \approx \Delta y$$

$$Z_x = \frac{1}{x+y} - \frac{1}{x-y} \quad ; \quad Z_y = \frac{1}{x+y} + \frac{1}{x-y}$$

$$dZ = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = \left(\frac{1}{x+y} - \frac{1}{x-y} \right) dx + \left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{x-y} \right) dy$$

$$(x=2, y=1, \Delta x=0.1, \Delta y=0.2)$$

$$\implies dZ = \left(\frac{1}{3} - 1 \right) (0.1) + \left(\frac{1}{3} + 1 \right) (0.2) = 0.2$$

۶۱- گزینه‌ی (۲)

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} \quad ; \quad t=2, s=3 \implies x=6, y=0$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = (2x+3y)(s) + (2y+3x-5)(-3)$$

$$= (12+0)(3) + (0+18-5)(-3) = 36 - 39 = -3$$

۶۲- گزینه‌ی (۱)

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 \cdot \frac{1}{x} e^{\frac{y}{x}} = x e^{\frac{y}{x}}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = e^{\frac{y}{x}} + x \left(-\frac{y}{x^2} e^{\frac{y}{x}} \right) \xrightarrow{(1,2)} e^1 - 2e^1 = -e^1$$

۶۳- گزینه‌ی (۱)

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 3y - 1 = 0 \\ 4y - 2x + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x - 9y = 3 \\ 8y - 6x = -4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = 1, x = 2$$

$$Z_{xx} = 2, \quad Z_{xy} = Z_{yx} = -3, \quad Z_{yy} = 4$$

$$|H_1| = Z_{xx} = 2 > 0, \quad |H_2| = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 9 = -1 < 0 \rightarrow \text{رینی}(2, 1)$$

۶۴- گزینه‌ی (۳)

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot dy = (2x \tan y - \cos 2y)dx + (x^2(1 + \tan^2 y) + 2x \sin 2y)dy$$

$$(2, \frac{\pi}{4}), dx = 0, dy = 0, 2, dy = 0, 1$$

$$dz = (4 \times 1 - 0)(0, 2) + (4 \times 2 + 4 \times 1)(0, 1) = 0, 20$$

۶۵- گزینه‌ی (۴)

$$(s = 1, t = 2) \Rightarrow x = 2 - 2 = 0; \quad y = 2 - 1 = 1$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial s} &= \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s} \\ &= \left(\frac{1}{y} - \frac{y}{(x-2)^2} \right)(2) + \left(-\frac{x}{y^2} + \frac{1}{x-2} \right)(-2s) \\ &= \left(1 - \frac{1}{4} \right)(2) + \left(0 - \frac{1}{4} \right)(-2) = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

۶۶- گزینه‌ی (۳)

$$k^2 - 3k + 2 = 0 \quad \Delta = 1 > 0 \Rightarrow (k-1)(k-2) = 0 \Rightarrow k_1 = 1, k_2 = 2$$

$$y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x} = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$$

۶۷- گزینه‌ی (۳)

$$i^{2n}, n = 20 \Rightarrow n = 4(5) \Rightarrow i^{2n} = 1$$

$$i^{15}, n = 15 \Rightarrow n = 2(3) + 3 \Rightarrow i^{15} = -i$$

$$\frac{2i^{15} + i^{15}}{2 + i} = \frac{2 - i}{2 + i} \times \frac{2 - i}{2 - i} = \frac{4 - 2i + i^2}{4 - i^2} = \frac{4 - 2i - 1}{4 - (-1)} = \frac{3}{5} - \frac{2}{5}i$$

۶۸۔ گزینہ (۱)

$$z = \frac{i\sqrt{2}}{1-i} = \frac{i\sqrt{2}}{1-i} \times \frac{1+i}{1+i} = \frac{i\sqrt{2} + i^2\sqrt{2}}{1-i^2} = \frac{i\sqrt{2} - \sqrt{2}}{1+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}i - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1, \tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = -1 \Rightarrow \theta = \frac{3\pi}{4}$$

$$\sqrt{z} = \sqrt{1} \left(\cos \frac{2k\pi + \frac{3\pi}{4}}{2} + i \sin \frac{2k\pi + \frac{3\pi}{4}}{2} \right)$$

$$k = 0 \Rightarrow z_1 = \left(\cos \frac{3\pi}{8} + i \sin \frac{3\pi}{8} \right) \Rightarrow r = 1, \theta = \frac{3\pi}{8}$$

۶۹۔ گزینہ (۲)

$$A_t = A_0(1+r)^t \Rightarrow 12 = 9(1+0.1)^t \Rightarrow 2 = (1.1)^t \Rightarrow \ln 2 = \ln(1.1)^t$$

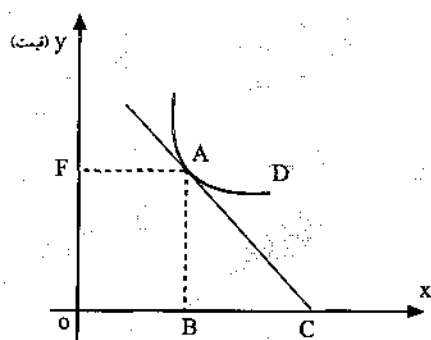
$$\Rightarrow t \ln 1.1 = \ln 2 \Rightarrow t = \frac{\ln 2}{\ln 1.1}$$

۷۰۔ گزینہ (۲)

$$p = 2 \Rightarrow q = 10 - \ln 2$$

$$e = \frac{dq}{dp} \cdot \frac{p}{q} = -\frac{1}{p+1} \cdot \frac{p}{q} = \frac{-2}{2(10 - \ln 2)}$$

۷۱۔ گزینہ (۲)



$$e_A = \frac{\Delta x}{\Delta y} \cdot \frac{y}{x} = \frac{BC}{OF} \cdot \frac{OF}{OB} = \frac{BC}{OB}$$

علامت منفی بخاطر شیب منفی منحنی تقاضا است.

۷۲- گزینه‌ی (۱)

۷۳- گزینه‌ی (۳)

$$TR = 4 \cdot x, \quad TC = 0.5 \Delta(4 \cdot x) + 60000 = 2 \cdot x + 60000$$

$$TR = TC \Rightarrow 4 \cdot x = 2 \cdot x + 60000 \Rightarrow x = 3000$$

۷۴- گزینه‌ی (۲)

$$TR = x \cdot y = 18x - 2x^2$$

$$\pi = TR - TC = 18x - 2x^2 - 10x + x^2 = -x^2 + 8x$$

$$\frac{d\pi}{dx} = 0 \Rightarrow -2x + 8 = 0 \Rightarrow x = 4$$

۷۵- گزینه‌ی (۴)

$$MC = \frac{dTC}{dx} = 3x^2 + 12; \quad AC = \frac{TC}{x} = x^2 + 12 + \frac{54}{x}$$

$$MC = AC \Rightarrow 3x^2 + 12 = x^2 + 12 + \frac{54}{x} \Rightarrow 2x^2 = \frac{54}{x} \Rightarrow x = 3, MC = 39$$

۷۶- گزینه‌ی (۴)

$$C = \int 2x^{-\frac{1}{2}} dx = 4x^{\frac{1}{2}} + d = 4\sqrt{x} + d \Rightarrow 10 = 0 + d \Rightarrow d = 10$$

$$S = x - C \Rightarrow S = x - 4\sqrt{x} - 10$$

۷۷- گزینه‌ی (۳)

$$P(t) = P(0)e^{rt} \Rightarrow 2P(0) = P(0)e^{0.075t} \Rightarrow 2 = e^{0.075t}$$

$$\Rightarrow \ln 2 = 0.075t \ln e \Rightarrow t = \frac{0.705}{0.075} = 9.4$$

گزینه ی (۳).

$$A_t = A_0 \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} \Rightarrow 3A_0 = A_0 \left(1 + \frac{0.12}{12}\right)^{12t} \Rightarrow$$

$$3 = (1.01)^{12t} \Rightarrow \log 3 = 12t \log(1.01) \Rightarrow \log_{1.01} 3 = 12t \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\log_{1.01} 3} = 12t \Rightarrow \frac{1}{0.0043} = 12t \Rightarrow t \simeq 9.3$$

منابع و مأخذ

الف: فارسی

- ۱- حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه تحلیلی (جلد اول و دوم)
تألیف: لوئیس لیتهال- ترجمه: مهدی بهزاد، محسن رزاقی، سیامک کاظمی، اسلام ناظمی
انتشارات مرکز نشر دانشگاهی
- ۲- حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه تحلیلی (جلد اول و دوم)
تألیف: جورج توماس، راس فینی- ترجمه: مهدی بهزاد، سیامک کاظمی، علی کافی
انتشارات مرکز نشر دانشگاهی
- ۳- حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه تحلیلی (جلد اول و دوم)
تألیف: ریچارد سیلورمن- ترجمه: علی اکبر عالمزاده
انتشارات ققنوس
- ۴- حساب دیفرانسیل و انتگرال
تألیف: د. ج. کرویس، س. م. شلی- ترجمه: ابوالقاسم لاله
انتشارات مرکز نشر دانشگاهی
- ۵- ریاضیات عمومی و کاربردهای آن (جلد اول و دوم)
تألیف: حسینعلی پورکاظمی
نشر نی
- ۶- تحلیل‌های ریاضی و کاربرد آن در اقتصاد و بازرگانی (جلد اول و دوم)
تألیف: جین. ا. وبر- ترجمه: حسینعلی پورکاظمی
انتشارات دانشگاه شهید بهشتی
- ۷- تمرین‌ها و مسائل آنالیز ریاضی
تألیف: پ. ب. دمیدوویچ- ترجمه: پرویز شهریاری
انتشارات امیرکبیر
- ۸- جبر خطی
تألیف: مایکل اونان- ترجمه: علی اکبر محمدی حسن‌آبادی
انتشارات مرکز نشر دانشگاهی
- ۹- جبر خطی
تألیف: آ. مری تروپر- ترجمه: دکتر محمدرضا رجب‌زاده مقدم- دکتر ابوالقاسم بزرگ‌نیا
انتشارات آستان قدس رضوی
- ۱۰- نظریه مجموعه‌ها و مباحث مربوط به آن
تألیف: سیمور لیپ شوتر- ترجمه محمود مهدی‌زاده
نشر دانش امروز

ب: لاتین

- 1- Set Theory With Applications
Shwu Yeng. T. Line And You-Feng Lin
Mariner Publishing Company, Inc, 1981.
- 2- Buck, Rebert C. Advanced Calculus (3 rd ed). New York:
McGraw-Hill, 1978
- 3- Fryer, Michael J. An Introduction to Linear Programming and Matrix Game
Theory New York: Wiley, 1978
- 4- Fundamental Methods Of Mathematical Economics A.C. Chiang, Mc Graw-
Hill, 1984.
- 5- Mathematical Formulas
A. G. Tsypkin, G. G. Tsypkin
Mir Publishers, 1985.